Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2018-2019, sessione invernale, terzo appello

COGNOME STAMPATELLO NOME LEGGIBILE

N. Matricola ______ Anno di corso ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. (8 punti) Al variare di $a \in (0, +\infty)$ e per $[t]$ la parte intera di t, caratterizzata da $[t] \in \mathbb{Z}$ e da $[t] \leq t < [t] + 1$, si calcoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\log\left(6 + 2e^{x^a} + 2x^5 + x^a\right)\right) + 5x^{-a}}{\int_1^x \tanh\left(\frac{\pi}{[t]}\right) dt + \arctan(x)}$$

numeratore $= \lg\left(\lg\left(e^{x^a}\left(2 + 6e^{-x^a} + 2x^5 e^{-x^a} + x^a e^{-x^a}\right)\right)\right) + o(1)$

$= \lg\left(x^a + \lg(2 + o(1))\right) + o(1) =$

$= \lg\left(x^a(1 + o(1))\right) + o(1) = a \lg(x) + o(1)$

denominatore $= \int_1^x \frac{\pi}{t} dt + \int_1^x \pi\left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_1^x \left(\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{[t]}\right) - \frac{\pi}{[t]}\right) + \frac{\pi}{2} + o(1)$

Notare che $0 \leq \frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} = \frac{t - [t]}{t[t]} \leq \frac{1}{t[t]}$ con quest'ultimo integrabile e quindi integrabile per confronto in $[1, +\infty)$

Da $\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{[t]}\right) - \frac{\pi}{[t]} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ per $t \to +\infty$ anche questa è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a \lg(x) + o(1)}{\pi \lg x + \int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_1^\infty \left(\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{[t]}\right) - \frac{\pi}{[t]}\right) dt + \frac{\pi}{2} + o(1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\pi}(1 + o(1)) = \frac{a}{\pi}$$

ESERCIZIO N. 2. Considerare l'equazione $z^2|z|^2 + z|z| + 1 = 0$:

- (2 punti) verificare che non ha soluzioni sugli assi delle coordinate;

Su asse x $\quad x^4+x^2+1=0$ non ha soluzioni reali. Su asse y

$-y^4+iy^2+1=0$ richiederebbe $\begin{cases} y^4=1 \\ y=0 \end{cases}$, non ha soluzioni

- (2 punti) scriverla sotto forma di sistema usando coordinate polari;

$$\begin{cases} r^4\cos(2\vartheta) + r^2\cos(\vartheta) + 1 = 0 \\ r^4\sin(2\vartheta) + r^2\sin(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

- (4 punti) trovare le soluzioni.

Dalla 2° equazione ricaviamo

$$r^2\sin(\vartheta)\left(2r^2\cos(\vartheta)+1\right)=0$$

Non ci sono soluzioni del sistema per $r=0$ o per $\sin(\vartheta)=0$

Quindi consideriamo $\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2r^2}$

$$\Rightarrow \cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1 = 2\left(-\frac{1}{2r^2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2r^4} - 1$$

sostituendo nella 1° equazione

$$0 = r^4\left(\frac{1}{2r^4}-1\right) + r^2\left(-\frac{1}{2r^2}\right) + 1$$

$$0 = \cancel{\frac{1}{2}} - r^4 - \cancel{\frac{1}{2}} + 1 \iff r^4 = 1 \iff \boxed{r=1}$$

$$\Rightarrow \cos(\vartheta) = -\frac{1}{2} \quad \text{e cioè} \quad \sin(\vartheta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{4}{3}\pi$$

COGNOME e NOME STAMPATELLO LEGGIBILE **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Per $[t]$ la parte intera di t, caratterizzata da $[t] \in \mathbb{Z}$ e da $[t] \leq t < [t]+1$, si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2+1)(t+1)}dt & \text{se } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{[t]}{(1-[t])^2}dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- (2 punti) si determini $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

