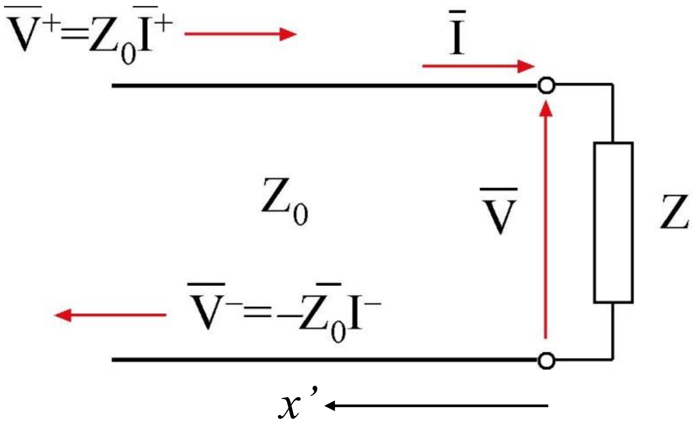
CIRCUITI A MICROONDE

Parte 2

MATRICE di DIFFUSIONE

Esempio: bipolo connesso a linea di trasmissione



Parametro ⇨ coeff. di riflessione

$$\boxed{\rho = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}}$$

grandezze ⇨ onde progressive, incidente e riflessa

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{V}^- &= \rho \overline{V}^+ \\ \overline{I}^- &= -\rho \overline{I}^+ \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \overline{V} &= \overline{V}^+ + \overline{V}^- \\ \overline{I} &= \overline{I}^+ + \overline{I}^- \end{aligned}}$$

Vantaggio: lungo la linea ρ varia con legge semplice:

$$\rho(x') = \rho(0) e^{-2\Gamma x'} \Rightarrow \rho(x') = \rho(0) e^{-2 j\beta x'}$$ (linea senza perdite)

Normalizzazione

Ipotesi: linea senza perdite

Normalizzazione di *impedenze, ammettenze, tensioni* e *correnti*

Impedenze ed ammettenze

$$z = \frac{Z}{Z_0} \qquad y = \frac{Y}{Y_0}$$

tensioni e correnti

$$\begin{cases} v = \dfrac{\bar{V}}{\sqrt{Z_0}} \qquad i = \bar{I}\sqrt{Z_0} \\ a = \dfrac{\bar{V}^+}{\sqrt{Z_0}} = \bar{I}^+\sqrt{Z_0} \\ b = \dfrac{\bar{V}^-}{\sqrt{Z_0}} = -\bar{I}^-\sqrt{Z_0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} v = z\,i & i = y\,v \\ \rho = \dfrac{z-1}{z+1} & b = \rho\,a \\ v = a+b & i = a-b \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right\}$$ Intensità d'onda, *incidente e riflessa* [*volt x ohm*$^{-1/2}$]

Potenza attiva lungo la linea:

differenza tra potenze trasportate da onda incidente e riflessa

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\overline{V}^+ + \overline{V}^-\right)\left(\overline{I}^+ + \overline{I}^-\right)^*\right] =$$

$$= \frac{\left|\overline{V}^+\right|^2}{2\,Z_0} - \frac{\left|\overline{V}^-\right|^2}{2\,Z_0} = \frac{|a|^2}{2} - \frac{|b|^2}{2} = \frac{|a|^2}{2}\left(1 - |\rho|^2\right)$$

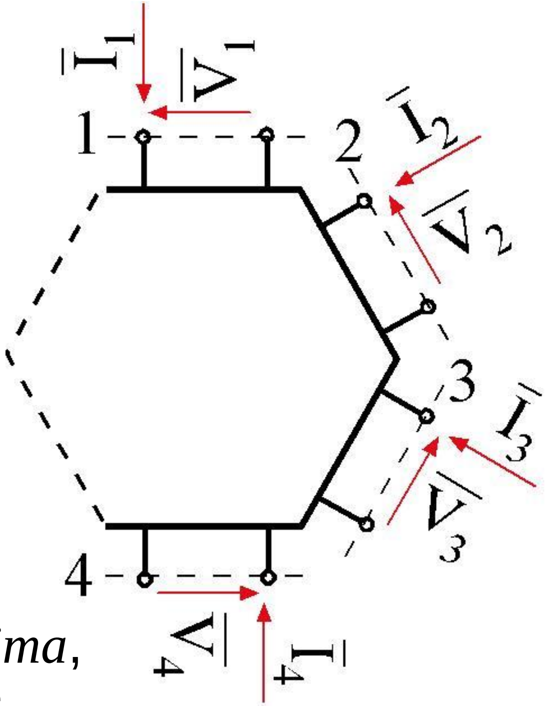
Multipolo lineare

Multipolo lineare, passivo con n coppie di morsetti

Descrizione con matrice
di impedenze Z
o di ammettenze Y

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V}$$



$$\mathbf{V} = \left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3, \ldots, \overline{V}_n\right)^T$$

$$\mathbf{I} = \left(\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3, \ldots, \overline{I}_n\right)^T$$

