Però: se A è una matrice ortogonale 2×2 A è di uno dei 2 tipi già visti. Infatti

se $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, A ortogonale $\Longleftrightarrow {}^tAA = E_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 & (a,b) \in \text{crf unitaria} \\ ac+bd=0 & \\ c^2+d^2=1 & (c,d) \in \text{crf unitaria} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esistono angoli $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ t.c.

$a = \cos\alpha \quad b = \sin\alpha$

$c = \sin\beta \quad d = \cos\beta$

Ma $ac+bd = 0 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ perché $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$.

1° caso: $\alpha+\beta = 0, 2\pi \Rightarrow \alpha = -\beta + 2\pi$ (o $\alpha = -\beta$)

$$\begin{matrix} \sin\beta = -\sin\alpha \\ \cos\beta = \cos\alpha \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2° caso $\alpha+\beta = \pi, 3\pi \Rightarrow \alpha = -\beta+\pi$ o $-\beta+\pi+(2\pi$
angoli supplementari

$$\begin{matrix} \sin\beta = \sin\alpha \\ \cos\beta = -\cos\alpha \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Conseguenza: gli unici endom. ortogonali del piano sono rotazioni e riflessioni.

Nel primo caso A non ha autovalori se $\alpha \neq 0, \pi$, nei quali casi si ha $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nel 2° caso si hanno sempre gli autovalori 1 e -1, $Aut(1)$, $Aut(-1)$ hanno dim 1: sono rette ortogonali e $\mathbb{R}^2 = Aut(1) \perp Aut(-1)$. A si diagonalizza come $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il teorema che dà la forma normale per automorfismi ortogonali dice che questi sono i mattoni per costruire la forma normale.

<u>Teorema</u> Forma normale per automorfismi ortogonali. <u>Caso reale.</u>

V sp. euclideo di dim finita n

$f : V \to V$ automorfismo ortogonale

Esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia del tipo

riflessioni

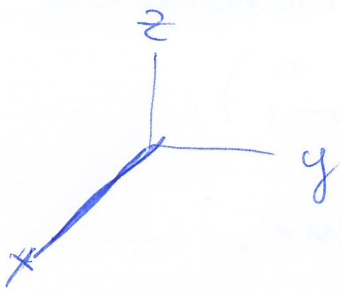
rotazioni

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{matrix}} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Questo è il primo esempio di teorema in cui il caso complesso è più "semplice" del caso reale, dovuto al fatto che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Per esempio per $n=3$ una forma normale è:

1) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad v=(x,y,z) \xrightarrow{f} (x,-y,-z)$.



La retta x è fissa, nel piano yz ho una rotazione di π.
f è la rotazione di π intorno all'asse x. Il piano yz è l'autospazio di autovalore -1.

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ L'asse x viene riflesso intorno all'origine, il piano yz ruotato di un angolo α.

$$\underset{\substack{\| \\ (x,0,0)+(0,y,z)}}{(x\ y\ z)} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ (-x,0,0)+(0,\, y\cos\alpha \cdots\cdots)}}{\left(-x,\ y\cos\alpha - z\sin\alpha,\ y\sin\alpha + z\cos\alpha\right)}$$

—— ∘ ——

Dim. del Teorema.
Induzione su $n = \dim V$.

$\boxed{\text{Se } n=1}$, una matrice ortogonale è (1) o (-1), quindi del tipo $(*)$.

$\boxed{\text{Se } n=2}$, sia $\mathcal{B}$ una base orto~~gonale~~normale di V di dim 2. Allora f è rappresentato da una matrice del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ (pag. 21)

Nel primo caso f non è diagonalizzabile, e abbiamo uno dei blocchi 2×2, nel secondo caso ci sono 2 autovalori $1, -1$ e $V = Aut(1) \oplus^{\perp} Aut(-1)$; e prendendo v_1, v_2 versori nei 2 autospazi, troviamo una base ortonormale $B' = (v_1, v_2)$ risp. a cui $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Questa era la base dell'induzione.

Per dim. il passo induttivo ci serve dim. il seguente:

<u>Lemma</u> Sia V un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale di dim finita $n \geq 1$. Sia $f: V \to V$ un endomorfismo. Allora $\exists W \subseteq V$ con dim $W = 1$ o 2, tale che $f(W) \subseteq W$: W è detto <u>invariante rispetto a f</u>.

<u>Dim.</u> del Lemma.

