ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 11

Trieste, 4 gennaio 2019

Esercizio 1. Usando vettori e ortogonalità, si dimostrino i seguenti teoremi della geometria euclidea:

(1) Il teorema di Talete che afferma che l'angolo opposto al diametro in un triangolo inscritto in una circonferenza è retto.
(2) Le due diagonali di un rombo sono ortogonali.
(3) I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli.
(4) Le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

Esercizio 2. Si consideri il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $b(z_1, z_2) = 2\mathfrak{Re}(z_1 z_2)$, dove $\mathfrak{Re}$ indica la parte reale di un numero complesso.

(1) Si dimostri che b è bilineare e simmetrica.
(2) Sia $\mathcal{B} = (1, i)$ base di $\mathbb{C}$; si calcoli $M_{\mathcal{B}}(b)$.
(3) Sia $\mathcal{C} = (z_1, z_2)$ una generica base di $\mathbb{C}$; si verifichi che

$$\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \left[\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} \end{pmatrix}\right]^2 .$$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Fissato $v \in V$, si definisca $\varphi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$, per ogni $w \in V$.

(1) Dimostrare che φ_v è lineare (e quindi $\varphi_v \in V^*$).
(2) Dimostrare che $\varphi : V \to V^*$ definita da $\varphi(v) = \varphi_v$ è lineare.
(3) Dimostrare che φ è iniettiva. Se la dimensione di V è finita, allora è anche suriettiva e quindi un isomorfismo.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si fissi il prodotto scalare standard. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + x_3 - 3x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$; si calcoli una base ortonormale di W e la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.