Endomorfismi ortogonali e unitari.

Sono quelli che conservano la struttura metrica ossia il prodotto scalare.

<u>Def</u>. V sp. vett. euclideo (o unitario)
$f: V \to V$ endomorfismo si dice <u>ortogonale</u> (risp. <u>unitario</u>) se $\forall v, w \in V$
$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$: f conserva il prodotto scalare.

Chiaramente in questo caso $\langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle$ e perciò $\|v\| = \|f(v)\|$: <u>f conserva la norma</u> indotta dal prodotto scalare.

Questa proprietà si può rovesciare:

<u>Prop</u>. Sia V uno sp. vett. euclideo (unit.)
Sia $f: V \to V$ un endomorfismo t.c.
$\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.
Allora f è ortogonale (risp. unitario)

<u>Dim</u>. Basta usare la formula di polarizzazione, nei 2 casi reale e complesso. ∎

Osserviamo che un endomorfismo ortogonale (o unitario) è sicuramente iniettivo. Infatti se ~~$f(v) \in \ker$~~ $v \in \ker f$, si ha $f(v) = 0$ e perciò $\|f(v)\| = 0$; ma $\|v\| = \|f(v)\|$ e quindi $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Allora se $\dim V$ è finita un endom. ortogonale (unitario) è un automorfismo di V, cioè un isomorfismo di V in sè.

Un tale endom. è anche detto isometria vettoriale o lineare.

Prop. autovalori di un endomorfismo ortogonale o unitario.

Sia λ un autovalore di $f: V \longrightarrow V$ ortogonale o unitario.

Allora $|\lambda| = 1$ (valore assoluto o modulo).

Dim. Per ip. $\exists\, v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

Allora $\|v\| \underset{\text{f ortog. o unit.}}{=} \|f(v)\| \underset{\text{f autoett.}}{=} \|\lambda v\| \underset{\text{prop. norma}}{=} |\lambda|\,\|v\|$.

Allora $|\lambda| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$. ∎

Nel caso reale si ha $\lambda = \pm 1$;
nel caso complesso, λ appartiene alla crf unitaria: $\lambda = e^{i\alpha}$, $0 \le \alpha < 2\pi$.
$= \cos\alpha + i \sin\alpha$

Quindi nessun autovalore è nullo.
Altra prop. importante:

Prop. Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori distinti di f, ortogonale o unitario. Siano v autovettore di λ e w autovettore di μ.
Allora $v \perp w$. Ossia: autovettori di autovalori distinti sono ortogonali.

Dim. $f(v) = \lambda v$, $f(w) = \mu w$.

$$\langle v, w \rangle \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ ortog. o unit.}}}{=} \langle f(v), f(w) \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle \underset{\text{sesq.}}{=}$$

$= \bar{\lambda}\mu \langle v, w \rangle$. Allora $(1 - \bar{\lambda}\mu)\langle v, w \rangle = 0$.

Ci sono 2 casi:

o $\langle v, w \rangle = 0$ e v, w sono ortogonali;

opp. $1 = \bar{\lambda}\mu$. Ma $|\lambda| = 1$ e perciò $\bar{\lambda}\lambda = 1$ e dunque $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Allora

$1 = \bar{\lambda}\mu = \frac{\mu}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \mu$: assurdo.

(Nel caso reale la dim. è più semplice in quanto la relaz. è $\lambda\mu = 1$ da cui $\mu = \frac{1}{\lambda}$; ma λ, μ valgono entrambi 1 o -1 e quindi sono uguali).

Più in generale: se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di f allora

$$\mathrm{Aut}(\lambda_1) \oplus \mathrm{Aut}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Aut}(\lambda_k) \subseteq V$$

è una somma ortogonale, perchè ogni autosett. di λ_i è ortog. ad ogni somma di autosettori degli altri autovalori.

— · —

Matrici associate a endom. ortogonali (unitari). Interessa il caso in cui si lavora con una base ortonormale.

<u>Def.</u> A matrice $n \times n$ reale, <u>invertibile</u>
A è detta <u>ortogonale</u> se $A^{-1} = {}^tA$.

A matrice $n \times n$ complessa, invertibile.
A è detta <u>unitaria</u> se $A^{-1} = {}^t\bar{A}$.