1) Se f ha un autovalore λ, sia $v \neq 0$ un autovettore di autovalore λ: $f(v) = \lambda v$. Allora $W = \langle v \rangle$ ha dim 1 ed è invariante per f. $(f(cv) = cf(v) = c\lambda v \in W)$

2) Altrimenti: sia $\mathcal{B}$ una base di V, e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ matrice reale $n \times n$.

Passiamo nell'ambiente complesso:

consideriamo
$$L_{\mathbb{C}}(A) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Ora, poiché siamo su $\mathbb{C}$, $L_{\mathbb{C}}(A)$ ha almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ e un autovettore in $\mathbb{C}^n$. λ è una radice del polinomio caratteristico $p_{L_{\mathbb{C}}(A)}(x) = p_A(x)$: polinomio a coefficienti reali perché A è reale.

(i) Vogliamo dim. che anche $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$:

scriviamo $p_A(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$;

$p_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n = 0$; coniughiamo:

$$\overline{p_A(\lambda)} = \bar{0} = 0$$
$$\overline{c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\lambda} + \dots + \bar{c}_n\bar{\lambda}^n =$$

perché $c_i \in \mathbb{R}$
$$= c_0 + c_1\bar{\lambda} + \dots + c_n\bar{\lambda}^n.$$

Dunque anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di $L(A)$.

Se $\lambda = \bar{\lambda}$, λ è reale e torniamo al caso precedente. Supp. dunque $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

(ii) Sia v autovettore di λ; verifichiamo che $\bar v$ è autovettore di $\bar\lambda$: ~~infatti~~ $v \in \mathbb{C}^n$

$L_{\mathbb{C}}(A)(v) = Av = \lambda v$. Ora coniughiamo:

$$\left.\begin{aligned} \overline{Av} &= \overline{\lambda v} = \bar\lambda \bar v \\ &\parallel \\ \bar A \bar v &\underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ è reale}}}{=} A\bar v \end{aligned}\right\} \quad \bar v \text{ è autovettore di autovalore } \bar\lambda.$$

Siccome $\lambda \neq \bar\lambda \Rightarrow v, \bar v$ sono linearm. indip.

(iii) A partire da $v, \bar v \in \mathbb{C}^n$ ci costruiamo ora due vettori reali lin. indip. in $\mathbb{R}^n$ che generino un sottosp. invariante per $L(A): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Scriviamo $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\bar v = \begin{pmatrix} \bar z_1 \\ \vdots \\ \bar z_n \end{pmatrix}$.

Allora $v + \bar v = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}\, z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$;

$$i(v - \bar v) = i \begin{pmatrix} z_1 - \bar z_1 \\ \vdots \\ z_n - \bar z_n \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i\,\mathrm{Im}\, z_1 \\ \vdots \\ i\,\mathrm{Im}\, z_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\, z_1 \\ \vdots \\ -\mathrm{Im}\, z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Oss. che $v + \bar v$, $i(v - \bar v)$ sono lin. indip. perché lo sono $v, \bar v$ e $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = -2i \neq 0$.

Sia $W = \langle v+\bar{v},\ i(v-\bar{v}) \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ di dim 2.

$$L(A)(v+\bar{v}) = A(v+\bar{v}) = Av + A\bar{v} = \lambda v + \bar{\lambda}\bar{v} =$$

$\lambda = x+iy$
$$= (x+iy)v + (x-iy)\bar{v} = x(v+\bar{v}) + y(iv - i\bar{v}) \in W$$

$$L(A)(iv - i\bar{v}) = Aiv - Ai\bar{v} =$$
$$= i\lambda v - i\bar{\lambda}\bar{v} = (ix-y)v - (ix+y)\bar{v} =$$
$$= -y(v+\bar{v}) + x(iv - i\bar{v}) \in W.$$

Dunque $L(A)(W) \subseteq W$. Ora passiamo in V mediante l'isomorf. K_B: $K_B^{-1}(W)$ è il sottospazio invariante per f cercato.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & V \arrow[d, "K_B"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L(A)"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$f(K_B^{-1}(W)) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{diagramma commutativo}}}{=} K_B^{-1}(L(A)(W)) \underset{\substack{\downarrow \\ W \text{ invariante per } L(A)}}{\subseteq} K_B^{-1}(W) \qquad \blacksquare$$

Questo finisce la dim del lemma.

~~Oss. che, essendo f un autom~~

Dim. del passo induttivo del teorema.

