Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

9. Prodotti scalari, forme bilineari, spazi Euclidei

1 Prodotti scalari e forme bilineari

Definizione 1. *Il **prodotto scalare canonico** (anche detto **standard**) su $\mathbb{R}^n$ è la seguente funzione:*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,$$
$$\langle v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \rangle = {}^t v \cdot w = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n\,.$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$*, la **norma** di v si definisce come segue:*

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

Osserviamo che $||v||$ coincide con la lunghezza del vettore v, cioè la distanza dall'origine del punto $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

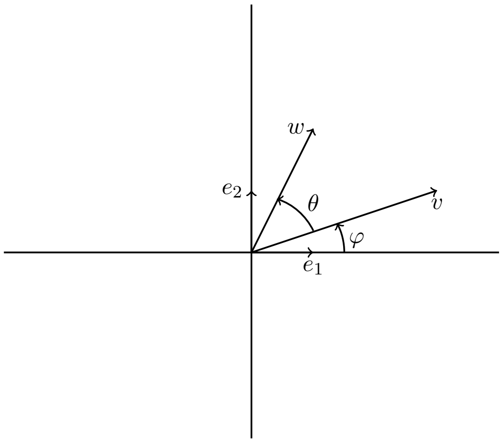
Valgono le seguenti proprietà la cui verifica è lasciata per esercizio.

1. $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$, $\forall v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$;
2. $\langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $\forall c \in \mathbb{R}$;
3. $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$, $\forall v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$;
4. $\langle v, cw\rangle = c\langle v, w\rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $\forall c \in \mathbb{R}$;
5. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$;
6. $\langle v, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, ed è $= 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Esempio 1. Consideriamo il caso $n = 2$. Siano $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Allora

$$\langle v, w\rangle = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2\,.$$

Mostriamo ora come, usando il prodotto scalare $\langle , \rangle$, sia possibile determinare il coseno dell'angolo θ compreso tra i vettori v e w (come mostrato nella seguente figura).



Esprimiamo le coordinate di v (rispettivamente di w) in funzione della norma $||v||$ (rispettivamente $||w||$) e dell'angolo φ (rispettivamente $\varphi + \theta$):

$$\begin{cases} \lambda_1 &= ||v|| \cos\varphi \\ \lambda_2 &= ||v|| \sin\varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1 &= ||w|| \cos(\varphi+\theta) = ||w||(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ \mu_2 &= ||w|| \sin(\varphi+\theta) = ||w||(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)\,. \end{cases}$$

Scriviamo le equazioni per μ_1 e μ_2 come segue:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{||w||} \\ \frac{\mu_2}{||w||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,.$$

Siccome $\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1$, la matrice è invertibile, e moltiplicando ambo i membri dell'equazione per la matrice inversa otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{||w||} \\ \frac{\mu_2}{||w||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1\cos\varphi+\mu_2\sin\varphi}{||w||} \\ \frac{-\mu_1\sin\varphi+\mu_2\cos\varphi}{||w||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2}{||v||\cdot||w||} \\ \frac{-\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_1}{||v||\cdot||w||} \end{pmatrix} \,,$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le seguenti equazioni: $\cos\varphi = \frac{\lambda_1}{||v||}$, $\sin\varphi = \frac{\lambda_2}{||v||}$. Da questo segue che $\cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||}$.

Il precedente esempio motiva la seguente definizione. Ricordiamo che la funzione coseno è una biezione $[0,\pi] \to [-1,1]$.

Definizione 2. *Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ due vettori non nulli. L'**angolo convesso tra** v **e** w è definito come l'angolo $\theta \in [0,\pi]$, tale che*

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}\,.$$

Osservazione 1. Come vedremo in seguito, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$. In particolare, se $v, w \neq 0$, allora $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||} \leq 1$, quindi la precedente definizione è ben posta.

È possibile estendere la nozione di prodotto scalare ad uno spazio vettoriale arbitrario definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. A tale scopo introduciamo prima la nozione di forma bilineare, che può essere definita su un campo K qualsiasi.