$\frac{t}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t+1}$ $\quad C = \frac{t}{t^2+1}\Big|_{t=-1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ allora imponendo ottengo $\frac{(B+\frac{1}{2})t + B - \frac{1}{2}}{(t^2+1)(t+1)} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\int_0^x \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2+1} = \lg \frac{\sqrt[4]{t^2+1}}{\sqrt{t+1}}\Big]_0^x + \frac{1}{2}\operatorname{artg} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$

- (2 punti) si determini $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

$-\int_x^0 \frac{[t]}{([t]-1)^2} dt = \int_x^0 \frac{|[t]|}{([t]-1)^2} dt \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$ ~~per~~ confronto asintotico con $\frac{1}{|t|}$

- (2 punti) si determini $f(-2)$;

$-\int_{-2}^0 \frac{[t]}{([t]-1)^2} dt = -\int_{-2}^{-1} \frac{-2}{(-2-1)^2}dt - \int_{-1}^0 \frac{-1}{(-1-1)^2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{4}$

- (2 punti) si calcoli $f'(x)$ dove é definita, ed altrimenti si calcoli $f'_s(x)$ e $f'_s(x)$;

Per $x>0$ $\quad f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}$ ed $f'_d(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$

Per $x<0$ non intero $f'(x) = \frac{[x]}{(1-[x])^2}$ mentre per $x<0$ intero

$f'_d(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ e $f'_s(x) = \frac{x-1}{(2-x)^2}$. Infine $f'_s(0) = \frac{-1}{4}$

- (2 punti) si discuta concavitá e convessitá di f. in $[0,\infty)$

Per $x>0$ $\quad f''(x) = \frac{(x^2+1)(x+1) - x(3x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2(x+1)^2} = \frac{(x^3+x^2+x+1)-(3x^3+2x^2+x)}{(x^2+1)^2(x+1)^2}$

$= -\frac{2x^3+x^2-1}{(x^2+1)^2(x+1)^2}$ $\quad$ Notare che $g(x) \overset{def}{=} -(2x^3+x^2-1)$ e'

$g(0) = 1$, $g(x)$ decrescente per $x>0$

infatti $g'(x) = -(6x^2+2x) \leq 0$ per $x\geq 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Allora

esiste $x_0 > 0$ con $g(x_0) = 0$. Pertanto f convessa in

$[0, x_0]$ e concava in $[x_0, +\infty)$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1+t}{1+t+t^2} dt$:

(*i*) (4 punti) calcolare il polinomio di McLaurin $p_4(x)$ di $f(x)$ di ordine 4;

$$\frac{1+t}{1+(t+t^2)} = (1+t)\left(1-(t+t^2)+(t+t^2)^2-(t+t^2)^3 + \frac{(t+t^3)^4}{1+(t+t^2)}\right) =$$

$$= (1+t)\left(1-t-\cancel{t^2}+\cancel{t^2}+2t^3+t^4-t-3t^4-3t^5-t^6+\frac{(t+t^3)^4}{1+(t+t^2)}\right)$$

$$=(1+t)\left(1-2t+2t^3 \underbrace{\cancel{+2}t^4-3t^5-t^6+\frac{(t+t^3)^4}{1+(t+t^2)}}_{o_1(t^3)}\right)$$

$$= 1-2t+2t^3+t-2t^2+\underbrace{2t^4+(1+t)\,o_1(t^3)}_{o_2(t^3)} =$$

$$= 1-t-2t^2+2t^3+o_2(t^3)$$

$$f(x) = f(0)+x-\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+o(x^4) \quad \text{con} \quad f(0)=\int_{-1}^{0}\frac{1+t}{1+t+t^2}dt$$

(*ii*) (2 punti) valutare l'errore $|f(1) - p_4(1)|$.

$$\left.|o(x^4)|\right|_{x=1} = \left|\int_0^1 \left(2t^4+(1+t)\,o_1(t^3)\right)dt\right| \le \frac{2}{5}+\int_0^1 2\,|o_1(t^3)|\,dt$$

$$\le \frac{2}{5}+2\int_0^1 (2t^4+3t^5+t^6+2^4t^4)\,dt$$

$$= \frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}+\frac{2}{7}+\frac{2^5}{5}$$ è una stima

rigorosa possibile