PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 – A.A. 2017/18
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Trieste, 9 luglio 2018.

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Dimostrare che esiste una e una sola proiettività F di $\mathbb{P}^1$ in sé tale che $A[2,3]$ viene mandato in $E_0[1,0]$, $B[1,2]$ in $E_1[0,1]$ e $C[1,1]$ in sé. Scrivere equazioni di F e di F^{-1}. Determinare il corrispondente in F del punto $D[2,5]$.

2. Nello spazio affine euclideo E^3 dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, scrivere equazioni per il luogo dei punti appartenenti al piano di equazione $y - z + 2 = 0$ e aventi uguale distanza dai punti $A(1,0,-1))$ e $B(2,1,-1)$. Descrivere geometricamente l'insieme trovato.

3. a)Verificare che c'è un solo valore di k, parametro reale, per cui esistono affinità del piano euclideo reale E^2 in sé che trasformano le rette $r : x+y+1 = 0$ e $s : x + y + 2 = 0$ rispettivamente nelle rette $r' : x' - 2y' + 7 = 0$ ed $s' : 3x' + ky' - 5k = 0$.
b) Scrivere equazioni di una di tali affinità.
c) Fra le affinità di cui al punto a) vi sono delle isometrie?

4. Si consideri la quadrica affine $Q \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione:
$x_1^2 - x_3^2 + 2x_2 - 4x_1 = 0$.
- si determini il tipo affine di Q;
- si scriva un'equazione della chiusura proiettiva $\bar{Q} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$;
- si determini la conica impropria Q_∞ ottenuta intersecando $\bar{Q}$ con il piano improprio $x_0 = 0$ e il suo tipo proiettivo;
- si determini un piano proiettivo H di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tale che $\bar{Q} \cap H$ sia una conica proiettiva non degenere.