Esercizi su Diagonalizzazione
Ingegneria Industriale e Navale 2018/2019
tredicesimo foglio

December 29, 2018

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che A ed ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori. Si può dire lo stesso per gli autovettori?

2. Si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$, tale che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sia diagonalizzabile. Per ogni tale a, b si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A.

3. Si dica se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$
è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determinino una matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$ ed una matrice M invertibile tale che $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

4. Si determinino $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sapendo che
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
sono autovettori della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$
Si dica se A è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D, tali che $B^{-1} \cdot A \cdot B = D$.

5. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali? Per ogni tale a si determinino una matrice invertibile B e una matrice diagonale D tali che $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

(b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri complessi? Per ogni tale a si determinino una matrice invertibile B e una matrice diagonale D tali che $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

6. Sia V uno spazio vettoriale Euclideo con un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$. Si dimostri che se $v, w \in V$ sono due vettori ortogonali, allora

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Si confronti questa affermazione con il Teorema di Pitagora.

7. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dotato del prodotto scalare standard. Determinare una base ortonormale di V .