<u>Prop</u> A matrice ~~ortogonale~~ quadrata reale (o ~~unitaria~~ complessa)

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) A è ortogonale (risp. unitaria);

(ii) le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) per il prod. scalare standard;

(iii) stessa proprietà per le righe di A.

<u>Dim</u> nel caso complesso.

A unitaria $\iff {}^t\bar{A}A = E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \iff$

~~$\forall i,j$~~

${}^t\bar{a}^i a^j = \delta_{ij}$ ma questo è proprio $\langle \bar{a}^i, a^j \rangle$ e dunque le colonne a^j formano una base ortonorm. di $\mathbb{C}^n$.

colonna i-esima di $\bar{A}$

colonna j-esima di A

Per le righe, si usa che $A\,{}^t\bar{A} = E_n \overset{\text{coniugo}}{\iff}$ $\overline{A\,{}^t\bar{A}} = \bar{A}\,{}^tA = E_n$ e si ragiona come sopra.

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ matrice della rotazione di angolo α in $\mathbb{R}^2$

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

2) $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ matrice di una riflessione in $\mathbb{R}^2$

$$ {}^tBB = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Legame con gli endom. ortogonali e unitari

<u>Teorema</u> $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo di V sp. vett. euclideo o unitario

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una base <u>ortonormale</u>.

Allora f è ortogonale (risp. unitario) $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale (risp. unitaria).

<u>Dim</u> caso complesso.

Siano v, w vettori con colonne delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ rispettivamente $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

- $\mathcal{B}$ è ortonormale $\Rightarrow \langle v, w \rangle = {}^t\bar{x}y$.
- $f(v)$ ha coordinate Ax rispetto a $\mathcal{B}$
  $f(w)$ " " Ay

f è unitario $\iff \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$
$\forall v, w \in V$

$\iff {}^t\bar{x}y = {}^t(\overline{Ax})Ay \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

Osservazione che se 2 matrici inducono la stessa forma coincidono

$\iff {}^t\bar{x}E_n y = {}^t\bar{x}\,{}^t\bar{A}Ay$

$\iff E_n = {}^t\bar{A}A$, ossia ${}^t\bar{A} = A^{-1}$. ∎

<u>Caso particolare</u>: $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C}$ base canonica e prod. scalare canonico

A è ortogonale $\iff L(A)$ è ortogonale.

$\mathbb{C}^n$ con $\mathcal{C}$ - - - -

A è unitaria $\iff L(A)$ è endom. unitario.

Perché $\mathcal{C}$ è ortonormale per il prod. scalare standard e $A = M_{\mathcal{C}}(L(A))$.

Quindi: rotazioni e riflessioni sono endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$.

GRUPPI DI MATRICI.

Supp. A, B siano matrici ortogonali $n \times n$, cioè ${}^tAA = E_n = {}^tBB$. Allora

${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tB E_n B = {}^tBB = E_n$

$\Rightarrow AB$ è ortogonale.

Anche: E_n è ortogonale, le colonne sono $e_1, \dots, e_n$.

Se A è ortogonale ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t(A^{-1})^{t}A^{-1} =$

$= {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = E_n \Rightarrow A^{-1}$ è ortogonale.

Sia $O(n) = \{ A \ n \times n \text{ reale} \mid A \text{ ortogonale} \}$

$\cap\!\!\mid$

$GL(n, \mathbb{R})$

è un sottogruppo: <u>gruppo ortogonale</u> di grado n.

Analogamente:

A, B unitarie $\Rightarrow {}^t(\bar{A}\bar{B})AB = {}^t(\bar{A}\bar{B})AB =$

$= {}^t\bar{B}\,{}^t\bar{A}AB = E_n$ ecc.

$U(n) = \{ A \ n \times n \text{ complessa} \mid A \text{ unitaria} \}$

$\cap\!\!\mid$

$GL(n, \mathbb{C})$ gruppo unitario di grado n.

<u>Oss.</u> Se A è una matrice ortogonale o unitaria, $|\det(A)| = 1$ (modulo o valore assoluto).

