CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE - A
PROGRAMMA FINALE A.A. 2018/2019

Simboli matematici relativi agli insiemi. Esercizi di logica elementare. Numeri naturali, numeri interi, numeri razionali.

Numeri reali. Assiomi. Proprietà. La retta reale. Definizioni di intervallo (aperto, chiuso, semiaperto, semichiuso). Il valore assoluto di un numero reale.

Funzioni. Esempi di equazioni e disequazioni. Definizione di funzione. Campo di definizione o dominio di una funzione. Grafico. Immagine. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive.

Funzioni reali. Funzioni invertibili, linversa di una funzione. Funzioni reali crescenti, decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti. Costruzione della potenza x^a di un numero reale: con $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{N}$ oppure $a \in \mathbb{Z}$. Definizione di x^a con $x \in \mathbb{R}_+$ e $a \in \mathbb{Q}$. Proprietà delle potenze.

Funzioni trascendenti. Funzione esponenziale. Funzione logaritmo. Funzioni seno, coseno, tangente.

Inverse delle funzioni trigonometriche. Cenno sul numero di Eulero e. Funzione esponenziale e^x e sua inversa $\ln(x)$.

Introduzione all'algebra lineare. Sistemi lineari, matrici associate ad un sistema lineare. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Invarianza delle soluzioni di un sistema lineare. Introduzione al metodo di eliminazione di Gauss–Jordan.

Procedimento di riduzione di una matrice con operazioni elementari sulle righe. Metodo (del pivot) attraverso esempi. Forma di una matrice dopo aver applicato il metodo di Gauss-Jordan: conseguente risoluzione del sistema lineare associato.

Matrici quadrate. Operazioni con le matrici: prodotto di una matrice per uno scalare; prodotto righe per colonne. Il prodotto di matrici quadrate non è commutativo. Matrici quadrate invertibili. Risoluzione di un sistema lineare $AX = B$ quando A è una matrice quadrata invertibile. Calcolo della matrice inversa con le operazioni elementari applicate alla matrice $(A|I)$. Determinante di una matrice quadrata. Formula esplicita per matrici quadrate ordine 2 e 3 (e 1). Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo.

Vettori liberi e vettori applicati. Modulo (o intensità) di un vettore. Vettori nel piano e loro componenti. Il modulo di un vettore espresso attraverso le sue componenti. Somma di vettori: con la regola del parallelogramma e per mezzo delle componenti. Prodotto di un vettore per uno scalare e sue componenti. Cenno sulle corrispondenti operazioni indotte su $\mathbb{R}^2$.

Vettori liberi e applicati e loro componenti. Somma di due vettori nello spazio, prodotto di un vettore per uno scalare, modulo di un vettore: espressioni attraverso le componenti. Prodotto scalare di vettori come il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo tra essi compreso; sua espressione in funzione delle componenti dei vettori. Vettori ortogonali (nel piano e nello spazio).

Rette nel piano e nello spazio. Retta passante per un punto dato e con un dato vettore direzionale: equazione vettoriale. Equazione vettoriale di una retta passante per due punti dati. Casi particolari nel piano e nello spazio: equazione parametrica di retta. Nozione di rette parallele. Eliminazione del parametro nel caso piano: passaggio dall'equazione parametrica all'equazione cartesiana della retta. Condizioni di parallelismo e ortogonalità. Angolo tra rette piane.

Piani nello spazio reale, equazioni parametriche ed equazione cartesiana. Proprietà del determinante di una matrice quadrata.

Prodotto vettoriale. Passaggio da equazioni parametriche a quella cartesiana e viceversa. Parallelismo e ortogonalità tra piani nello spazio. Condizioni numeriche. Vettore normale a un piano. Piano passante per tre punti non allineati.

Rette nello spazio, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane. Rette incidenti, parallele, sghembe. Passaggio da equazioni parametriche a quelle cartesiane e viceversa.

Parallelismo e ortogonalità tra rette e piani nello spazio. Condizioni numeriche. Esempi ed esercizi. Proprietà del prodotto scalare. Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz. Angolo tra vettori nello spazio. Angolo tra rette e piani nello spazio.

Successioni di numeri reali. Successione di Fibonacci. Successioni definite per ricorrenza. Sezione aurea. Definizione di limite di una successione.

Determinazione del limite di una successione tramite la definizione. Teorema di unicità del limite. Successioni limitate. Una successione convergente è limitata. Non vale il viceversa: controesempi. Una successione monotona e limitata è convergente. Definizione del numero di Eulero (Nepero). Regole per il calcolo di limiti: limite di una somma, di una differenza, di un prodotto, di un quoziente, di una successione esponenziale, di una successione logaritmica.

Esponenziale e^c con c numero reale come limite della successione $(1 + c/n)^n$. Teorema del confronto per successioni.

Limiti di funzioni. Definizione di limite nelle varie accezioni: limite di una funzione (finito o infinito) quando la variabile tende ad un valore (finito o infinito). Limite destro e limite sinistro. Legame tra limite, e limite destro e limite sinistro.

Teoremi sui limiti di funzioni. Limiti della somma, del prodotto, del rapporto di funzioni. Forme indeterminate. Il teorema del confronto.

Funzioni continue. Funzioni continue in un punto interno ad un intervallo o in uno degli estremi dellintervallo. Funzioni continue in un intervallo. Somma, prodotto, rapporto di funzioni continue sono funzioni continue. Esempi di funzioni continue. Funzioni espresse con polinomi e con rapporti di polinomi sono continue. La funzione ottenuta componendo due funzioni continue è ancora continua. Le funzioni seno, coseno, logaritmo, esponenziale ed elevamento a potenza sono continue.

Limiti notevoli. Limite di $\sin(x)/x$. Esempi di calcolo di limiti di funzioni che si presentano con forme indeterminate.

Teoremi sulle funzioni continue. Il teorema degli zeri per funzioni continue (tale zero si può calcolare con lapprossimazione voluta usando il metodo di bisezione di Newton). Teorema dei valori intermedi. Massimi e minimi locali e globali per funzioni definite in un intervallo. Teorema di Weierstrass per le funzioni continue.