PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 – A.A. 2017/18
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Trieste, 5 settembre 2018.

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Nel piano euclideo in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, determinare le equazioni delle due rette passanti per il punto $P(-1,2)$ e formanti con l'asse x un angolo convesso $\theta = \frac{\pi}{3}$. Determinare poi i due angoli convessi fra le due rette ottenute.

2. Nello spazio affine di dimensione 5 $\mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$, determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini S, T in ciascuno dei quattro casi seguenti:

(i) $S \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad T \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

(ii) $S \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad T \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

(iii) $S \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \quad T \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

(iv) $S \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}, \quad T \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_4 = 5 \end{cases}.$

3. Sia f un'affinità di uno spazio affine A.
(i) Dimostrare che se f fissa due punti distinti P, Q allora f fissa tutti i punti della retta passante per P e Q.
(ii) In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è data la retta r di equazione $x + y = 1$. Determinare l'equazione di ogni affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che fissa tutti i punti di r. (Suggerimento: usare il punto (i).)
(iii) Fra le affinità trovate in (ii), determinare eventuali traslazioni.

4. Si consideri la conica affine $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x - 9y = 0.$$

- si determini il tipo affine di C, in particolare si determini se C è a centro;
- si scriva un'equazione della chiusura proiettiva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$;
- si determinino i punti impropri C_∞ di $\bar{C}$;
- si scriva un'equazione del tipo $f(x,y,z) = 0$ di una quadrica affine $Q \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tale che l'intersezione con il piano $z = 0$ sia la conica C del primo punto.