ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 12

Trieste, 10 gennaio 2019

Esercizio 1. (1) Data la matrice unitaria

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcolino la forma normale di A, una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

(2) Data la matrice unitaria

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcolino la forma normale di B, una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori di B e una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}BS$ sia diagonale.

(3) Sia $f : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'automorfismo definito da $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3, \ldots, f(e_{n-1}) = e_n, f(e_n) = e_1$ dove gli e_i rappresentano i vettori della base canonica. Trovare la matrice A di f rispetto alla base canonica (una matrice ortogonale e unitaria), gli autovalori di f e la forma normale unitaria (diagonale) di A.

Esercizio 2. Nell'esercizio 1 sono state calcolate la forma normale diagonale delle seguenti matrici considerate come matrici unitarie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli ora la forma normale di queste matrici considerate come matrici ortogonali.

Esercizio 3. (1) Siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano (cioè $f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subseteq \mathrm{Aut}_f(\lambda)$

(2) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teorema sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una

base ortonormale di V formata da autovettori comuni a f e g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente).

(Suggerimento: si consideri la restrizione $g : \mathrm{Aut}_f(\lambda) \to \mathrm{Aut}_f(\lambda)$ a ogni autospazio di f, che esiste per il punto precedente.)