PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 – A.A. 2017/18
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Trieste, 7 febbraio 2019

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad , \quad s \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

(i) Verificare che r e s sono sghembe.
(ii) Dimostrare che, dato un punto Q non appartenente a r nè a s, esiste una e una sola retta q passante per Q e complanare sia con r che con s.
(iii) Nel caso $Q(0, 2, 1)$, determinare equazioni parametriche e cartesiane di tale retta q, e determinare le posizioni reciproche di q con s e con r.

2. Si consideri il piano euclideo con un sistema di riferimento cartesiano.
(i) Scrivere equazioni della rotazione σ di centro $P_0(1, 1)$ e angolo $\theta = \pi/3$.
(ii) Scrivere equazioni della riflessione ρ_r, dove r è la retta di equazione

$$x - y = 0.$$

(iii) Posto $\varphi = \sigma \circ \rho_r$, scrivere equazioni dell'isometria φ e descriverla geometricamente.

3. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^5_{\mathbb{C}}$ e la sua immersione naturale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$. Sia S il sottospazio affine di $\mathbb{A}^5_{\mathbb{C}}$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_5 + 2 = 0, \end{cases}$$

e sia $\bar{S}$ la sua chiusura proiettiva. Qual è la dimensione di S? Scrivere equazioni cartesiane per $\bar{S}$. Verificare che i suoi punti impropri formano una retta proiettiva L (sottospazio proiettivo di dimensione 1), e trovare due punti di L.

4. Si consideri la conica euclidea $C \subset \mathbb{E}^2$ di equazione:

$$7x^2 + 4y^2 + 8xy - 4x - 2y = 0.$$

(a) Si determini il tipo di C e un'equazione canonica di C; nel caso che C sia una conica a centro, si determinino le coordinate del centro di simmetria di C;
(b) si scriva un'equazione della retta tangente a C nel punto $(0, 0)$;
(c) si determini un' equazione per la chiusura proiettiva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ di C e si determinino i suoi punti impropri.