<u>Dim.</u> $\det(A\,{}^t\bar{A}) = \det(E_n) = 1$

$\overset{\text{Binet}}{=}$

$\det(A)\det({}^t\bar{A})$

$=$

$(\det A)(\det \bar{A})$

$\overset{\text{prop. del coniugio}}{=}$

$\det(A)\,\overline{\det(A)}$

$\Rightarrow |\det(A)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(A)| = 1.$ ∎

Allora def.: $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$

$= \{A \mid A$ ortogonale con $\det(A) = 1\}$

gruppo ortogonale speciale: matrici ortogonali con determinante 1.

$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$

gruppo unitario speciale: matrici unitarie con determinante 1.

<u>Teorema</u> <u>Forma normale</u> per automorfismi <u>unitari</u> (caso <u>complesso</u>)

V sp. vett. <u>unitario</u> di dim finita n, $f: V \to V$ automorfismo unitario.

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ <u>ortonormale</u> di V formata da autovettori di f.

In particolare f è diagonalizzabile.

Dim. Induz. su $n = \dim V$.

~~$n=0$ $V=\{0\}$ vero~~

$n=1$ $V \neq \{0\}$; $\exists\, v \in V,\ v \neq 0$

Considero $\frac{v}{\|v\|}$: è una base ortonorm. di V

e ogni vettore di V gli è prop., dunque è autovettore.

Passo induttivo Siamo su $\mathbb{C}$: $p_f(x)$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$: λ_1 è autovalore di f $\Rightarrow \exists\, v_1 \neq 0$ t.c. $f(v_1) = \lambda v_1$. Posso supp. $\|v_1\| = 1$ (altrimenti lo sostituisco con $\frac{v_1}{\|v_1\|}$).

Sia $W = \langle v_1 \rangle^{\perp}$: vogliamo dim. che $f(W) \subseteq W$, perché in tal caso $f|_W$ è un endom. unitario di W e possiamo applicare l'ip. induttiva.

Sia dunque $w \in W$: allora $\langle w, v_1 \rangle = 0$.

Consid. $f(w)$ e vogliamo dim. che $\langle f(w), v_1 \rangle = 0$

Da $\langle w, v_1 \rangle = 0$ segue $\langle f(w), f(v_1) \rangle = 0 =$

$= \langle f(w), \lambda v_1 \rangle = \lambda \langle f(w), v_1 \rangle$

sappiamo che $|\lambda| = 1$ dunque $\lambda \neq 0$.

Allora $\langle f(w), v_1 \rangle = 0$ e $f(w) \in W = \langle v_1 \rangle^\perp$.

Consideriamo $f|_W : W \to W$ è unitario,

$\dim W = n-1$ (perché $V = \langle v_1 \rangle \oplus W$)

Allora per ip. induttiva $\exists\, v_2, \dots, v_n$ base ortonorm. di W formata da autovettori di $f|_W$: sono anche autovettori di f.

Ma $v_i \in W = \langle v_1 \rangle^\perp \Rightarrow \langle v_1, v_i \rangle = 0 \ \forall i \geq 2$.

Si ha che $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una base di V (perché unione di basi dei 2 addendi diretti), ed è ortonormale. ∎

Questo teorema ha una versione per matrici.

<u>Teorema</u> Forma normale per matrici unitarie.

A matrice unitaria $n \times n$.

Allora esiste una matrice S unitaria $n \times n$ t.c. $S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

In particolare A è diagonalizzabile mediante una matrice unitaria.

Dim. A unitaria, $\mathcal{C}$ base canonica di $\mathbb{C}^n$

$L(A): \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è autom. unitario

per il prod. scalare canonico $\Rightarrow \exists$ una

base ortonormale per il prod. scalare canonico di $\mathbb{C}^n$ $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di

autovettori di $L(A)$. Abbiamo allora:

$$\underset{S^{-1}}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{C}^n})} \; \underset{A}{M_{\mathcal{C}}(L(A))} \; \underset{S}{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n})} = M_{\mathcal{B}}(L(A)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

autovalori di $L(A)$

Inoltre le colonne di S sono i vettori di $\mathcal{B}$, base ortonormale per il prodotto scalare standard,
$\Rightarrow S$ è unitaria. ∎

Corollario

Se f è un automorfismo unitario, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, si ha:

$$V = Aut(\lambda_1) \oplus \dots \oplus Aut(\lambda_k).$$

— • —

Nel caso ortogonale, non è più vero che A sia diagonalizzabile: es.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \alpha \neq 0, \pi.$$