Definizione 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K.*

1. *Una **forma bilineare** su V è una funzione $g\colon V \times V \to K$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2, w) &= g(v_1, w) + g(v_2, w)\,, \quad \forall v_1, v_2, w \in V\,; \\ g(v, w_1 + w_2) &= g(v, w_1) + g(v, w_2)\,, \quad \forall v, w_1, w_2 \in V\,; \\ g(\lambda v, w) &= \lambda g(v, w) = g(v, \lambda w)\,, \quad \forall v, w \in V\,,\ \forall \lambda \in K\,. \end{aligned}$$

   L'insieme di tutte le forme bilineari su V si denota con $\mathrm{Bil}(V)$.

   *Sia g una forma bilineare su V. Allora g è: **simmetrica**, se $g(v,w) = g(w,v)$, $\forall v, w \in V$;* **antisimmetrica**, *se $g(v,w) = -g(w,v)$, $\forall v, w \in V$.*

   *Se il campo K è il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, allora una forma bilineare g su V si dice: **semi-definita positiva** (rispettivamente **semi-definita negativa**), se $g(v,v) \geq 0$, $\forall v \in V$ (rispettivamente $g(v,v) \leq 0$, $\forall v \in V$); **definita positiva** (rispettivamente **definita negativa**), se $g(v,v) \geq 0$, $\forall v \in V$, e $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (rispettivamente se $g(v,v) \leq 0$, $\forall v \in V$, e $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$).*

2. *Sia ora $K = \mathbb{R}$. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica e definita positiva.*

Proposizione 1. *[Formula di polarizzazione] Sia $g \in \mathrm{Bil}(V)$ una forma bilineare simmetrica. Allora, $\forall v, w \in V$, vale la seguente formula:*

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\Big[g(v+w, v+w) - g(v,v) - g(w,w)\Big]\,.$$

2 Spazi vettoriali Euclidei

Definizione 8. *Uno **spazio vettoriale Euclideo** è una coppia (V, g), dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare. Per ogni vettore $v \in V$, la **norma** di v è definita come segue: $\|v\| := \sqrt{g(v,v)}$.*

Osservazione 5. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. La restrizione di g a W è la funzione $g_{|W}\colon W \times W \to \mathbb{R}$ definita come segue: $\forall v, w \in W$, $g_{|W}(v, w) := g(v, w)$. Si osservi che $g_{|W}$ è un prodotto scalare su W (esercizio), che chiameremo anche **prodotto scalare indotto da** g, quindi $(W, g_{|W})$ è uno spazio Euclideo.

Proposizione 6. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\forall v \in V$, $\|v\| \geq 0$, *ed è* $= 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$, $\forall v \in V$ *e* $\forall c \in \mathbb{R}$;
3. $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2$, $\forall v, w \in V$;
4. *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:* $|g(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, $\forall v, w \in V$, *e vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.*
5. *Disuguaglianza triangolare:* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall v, w \in V$.
6. $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\|$, $\forall v, w \in V$.

Dim. Le proprietà 1 e 2 seguono direttamente dalla definizione di prodotto scalare. Le loro verifiche sono lasciate come esercizio.

3. Per la bilinearità di g abbiamo: $\|v + w\|^2 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + 2g(v, w) + g(w, w) = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2$.

4. Se $w = 0$, allora $g(v, 0) = 0$ e $\|v\| \cdot 0 = 0$, quindi la disuguaglianza è soddisfatta. Quindi supponiamo che $w \neq 0$. Dalle proprietà precedenti segue che: $0 \leq \|v + tw\|^2 = \|v\|^2 + 2tg(v, w) + t^2\|w\|^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che la funzione $t \mapsto \|v\|^2 + 2tg(v, w) + t^2\|w\|^2$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, ha come grafico una parabola, e siccome è ovunque ≥ 0, $g(v, w)^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0$, da cui segue l'enunciato. Inoltre osserviamo che v e w sono linearmente dipendenti, se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $v + tw = 0$, quindi se e solo se $g(v, w)^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 = 0$.

5. $\|v + w\|^2 = g(v + w, v + w) = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|g(v, w)| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$, dove nella seconda disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Quindi $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$, da cui segue l'enunciato.