$Z_{hh} =$ Impedenza vista alla porta h - *esima*, quando tutte le altre sono aperte

$Z_{ij} = \dfrac{\overline{V}_i}{\overline{I}_j}$ con tutte le porte aperte, tranne la j - *esima*

Multipolo lineare

Ipotesi

Carichi o generatori connessi al multipolo tramite linee senza perdite, di impedenza caratteristica Z_{0k}

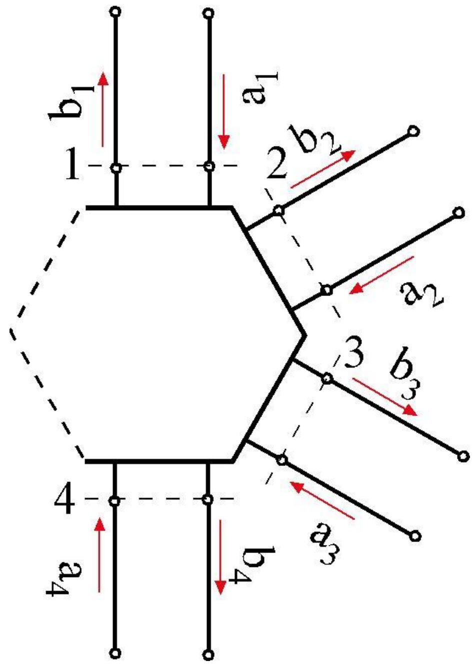
$$\mathbf{v} = \left(\frac{\overline{V}_1}{\sqrt{Z_{01}}}, \frac{\overline{V}_2}{\sqrt{Z_{02}}}, \dots, \frac{\overline{V}_n}{\sqrt{Z_{0n}}} \right) \qquad \mathbf{i} = \left(\sqrt{Z_{01}}\,\overline{I}_1, \sqrt{Z_{02}}\,\overline{I}_2, \dots, \sqrt{Z_{0n}}\,\overline{I}_n \right)$$

Sia: $$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{01}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{02}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{Z_{0n}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{z} \quad \left(z_{hk} = \frac{Z_{hk}}{\sqrt{Z_{0h}}\sqrt{Z_{0k}}} \right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{V} = \mathbf{n}\,\mathbf{v} \\ \mathbf{I} = \mathbf{n}^{-1}\mathbf{i} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{n}\,\mathbf{v} = \mathbf{Z}\,\mathbf{n}^{-1}\mathbf{i} \quad \Rightarrow \mathbf{v} = \boxed{\mathbf{n}^{-1}\mathbf{Z}\,\mathbf{n}^{-1}}\mathbf{i} \quad \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}$$

Per ogni tensione e corrente normalizzata $\mathbf{v}_i$ $\mathbf{i}_i$



$$\mathrm{v}_i = \mathrm{a}_i + \mathrm{b}_i \qquad \mathrm{i}_i = \mathrm{a}_i - \mathrm{b}_i$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad \mathbf{i} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{z}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{z}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} + \mathbf{z}\,\mathbf{b} = \mathbf{z}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}$$

Posto $\mathbf{e}$ = matrice unità di ordine *n:*

$$(\mathbf{e} + \mathbf{z})\mathbf{b} = (\mathbf{z} - \mathbf{e})\mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{b} = (\mathbf{z} + \mathbf{e})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{e})\mathbf{a}$$

$$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{s}\,\mathbf{a}}$$

S si chiama matrice di diffusione

$$\mathbf{s} = \left(\mathbf{z} + \mathbf{e}\right)^{-1}\left(\mathbf{z} - \mathbf{e}\right) = \left(\mathbf{e} + \mathbf{y}\right)^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{y}\right)$$

