DEF.

- b def. pos. se $b(v,v) \geq 0 \ \forall v$ e $b(v,v) = 0$ solo se $v = 0$
- b def. neg. se $b(v,v) \leq 0 \ \forall v$ e $b(v,v) = 0$ solo se $v = 0$
- b semidef. pos. se $b(v,v) \geq 0 \ \forall v$ e $\exists\, v \neq 0$ t.c. $b(v,v) = 0$
- b semidef. neg. se $b(v,v) \leq 0 \ \forall v$ e $\exists\, v \neq 0$ t.c. $b(v,v) = 0$
- b indefinita se $\exists\, v \neq 0$ $b(v,v) > 0$ e $\exists\, w \neq 0$ t.c. $b(w,w) < 0$.

rango di b = rango della matrice di b

se $rg(b) < n \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ $b(v,v) = 0$:

~~...~~ infatti diagonalizzo e trovo 0 sulla diag. $\Rightarrow b(v_n, v_n) = 0$.

Lo spazio-tempo di Minkowski dim 4 ha un prod. scalare indefinito con segnatura $(3, 1, 0)$.

|| Una forma bilin. simm. è def. pos. $\iff$ tutti gli autovalori sono positivi

Dim. Sia A matrice di b risp. a una base di $L(A)$

1) def. pos.: sia $x_0 \neq 0$ un autovettore di autoval. λ, allora $L(A)x_0 = A x_0 = \lambda x_0$.

D'altra parte $b(x_0, x_0) = {}^t x_0 A x_0 = {}^t x_0 \lambda x_0 =$

$= \lambda \|x_0\|^2 > 0 \implies \lambda > 0$.

2) Vicev. se tutti gli autoval. sono > 0

$\exists$ base ortonorm. di autovettori di $L(A)$.

$\langle v, v \rangle = \sum a_i^2 \lambda_i > 0 \quad \forall\, v \neq 0$

Criterio di Cartesio

Sia $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio di grado n: $p(t) = a_d t^d + a_{d+1} t^{d+1} + \dots + a_n t^n$,

con $0 \leq d \leq n$, $a_d \neq 0$, $a_n \neq 0$.

Supp. che tutte le radici di p siano reali. Allora:

1) 0 è radice di $p \iff d \geq 1$, e $m_a(0) = d$;

2) p ha tante radici positive (contate con la relativa molt.) quanto sono le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p.

Oss. Il numero di radici negative non è il numero di permanenze, ma è

$n - (\#\text{ radici pos} + m_a(0))$.

|| Il criterio si applica al pol. caratteristico di una matrice simmetrica reale.

Esempio

$$A_c = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$p_{A_c}(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -4 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -4 & 0 & c-x \end{vmatrix} = -x^3 + (c+5)x^2 + $$
$$+ (13-5c)x + (3c-16)$$

$$(-1 \quad c+5 \quad 13-5c \quad 3c-16)$$

0 è radice $\iff 3c-16=0 \iff c = \frac{16}{3}$

e $m_a(0) = 1$ in tal caso. La seq. diventa:

$$\left(-1 \underset{\text{variaz.}}{\downarrow} \underset{>0}{5+\frac{16}{3}} \underset{\text{variaz.}}{\downarrow} \underset{<0}{13-5\frac{16}{3}}\right)$$

2 radici pos. e una nulla

Se $c \neq \frac{16}{3}, 0$ non è radice.

Se $c = -5$ la sequenza è $(-1, \underset{>0}{13+25}, 31)$

2 autoval pos. e uno negativo

Se c [illegible]

	-5		$\frac{13}{5}$		$\frac{16}{3}$		
$-$		$-$		$-$		$-$	-1
$-$	0	$+$		$+$		$+$	$c+5$
$+$		$+$	0	$-$		$-$	$13-5c$
$-$		$-$		$-$	0	$+$	$3c-16$
2 rad. pos.		2 rad. pos.		2 rad. pos.		3 rad. pos. $\Downarrow$ def. pos.	