6. Osserviamo che, $\forall v, w \in V$, dalla disuguaglianza triangolare abbiamo: $\|v\| = \|(v + w) - w\| \leq \|v + w\| + \| - w\| = \|v + w\| + \|w\|$. Da cui segue che $\|v\| - \|w\| \leq \|v + w\|$. Analogamente si dimostra che: $\|w\| - \|v\| \leq \|v + w\|$. Quindi $|\|v\| - \|w\|| = \pm(\|v\| - \|w\|) \leq \|v + w\|$. $\square$

Definizione 9. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo.*

1. *Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$ due vettori non nulli. L'**angolo convesso** tra v e w si definisce come l'angolo $\theta \in [0, \pi]$, tale che $\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$.*
2. *Due vettori $v, w \in V$ sono **ortogonali**, se $g(v, w) = 0$. Vettori ortogonali sono anche detti **perpendicolari** e si denota con il simbolo $v \perp w$.*

3. Due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subseteq V$ sono ortogonali se $v \perp w$, $\forall v \in S_1$ e $\forall w \in S_2$.

4. Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme. L' ortogonale ad S è il sottoinsieme $S^\perp := \{w \in V \,|\, w \perp v\,, \forall v \in S\}$.

Osservazione 6. 1. Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$. Se $v \perp w$, allora l'angolo convesso tra v e w è $\frac{\pi}{2}$.
2. Dalle proprietà del prodotto scalare segue che: $v \perp v \Leftrightarrow v = 0$.
3. Per ogni sottoinsieme $S \subseteq V$, l'ortogonale $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V. (La verifica è lasciata per esercizio.)

Definizione 10. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo, con V di dimensione finita. Una* ***base ortogonale*** *di (V, g) è una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, tale che $v_i \perp v_j$, per ogni $i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$.*

Una ***base ortonormale*** *di (V, g) è una base ortogonale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, tale che $\|v_i\| = 1$, per ogni $i = 1, \dots, n$.*

In seguito, una base ortogonale (rispettivamente ortonormale) di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g), verrà anche detta base di V ortogonale (rispettivamente ortonormale) per il prodotto scalare g.

Esempio 4. 1. Per ogni $n \geq 1$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale per il prodotto scalare standard.
2. La base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale, ma non ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Se dividiamo i vettori della base per le rispettive norme otteniamo una base ortonormale, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Osservazione 7. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, g). Allora $\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ è una base ortonormale di (V, g).

Proposizione 7. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori non nulli a due a due ortogonali. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Siano $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tali che $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = 0$. Allora, per ogni $i = 1, \dots, k$, $0 = g(v_i, c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k) = c_1 g(v_i, v_1) + \ldots + c_i g(v_i, v_i) + \ldots + c_k g(v_i, v_k)$. Poiché $v_i \perp v_j$, per ogni $j \neq i$, dalle precedenti uguaglianze otteniamo: $0 = c_i g(v_i, v_i) = c_i \|v_i\|^2$. Per ipotesi $v_i \neq 0$, quindi $c_i = 0$. $\square$

Proposizione 8. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$*

Teorema 2. *[Gram-Schmidt] Sia* (V, g) *uno spazio vettoriale Euclideo. Siano* $w_1, \ldots, w_k \in V$ *vettori linearmente indipendenti. Allora esiste una base* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *di* $\mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_k)$ *ortonormale per il prodotto scalare indotto da* g *(si veda l'Osservazione. 5).*

Dim. Procediamo per induzione su k. Se $k = 1$, allora definiamo v_1 come segue:

$$v_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} .$$

$(k - 1 \Rightarrow k)$ Per ipotesi induttiva, esistono $v_1, \ldots, v_{k-1} \in \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$ che formano una base ortonormale di $\mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$. Definiamo v_k nel seguente modo. Sia

$$\tilde{w}_k := g(w_k, v_1)v_1 + \ldots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1} ,$$

vedremo più avanti che $\tilde{w}_k$ è la proiezione ortogonale di w_k sul sottospazio $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$. Consideriamo ora il vettore $\tilde{v}_k := w_k - \tilde{w}_k$, ed osserviamo che $\tilde{v}_k \neq 0$, poiché $\tilde{w}_k \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$ e $w_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$. Inoltre $\tilde{v}_k$ è ortogonale a $v_1, \ldots, v_{k-1}$, come segue da:

$$\begin{aligned} g(\tilde{v}_k, v_i) &= g(w_k, v_i) - g(\tilde{w}_k, v_i) = \\ &= g(w_k, v_i) - g(g(w_k, v_1)v_1 + \ldots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1}, v_i) \\ &= g(w_k, v_i) - g(w_k, v_i) = 0 , \quad \forall i = 1, \ldots, k-1 . \end{aligned}$$