$f: V \to V$ ortogonale, $\dim V = n$.

f è un automorfismo di V. Perciò per il Lemma $\exists\, W$ di dim 1 o 2 t.c. $f(W) \subseteq W$. Ma f è auto $\Rightarrow \dim W = \dim f(W)$; ma $f(W) \subseteq W$

e quindi $f(W) = W$. Da ciò segue

anche $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$: infatti

se $v \in W^\perp$, $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow$

$\langle f(v), f(w) \rangle = 0 \quad \forall w \in W$; ma $f(W) = W$

e dunque $f(v) \in W^\perp$. Perciò $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$

e, come prima, sono uguali: $f(W^\perp) = W^\perp$.

Ora abbiamo finito:

$f|_W : W \to W$ e $f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ sono

endomorfismi ortogonali. Prendiamo

basi ortonormali B_1 di W e B_2 di $W^\perp$

come da ipotesi induttiva; $B = B_1 \cup B_2$ è

base di $V = W \oplus W^\perp$, base ortogonale.

Inoltre $M_B(f)$ è a blocchi del tipo:

1×1 o 2×2 $\rightarrow$
$$\left(\begin{array}{c|c} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{B_2}(f|_{W^\perp}) \end{array}\right)$$

come richiesto dalla tesi per la base dell'induz.

come richiesto dalla tesi per ip. induttiva: $\dim W^\perp = \begin{cases} n-1 & \text{se } \dim W = 1 \\ n-2 & \text{se } \dim W = 2 \end{cases}$

Oss. che abbiamo usato: se vale il teorema per $n-1$ o $n-2$, allora vale per n. Variante del principio d'induzione.

O principio d'induzione completa: se vale il teorema $\forall\, m < n$, allora vale per n.

Corollario per le matrici ortogonali.

Se A è una matrice ortogonale, allora $\exists$ una matrice ortogonale S t.c. $S^{-1}AS = {}^tSAS$ è della forma descritta nel Teorema.

Stessa dim. del caso unitario.

Esempio Endom. ortog. di $\mathbb{R}^3$.

Non c'è bisogno del Lemma perché il pol. caratteristico $p_f(x)$ ha grado 3, ha coeff. reali perciò ha 3 radici reali opp. 1 radice reale e 2 complesse coniugate.

Ha almeno una radice reale, dunque f ha almeno un autovalore λ_1 pari a 1 o -1. Se v_1 è un autovettore di norma 1 corrispondente a λ, $\underbrace{\langle v_1 \rangle^{\perp}}_{W}$ ha dim 2 ed è invariante: $F(W) = W$.

Se v_2, v_3 è una base ortonormale di W, si ha $M_B(f)$, dove $B = (v_1, v_2, v_3)$ è del tipo:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A'}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

dove A' rappresenta $f|_W$ risp. a (v_2, v_3). Dunque $A' \in O(2)$.

Ora distinguiamo 2 casi:

1) $\det(f) = 1 = \det A$

Se $\lambda_1 = -1$, anche $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Se $\lambda_1 = 1$, anche $|A'| = 1$ e otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ → rotaz. attorno a una retta

2) $\det(f) = -1$; se $\lambda_1 = 1$, $\det A = -1$, e se $\lambda_1 = -1$, $\det A = 1$, e otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

riflessione risp. a un piano fisso: autospazio di autovalore 1

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ matrice unitaria complessa

vogliamo S matrice unitaria t.c.
$S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} = (\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha =$$

$$= x^2 - 2\cos\alpha\, x + 1 \quad , \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$$

${}_1x_2 = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$. La forma normale di A sarà $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$.

Calcoliamo gli autovettori:

$\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix}$$

ha det 0

$\sin\alpha\, x - i\sin\alpha\, y = 0$

$x - iy = 0 \Rightarrow x = 1, y = -i$ è una soluzione, normalizzo: $\frac{v}{\|v\|} = \frac{(1, -i)}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right) = v_1$

$\|v\| = \sqrt{1 + (-i)(i)}$

$\lambda_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad , \quad ix - y = 0, \; v_2 = \frac{(1, i)}{\sqrt{2}}$

$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \overline{v_1}$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è base ortonorm., $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$ {}^t\bar{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} $$

$$ {}^t\bar{S}S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

S è unitario.

Inoltre
$$ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + i\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{i\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{i\sin\alpha}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{i\cos\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{i\sin\alpha}{2} + \frac{i\sin\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{i\sin\alpha}{2} - \frac{i\sin\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} \\ \frac{\cos\alpha}{2} - i\frac{\sin\alpha}{2} + i\frac{\sin\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{i\sin\alpha}{2} - \frac{i\sin\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{2} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}. $$