① $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale

Trovare la forma normale ortogonale, verificando che è una rotazione, trovare l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione.

Si ha: $\det(A) = 1$, $A \in SO(3)$

$\Rightarrow$ è una rotazione.

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3+1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$\Rightarrow$ unico autovalore $\lambda = 1$

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Aut(1) = \langle \underset{u_1}{\underset{\parallel}{(1,1,1)}} \rangle$$

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$v_1^\perp : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $\quad W = v_1^\perp = \langle \underset{u_2}{\underset{\parallel}{(-1,1,0)}}, \underset{u_3}{\underset{\parallel}{(-1,0,1)}} \rangle$

$$u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -e_1 - e_2 + 2e_3$$

$\Rightarrow$ $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, +\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

base ortonormale

Scriviamo $M_{(v_2,v_3)}(L(A)|_W)$:

$$A v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

$$A v_3 = A \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt2} = y \frac{2}{\sqrt6} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt6 \cdot 1}{\sqrt2 \cdot 2} = \cancel{2\sqrt6}\, \frac{\sqrt3}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt2} x + \cancel{2}\frac{\sqrt3}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt6}\right) = 0$$

$$x = -\frac{\cancel{2}\sqrt3\,\sqrt2}{2\sqrt6} = \cancel{2}\, -\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}$$

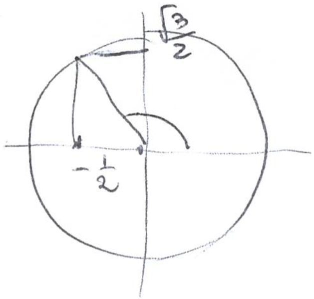
$$-\frac{1}{\sqrt6} = y' \frac{2}{\sqrt6} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{\cancel{\sqrt6}} \frac{\cancel{\sqrt6}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt6} = -\frac{x'}{\sqrt2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt6} \qquad x' = \sqrt2\left(\frac{1}{2\sqrt6} - \frac{2}{\sqrt6}\right) = \sqrt2\, \frac{1-4}{2\sqrt6} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\sqrt2}{\sqrt6} = -\frac{\sqrt3}{2}.$$

Quindi la forma normale trovata è:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$



$L(A)$ è la rotazione di $\frac{\pi}{3}$ intorno all'asse di rotazione $Aut(1) = \langle (1,1,1) \rangle$.

Si ha $A' = {}^tSAS$ con

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ (fare la verifica)

matrice ortogonale

VERIFICA:

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$${}^tSAS = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice ortogonale

Trovare la forma normale ortogonale.

$|A| = -1.$

$$|A - xE_4| = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) =$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

2 autovalori reali: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica e geometrica 1.

$Aut(1) = \langle (1,1,1,1) \rangle$

$Aut(-1) = \langle (1,-1,1,-1) \rangle$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$W = \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp} = \langle (-1,0,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

sono già ortogonali, basta normalizzarli:

$v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_4 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ortogonale

$$
{}^tSAS = {}^tS \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =
$$

$$
= {}^tS \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}
$$

$$
\downarrow
$$

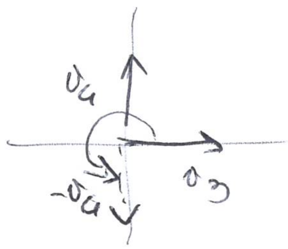
$$
\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
$$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi$

Rotazione di $\frac{3}{2}\pi$ nel piano $W = \langle v_3, v_4 \rangle$.
La retta $\langle v_1 \rangle$ è fissa, la retta $\langle v_2 \rangle$ è autospazio di autovalore -1.

$B v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -v_4$

$B v_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) = v_3$



(3)

SPAZIO BIDUALE

V spazio vettoriale, $\dim V = n$

$V^* = \{f : V \to K \mid f \text{ lineare}\}$ sp. vett. duale di V

$V^{**} = \{h : V^* \to K \mid h \text{ lineare}\}$ " " biduale di V

Allora $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$: sono tutti isomorfi.

Un isomorfismo tra V e V^* si può costruire a partire da una base di V: $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Si def. $v_i^* : V \to K$ ponendo $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ $\forall i,j$; $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ è una base di V^*, la base duale $\mathcal{B}^*$ di $\mathcal{B}$.