Quindi ponendo $v_k := \frac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}$, i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono a due a due ortogonali e di norma $= 1$, perciò essi sono linearmente indipendenti e formano una base ortonormale di $\mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_k)$. $\square$

Osservazione 8. La dimostrazione del precedente teorema fornisce un metodo effettivo, che chiameremo **procedimento di Gram-Schmidt**, per determinare una base ortonormale di uno spazio vettoriale Euclideo a partire da una base qualunque. Vediamo con un esempio come procedere. Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^5$, con il prodotto scalare canonico $\langle , \rangle$:

$$V := \mathrm{Span}\left(w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^5 .$$

Osserviamo che $w_1, \ldots, w_4$ sono linearmente indipendenti. Per determinare una base ortonormale $\{v_1, \ldots, v_4\}$ di V, procediamo come nella dimostrazione del Teorema 2. Definiamo dapprima

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = w_1 , \quad (\|w_1\| = 1) .$$

Per determinare v_2, consideriamo prima

$$\tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

allora $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \tilde{v}_2$. Analogamente,

$$\tilde{v}_3 = w_3 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

quindi $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Infine,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_4 &= w_4 - \langle w_4, v_3 \rangle v_3 - \langle w_4, v_2 \rangle v_2 - \langle w_4, v_1 \rangle v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$v_4 = \frac{\sqrt{105}}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Corollario 1. *Ogni spazio vettoriale Euclideo (V, g) di dimensione finita (cioè $\dim(V) < \infty$) ha una base ortonormale.*

Dim. Sia $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di V. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $w_1, \ldots, w_n$, otteniamo dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ che formano una base ortonormale di $\mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_n) = V$. $\square$

Vediamo ora un esempio in cui il prodotto scalare non è quello canonico.

Esempio 6. Sia $V = \mathbb{R}[t]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali.

Proposizione 11. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g). Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora f è una isometria di (V, g), se e solo se ${}^t\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n$.*

Definizione 13. *Una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è detta* ***ortogonale****, se vale la seguente uguaglianza: ${}^tA \cdot A = \mathrm{I}_n$. L'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali si denota con $\mathrm{O}(n)$.*

Osservazione 11. 1. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ A è invertibile ed $A^{-1} = {}^tA$.
2. Sia $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti, dall'uguaglianza $\mathrm{I}_n = {}^tA \cdot A$, dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che $\det({}^tA) = \det(A)$, si ha:

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det({}^tA \cdot A) = (\det(A))^2 .$$

Esempio 8. 1. $\mathrm{O}(1) = \{(1), (-1)\}$.
2. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale. Osserviamo che, in tal caso $\det(A) = 1$, ed $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresenta la rotazione nel piano $\mathbb{R}^2$ intorno all'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di un angolo θ in senso antiorario.
3. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale. In questo caso $\det(A) = -1$, ed $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresenta la riflessione nel piano $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta passante per l'origine inclinata di un angolo pari a $\frac{\theta}{2}$ (misurato in senso antiorario) rispetto alla retta $\mathrm{Span}(e_1)$.

Corollario 4. *Sia* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Allora* $A \in \mathrm{O}(n)$ *se e solo se le colonne di* A, $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ *formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$ *rispetto al prodotto scalare standard di* $\mathbb{R}^n$.

Il seguente risultato afferma che le matrici degli esempi 8.2. ed 8.3. sono tutte e sole le matrici 2×2 ortogonali.

Proposizione 13. *Sia* $A \in \mathrm{O}(2)$. *Allora:*

- *se* $\det(A) = 1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ *tale che* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;
- *se* $\det(A) = -1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ *tale che* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Quindi le matrici ortogonali 2×2 *sono tutte e sole le matrici aventi una delle forme precedenti.*

Dim. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora, per definizione, A è ortogonale se e solo se $\mathrm{I}_2 = {}^tA \cdot A$, cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$, segue che i punti $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in $\mathbb{R}^2$. In particolare esistono $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tali che $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$, $b = \cos\psi$ e $d = \sin\psi$. Dalla equazione $ab + cd = 0$ deduciamo che i vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono ortogonali tra di loro, quindi $\varphi - \psi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, oppure $\varphi - \psi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Nel primo caso, $b = \cos\psi = \sin\varphi$ e $d = \sin\psi = -\cos\varphi$, quindi $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Mentre nel secondo caso, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. $\square$