Corso di GEOMETRIA
Simulazione prova scritta A.A. 2018/2019 - 11 gennaio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

(1) Si enunci il Teorema di Binet. Si dia la definizione di matrici simili. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di f nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Si trovi una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ che NON rappresenta f in alcuna base di $\mathbb{R}^2$.

(d) Si dica se f è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determinino una matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ ed una matrice M invertibile tale che $D = M^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M$.

(3) Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiane della retta di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $(0, 7, 1)$ e parallela alla retta di equazioni
$$\begin{cases} 3x + y + z &= 4 \\ 2x + y + z &= 4 \end{cases}$$

(4) Per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, si dimostri che per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale l'**uguaglianza del parallelogramma**:
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2),$$
e se ne dia un'interpretazione geometrica.