Con procedimenti analoghi si ottengono le relazioni fra le matrici z e s e y e s

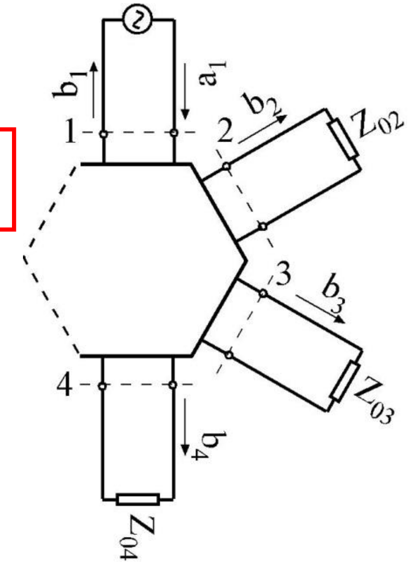
$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{s})\ (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{s})^{-1}$$
$$\boldsymbol{y} = (e - \boldsymbol{s})\ (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{s})^{-1}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}\,\mathbf{a}$$

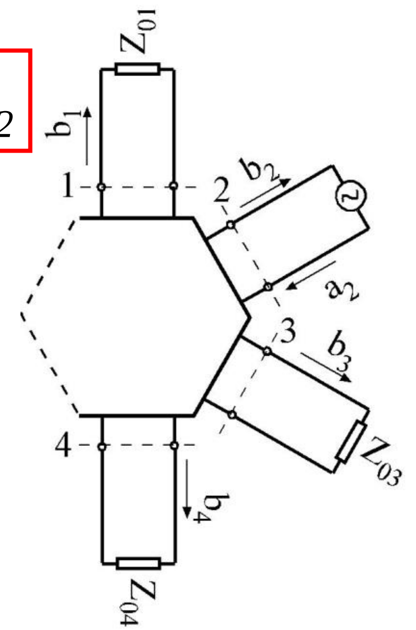
Significato degli elementi di $\mathbf{s}$

$$\begin{cases} b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + \ldots + s_{1n}a_n \\ b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + \ldots + s_{2n}a_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ b_n = s_{n1}a_1 + s_{n2}a_2 + \ldots + s_{nn}a_n \end{cases}$$

$\boxed{s_{11}}$



$\boxed{s_{12}}$



$$s_{kk} = \left.\frac{b_k}{a_k}\right|_{a_i=0, i\neq k} \Rightarrow$$ **coeff. di riflessione alla porta** k-*esima*, **con tutte le altre porte chiuse su carico adattato**

$$s_{hk} = \left.\frac{b_h}{a_k}\right|_{a_i=0, i\neq k} \Rightarrow$$ **Rapporto tra l'intensità d'onda uscente dalla porta** $h-esima$ **e quella entrante nella porta** $k-esima$, **con tutte le porte adattate, tranne la** k - *esima*

Proprietà della matrice di diffusione

Potenza entrante nel multipolo: $$P_i = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \mathrm{a}_h^* \mathrm{a}_h = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{a}$$

Potenza uscente dal multipolo: $$P_u = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \mathrm{b}_h^* \mathrm{b}_h = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{b}}^*\mathbf{b}$$

1) Assenza di perdite (*proprietà per* s)

Multipolo privo di componenti dissipativi per cui per la conservazione dell'energia la Potenza entrante è uguale a quella uscente

$$P_i - P_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{a}}^*\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{b}}^*\mathbf{b} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^*\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}^*\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\,\mathbf{a} \qquad \tilde{\mathbf{a}}^*\left(\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right)\mathbf{a} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s} = \mathbf{0}}$$

$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}$ **trasposta**

$\mathbf{h}^* =$ **coniugata**

$\tilde{\mathbf{h}}^* =$ **trasposta coniug.**

$\mathbf{e} =$ **matrice unità**

1) Assenza di perdite (*proprietà per* $\mathbf{z}$)

Potenza entrante nel multipolo: $$P_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{h=1}^{n} \mathrm{v}_h \mathrm{i}_h^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\mathbf{v}}\,\mathbf{i}^*\right\} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{v}}\,\mathbf{i}^* = \widetilde{\mathbf{z}\,\mathbf{i}}\,\mathbf{i}^* = \tilde{\mathbf{i}}\,\tilde{\mathbf{z}}\,\mathbf{i}^*$$

$$\mathrm{Re}\left\{\tilde{\mathbf{v}}\,\mathbf{i}^*\right\} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{i}}\,\tilde{\mathbf{z}}\,\mathbf{i}^* + \tilde{\mathbf{i}}^*\,\tilde{\mathbf{z}}^*\,\mathbf{i}\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{i}}\,\tilde{\mathbf{z}}\,\mathbf{i}^* + \widetilde{\tilde{\mathbf{i}}^*\,\tilde{\mathbf{z}}^*\,\mathbf{i}}\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathbf{i}}\,\tilde{\mathbf{z}}\,\mathbf{i}^* + \tilde{\mathbf{i}}\,\mathbf{z}^*\,\mathbf{i}^*\right]$$

$$P_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{\mathbf{v}}\,\mathbf{i}^*\right\} = \frac{1}{4}\,\tilde{\mathbf{i}}\left(\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}^*\right)\mathbf{i}^* = 0 \qquad \forall \mathbf{i}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}^* = 0}$$

