Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 14 gennaio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

(1) Si dia la definizione di sistema lineare e di soluzione di un sistema lineare. Si enunci e si dimostri il Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determinino le dimensioni e delle basi di $\ker f$ e di $\mathrm{Im} f$.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$x_2 = 0.$$

Si determini una base del sottospazio $W + \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^3$.

(d) Si consideri il sistema lineare

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si dica se il sistema è compatibile e in caso affermativo si esprima la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- Si trovi una base ortonormale di autovettori.

- Si scriva la matrice diagonale D di L_B nella base di autovettori trovata.

(4) Si trovino delle equazioni cartesiana e parametriche del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, -1, 1)$ e contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 5x - y + z & = 1 \\ 2x - y + z & = 1 \end{cases} .$$

Si determinino, infine, delle equazioni parametriche per la retta $r' \subset H$ contenuta in H, passante per il punto Q e parallela ad r.