Allora $V \longrightarrow V^*$ unica appl. lineare t.c. $v_i \longrightarrow v_i^*$ è un isomorfismo

non canonico.

Invece V e V^{**} sono canonicamente isomorfi. Infatti si può definire un'applicazione

$$\tau : V \longrightarrow V^{**},$$
$$v \longrightarrow \tau_v$$

dove $\tau_v : V^* \longrightarrow K$ è definita ponendo

$\tau_v(f) = f(v)$ $\forall f \in V^*$.

- τ_v è un'appl. lineare:

$\tau_v(f+g)$ ~~è l'app~~

$$\tau_v(f+g) = (f+g)(v) \underset{\text{def. di } f+g}{=} f(v)+g(v) = \tau_v(f)+\tau_v(g)$$

$$\tau_v(\lambda f) = (\lambda f)(v) \underset{\text{def. di } \lambda f}{=} \lambda f(v) = \lambda \tau_v(f).$$

- τ è un'appl. lineare:

$\tau(v+v')$ è l'appl. lineare t.c. $\forall f \in V^*$

$$\tau(v+v')(f) \overset{\text{def. di } \tau}{=} \tau_{v+v'}(f) = f(v+v')$$

$\tau(v)+\tau(v')$ è l'appl. lineare t.c. $\forall f \in V^*$

$$(\tau(v)+\tau(v'))(f) \underset{\substack{\text{def. di somma} \\ \text{di appl. lin.}}}{=} \tau(v)(f)+\tau(v')(f) = \tau_v(f)+\tau_{v'}(f)$$

$$= f(v)+f(v') \overset{f \text{ lineare}}{=} f(v+v')$$

Allora $\tau(v+v') = \tau(v)+\tau(v')$ perché operano nello stesso modo su ogni $f \in V^*$.

$\tau(\lambda v)$ ~~è~~ t.c. $\tau(\lambda v)(f) = \tau_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) \overset{f \text{ lin.}}{=} \lambda f(v) = \lambda \tau_v(f) \Rightarrow \tau(\lambda v) = \lambda \tau_v.$

- τ è iniettiva.

$\ker \tau = \{ v \in V \mid \tau_v = 0 \} = \{ v \in V \mid \forall f \in V^*$
$\tau_v(f) = 0 = f(v) \} = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \ \forall f \in V^* \}.$

Se $v \neq 0$, $\exists$ applicazioni lineari f t.c.
$f(v) \neq 0$. Per esempio, se fisso $\mathcal{B}$
base di V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
$v \neq 0 \Rightarrow \exists\, x_i \neq 0$. Allora $v_i^*(v) = x_i \neq 0$
e $v_i^* \in V^*$.
Dunque se $v \in \ker \tau \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \tau$ è
iniettiva.
Essendo $\tau : V \longrightarrow V^{**}$ iniettiva
tra spazi vettoriali della stessa dim,
τ è un isomorfismo.

④

Esercizio.

$f: V \to V$ endomorfismo nilpotente

cioè t.c. $\exists k \geq 1$ per cui $f^k = 0$,

dove $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k}$.

Dim. che ogni autovalore di f è nullo.

Sia λ un autovalore di f.

Allora $\exists\, v \in V, v \neq 0$, t.c. $f(v) = \lambda v$.

Allora $f(f(v)) = f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) =$
$= \lambda^2 v$.

Iterando si ha $f^k(v) = \lambda^k v$; ma $f^k = 0$

dunque $\lambda^k v = 0$. Perciò $\lambda^k = 0$ perché $v \neq 0$.

$$\lambda \in K, \ \underset{\lambda(\lambda^{k-1})}{\overset{\parallel}{\lambda^k}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{opp.} \\ \lambda^{k-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^{k-2} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad - - - -$$

segue che $\lambda = 0$.

(5) V spazio vettoriale unitario

$f, g : V \to V$ endomorfismi autoaggiunti

Se f, g commutano, allora $f \circ g = g \circ f$ è autoaggiunto.

Infatti, $\forall\, v, w \in V$ si ha

$$\langle f\circ g(v), w \rangle \underset{f \text{ autoagg.}}{=} \langle g(v), f(w) \rangle \underset{g \text{ autoagg.}}{=} \langle v, g(f(w)) \rangle =$$

$$\underset{f \text{ e } g \text{ commutano}}{=} \langle v, f(g(w)) \rangle = \langle v, (f\circ g)(w) \rangle .$$