2) Perdite in Multipolo reale

Presenta sempre dissipazione di potenza

$$\tilde{\mathbf{a}}^*\left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right)\mathbf{a} > 0$$

Implicazione:

$$\det\left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right) > 0$$

$$\det\left(\mathbf{Q}_p\right) > 0$$

$\left(\mathbf{Q}_p\right) =$ qualsiasi minore principale di $\left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right)$

3) $s_{hk} = 0 \quad per \quad h = 1,2,\ldots n, \; \left(h \neq k\right)$

porta *k-esima* **disaccoppiata** da tutte le altre

4) Reciprocità

Il multipolo è reciproco se

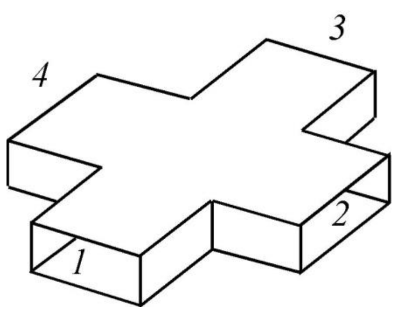
$$\boxed{s_{hk} = s_{kh}}$$

5) Simmetria

a) Simmetria totale: tutte le coppie di morsetti sono equivalenti e intercambiabili

$$s_{kk} = a \qquad s_{12} = s_{23} = s_{34} = s_{41} = b$$

$$s_{13} = s_{24} = c$$



b) Simmetria parziale solo per uno o più gruppi di morsetti

6) Completo adattamento

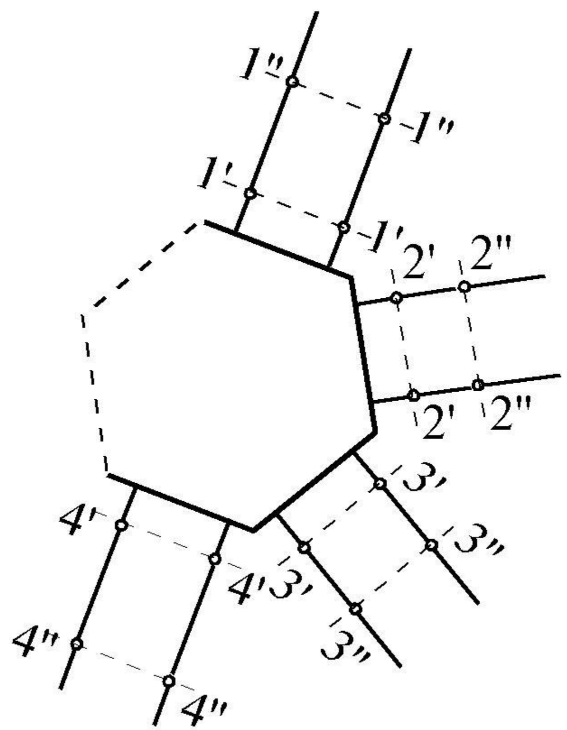
$$s_{hh} = 0 \qquad \forall h$$

Spostamento sezioni di riferimento

$\mathbf{S}' =$ Matrice di diffusione del multipolo individuato dalle coppie di morsetti $i' - i'$

$\mathbf{S}'' =$ Matrice di diffusione del multipolo individuato dalle coppie di morsetti $i'' - i''$

$l_i =$ Lunghezza tratto $i' - i'$ e $i'' - i''$, positiva se $i'' - i''$ è più lontana dal multipolo



Per la coppia $i'' - i''$: $\begin{cases} \mathrm{a}_i'' = \mathrm{a}_i' \, e^{j\beta_i l_i} \\ \mathrm{b}_i'' = \mathrm{b}_i' \, e^{-j\beta_i l_i} \end{cases}$

Spostamento sezioni di riferimento

In generale, per i vettori **a** e **b**:

$$\begin{cases} \mathbf{a}'' = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\mathbf{a}' \\ \mathbf{b}'' = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{b}' \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{vmatrix} e^{-j\beta_1 l_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_2 l_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & e^{-j\beta_n l_n} \end{vmatrix}$$

Da: $\mathbf{b}' = \mathbf{s}'\mathbf{a}' = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\mathbf{b}'' = \mathbf{s}'\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{a}'' \Longrightarrow \mathbf{b}'' = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{s}'\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{a}''$

Pertanto: $\boxed{\mathbf{s}'' = \boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{s}'\boldsymbol{\varphi}}$