Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2018-2019, sessione invernale, secondo appello

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \in (0, +\infty)$ e per $[t]$ la parte intera di t, caratterizzata da $[t] \in \mathbb{Z}$ e da $[t] \le t < [t] + 1$, si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log\left(\log\left(1 + e^{x^a} + 2x + x^a\right)\right) + x^{-a}}{\int_1^x \sin\left(\frac{1}{[t]}\right) dt + \log(x)}$$

In questo esercizio ho commesso un errore di stampa, perche doveva essere $x \to +\infty$.

Notare che per $x \to 0^+$ il limite non ha senso perche la funzione e' definita solo per $x \geq 1$. Infatti per $x \in (0,1)$ la funzione

$$\int_1^x \sin\left(\frac{1}{[t]}\right) dt = \int_1^x \sin\left(\frac{1}{0}\right) dt,$$

il che non ha alcun senso (nessuno se ne è accorto!)

Ho ignorato questo esercizio, ed ho assegnato 10 punti ciascuno ai restanti tre.

ESERCIZIO N. 2. Considerare l'equazione $z^4|z|^2 + z^2 + \frac{1}{|z|^2} = 0$:

3 punti
- scriverla sotto forma di sistema usando coordinate polari; posto $z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ ho

$$\begin{cases} r^6 \cos(4\vartheta) + r^2 \cos(2\vartheta) + \frac{1}{r^2} = 0 \\ r^6 \sin(4\vartheta) + r^2 \sin(2\vartheta) = 0 \iff r^2 \sin(2\vartheta)\left(2\cos(2\vartheta) r^4 + 1\right) = 0 \end{cases}$$

3 punti
- verificare che non ha soluzioni sugli assi delle coordinate;

gli assi corrispondono a $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Notare che $\sin(2\vartheta) = 0 \Rightarrow \cos(2\vartheta) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

prima equazione è $r^6 + r^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni $r \geq 0$

prima equazione diviene $r^6 - r^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni $r \geq 0$

4 punti
- trovare le soluzioni.

Non resta che cercare soluzioni con

$$\cos(2\vartheta) = -\frac{1}{2r^4}$$

Notare che $\cos(4\vartheta) = 2\cos^2(2\vartheta) - 1 = \frac{1}{2r^8} - 1$

Inserendo nella prima equazione ho

$$r^6 \cos(4\vartheta) + r^2 \cos(2\vartheta) + \frac{1}{r^2} =$$

$$= r^6\left(\frac{1}{2r^8} - 1\right) + r^2\left(-\frac{1}{2r^4}\right) + \frac{1}{r^2} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2r^2}} - r^6 - \cancel{\frac{1}{2r^2}} + \frac{1}{r^2} = 0 \iff r^8 = 1 \iff r = 1$$

$$\cos(2\vartheta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2\vartheta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nel caso + $\quad 2\vartheta = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad k = 0, 1$

Nel caso − $\quad 2\vartheta = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi + \pi k \quad k = 0, 1$

In totale sono 4 soluzioni

COGNOME e NOME Stampatello leggibile N. Matricola

ESERCIZIO N. 3. Per $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \to (x + x^3 + x^5)$ ed a una costante, si consideri

2 punti per ciascuna risposta corretta + 2 punti a tutti quelli che hanno scritto qualcosa

$$f_a(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+\tanh(x)} \frac{1}{g(t)}dt & \text{se } x < 0, \\ \displaystyle a + \int_0^x \frac{1}{t^3+t^2+t+1}dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{(t^2+1)(t+1)}$

- si determini a in modo che $f_a \in C^0(\mathbb{R})$

Abbiamo $g(0) = 0$ $\quad g'(0) = \frac{1}{(1+3x^2+5x^4)(0)} = 1$

$\Rightarrow g(t) = t\,(1+o(1))$;

Abbiamo $th(x) = x + o(x^2)$

$$f_a(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \int_x^{2x+o(x^2)} \frac{1}{t}(1+o(1)) = \lim_{x\to 0^-}\left(\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt + \int_{2x}^{2x+o(x^2)}\frac{1}{t}dt + \int_x^{2x+o(x^2)}\frac{o(1)}{t}dt\right)$$

$$= \lg 2 + 0 + 0 = \lg 2$$

$\Rightarrow \left(f \in C(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a = \lg 2\right)$

- si determini $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)$;

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow A = \frac{1}{t^2+1}\Big|_{t=1} = \frac{1}{2}$$

$B = -\frac{1}{2}$ (perché è integrabile) $\quad \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{2}t+C}{t^2+1} =$

$$= \frac{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+Ct+C}{(t+1)(t^2+1)} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{per } x \geq 0$$

- si determini $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)$;

$$f(x) = \frac{1}{2}\lg(x+1) - \frac{1}{4}\lg(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{artg}(x) \xrightarrow{x\to+\infty} a + \frac{\pi}{4}$$

Siccome $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'inversa di $x \to x + x^3 + x^5$ e quest'ultima è strettamente crescente, segue che anche g lo è e si deve avere $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Segue che per $x<0$

- si calcoli $f_a'(x)$

$$|f_a(x)| = \left|-\int_{x+thx}^{x} \frac{1}{g(t)}dt\right| \leq \int_{x+thx}^{x} \frac{1}{|g(t)|}dt \leq \int_{x+thx}^{x} \frac{1}{|g(x)|}dt$$

$$= \frac{-th(x)}{|g(x)|} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{1}{+\infty} = 0$$

$f_a'(x) = \frac{1}{x^3+x^2+x+1}$ per $x \geq 0$ e

$f_a'(x) = \left(1 + \frac{1}{ch^2(x)}\right)\frac{1}{g(x+th(x))} - \frac{1}{g(x)}$ per $x<0$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^6}\,dt$:

(i) calcolare il polinomio di McLaurin $p_{\cancel{7}\,6}(x)$ di $f(x)$ di ordine ~~7~~ 6;

$$\frac{1}{1+t+t^6} = \frac{1}{1+t}\;\frac{1}{1+\frac{t^6}{1+t}} = \frac{1}{1+t} - \frac{t^6}{(1+t)^2\left(1+\frac{t^6}{1+t}\right)} = \frac{1}{1+t} + o(t^5)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \frac{t^6}{1+t}$$

Segue $P_6(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$

(ii) valutare l'errore $|f(1) - p_{\cancel{7}\,6}(1)|$.

$$|f(1) - P_6(1)| \leq \int_0^1 \frac{t^6}{1+t} + \int_0^1 \frac{t^6}{(1+t)^2\left(1+\frac{t^6}{1+t}\right)}\,dt$$

$$\leq 2\int_0^1 t^6\,dt = \frac{2}{7}.$$