Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

10. Il teorema spettrale

Definizione 1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ è detto* **autoaggiunto** *rispetto al prodotto scalare g, se vale la seguente uguaglianza $\forall v, w \in V$:*

$$g(f(v), w) = g(v, f(w)) .$$

Endomorfismi autoaggiunti vengono talvolta chiamati **simmetrici**, poiché sono rappresentati, rispetto a basi ortonormali, da matrici simmetriche. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g). Allora, f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g, se e solo se la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$, $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, è simmetrica.*

Dim. Per semplicità di notazione sia $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. Ricordiamo che, siccome $\mathcal{B}$ è ortonormale, la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto a $\mathcal{B}$ è $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{I}_n$, dove $n = \dim(V)$. Sfruttando la Proposizione 2 del Capitolo 8 e la Proposizione 3 del Capitolo 9 si ha che: $\forall v, w \in V$, se $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sono le coordinate di v, w, rispettivamente, rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora

$$\begin{aligned} g(f(v), w) &= {}^t(A \cdot \lambda) \cdot \mathrm{I}_n \cdot \mu \\ &= {}^t\lambda \cdot {}^tA \cdot \mu , \end{aligned}$$

ed analogamente,

$$g(v, f(w)) = {}^t\lambda \cdot A \cdot \mu .$$

Quindi f è autoaggiunto se e soltanto se

$${}^t\lambda \cdot {}^tA \cdot \mu = {}^t\lambda \cdot A \cdot \mu , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^n . \tag{1}$$

Ne segue che, se A è simmetrica, allora f è autoaggiunto. Viceversa, se f è autoaggiunto, sostituendo $\lambda = e_i$ e $\mu = e_j$ nella (1) si ha l'uguaglianza $a_{ji} = a_{ij}$, dove $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Quindi A è simmetrica. $\square$

Lemma 1. *Valgono le seguenti affermazioni.*

1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora il polinomio caratteristico $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali (non necessariamente distinte).*

2. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione n. Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è autoaggiunto rispetto a g, allora $P_f(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali (non necessariamente distinte).*

Dim. 1. Come osservato in seguito al Teorema 6 del capitolo 8, possiamo considerare $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ come polinomio a coefficienti complessi, $P_A(t) \in \mathbb{C}[t]$ (poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Per il teorema fondamentale dell'algebra, $P_A(t)$ ha n radici complesse. Dimostriamo ora che ogni radice complessa λ di $P_A(t)$ appartiene ad $\mathbb{R}$.

Consideriamo A come una matrice a coefficienti complessi, abbiamo quindi l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $L_A(v) = A \cdot v$. Siccome λ è una radice del polinomio caratteristico di A, λ è un autovalore di L_A (Corollario 7 del Capitolo 8). Sia $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un atovettore di L_A corrispondente all'autovalore λ. Vale quindi la seguente uguaglianza: $A \cdot v = \lambda v$. Inoltre, siccome i coefficienti di A sono numeri reali, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$^t v \cdot A \cdot \bar{v} = {}^t v \cdot (A \cdot \bar{v}) = {}^t v \cdot (\overline{A \cdot v}) = {}^t v \cdot (\overline{\lambda v}) = \bar{\lambda}\, {}^t v \cdot \bar{v}\,,$$

dove $\bar{v}, \overline{A \cdot v}$ sono i vettori di $\mathbb{C}^n$ ottenuti da $v, A \cdot v \in \mathbb{C}^n$, rispettivamente, coniugando tutte le coordinate. D'altro canto, siccome A è simmetrica,

$$^t v \cdot A \cdot \bar{v} = ({}^t v \cdot A) \cdot \bar{v} = {}^t (A \cdot v) \cdot \bar{v} = {}^t (\lambda v) \cdot \bar{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \bar{v}\,.$$

Quindi $\bar{\lambda}\, {}^t v \cdot \bar{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \bar{v}$, e siccome ${}^t v \cdot \bar{v} > 0$, ne segue che $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g). Per la Proposizione 1, $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica. Il risultato segue ora dal punto 1 e dal fatto che $P_f(t) = P_{\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t)$. $\square$

Teorema 1. *[Teorema spettrale] Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di (V, g) che diagonalizza f.*

Corollario 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale $C \in \mathrm{O}(n)$, tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è diagonale, quindi A è diagonalizzabile. Inoltre, siccome $C^{-1} = {}^t C$, A è congruente ad una matrice diagonale.*

Proposizione 2. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ autoaggiunto rispetto a g. Se $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(f)$ sono due autovalori distinti, allora gli autospazi corrispondenti V_λ e V_μ sono ortogonali.*

Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto a g. Per trovare una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f procediamo come segue.

1. Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{C}$ di V e determiniamo la matrice $A := \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \in \mathrm{M}_n(f)$. Per la Proposizione 1, A è simmetrica.
2. Determiniamo il polinomio caratteristico di f, $P_f(t) = \det(A - t\mathrm{I}_n) \in \mathbb{R}[t]$, e le sue radici distinte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Per il Lemma 1 vale la seguente uguaglianza:
$$P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_1)} \cdot (\lambda_2 - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_2)} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_k)},$$
dove $\mathrm{m_a}(\lambda_i)$ è la molteplicità algebrica di λ_i, $\forall i = 1, \ldots, k$.
3. Per ogni $i = 1, \ldots, k$, si determina una base $\{w_{i,1}, \ldots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i}, dove $\mathrm{m_g}(\lambda_i)$ è la molteplicità geometrica di λ_i. Osserviamo che, per il teorema spettrale f è diagonalizzabile, quindi per il Teorema 6 del Capitolo 8, $\mathrm{m_g}(\lambda_i) = \mathrm{m_a}(\lambda_i)$. Osserviamo inoltre che $\{w_{i,1}, \ldots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ è data da una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$(A - \lambda_i \mathrm{I}_n) \cdot x = 0,$$
poiché $V_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_V)$.
4. Per ogni $i = 1, \ldots, k$, applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $w_{i,1}, \ldots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}$ e troviamo una base $\{v_{i,1}, \ldots, v_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i} ortonormale rispetto al prodotto scalare g.
5. $\mathcal{B} := \{v_{1,1}, \ldots, v_{k,\mathrm{m_g}(\lambda_k)}\}$ è una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f. Osserviamo che, $\forall i \neq j$, i vettori $v_{i,\ell}$ ed $v_{j,m}$ sono ortogonali per la Proposizione 2.

Esempio 1. 1. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Allora $P_A(t) = t^2 - 15t + 50 = (t-10)(t-5)$.

$$V_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi una base ortonormale per $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ che diagonalizza A è $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
La matrice del cambiamento di base (da $\mathcal{B}$ alla base canonica) è

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2).$$