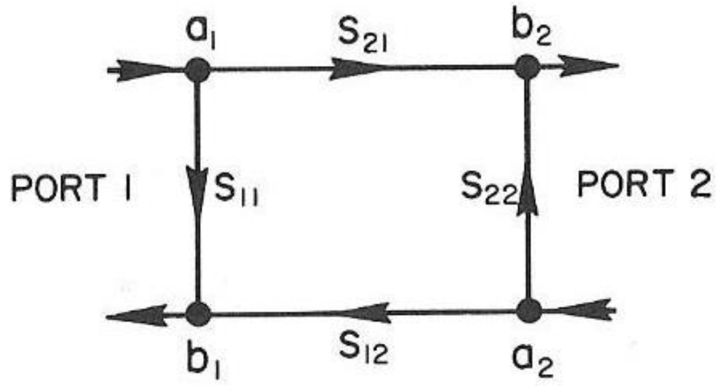
CIRCUITI A MICROONDE

Parte 3

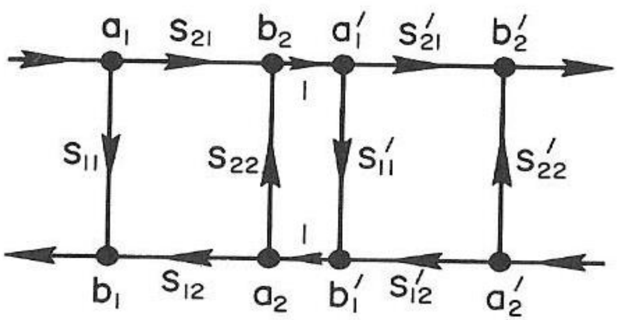
Le Giunzioni a Due Bocche

Prof E. Valentinuzzi

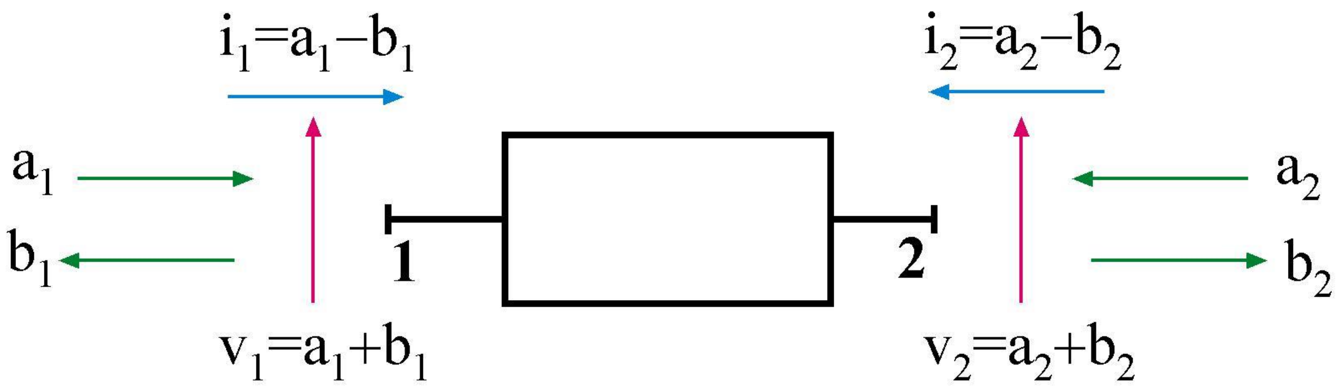
Per analizzare il flusso di energia di una rete a due porte si può utilizzare una rappresentazione della rete a mezzo di **grafi di flusso** che fanno riferimento ai parametri della matrice di diffusione S



Per rappresentare due reti a due porte in cascata bisogna rispettare i versi delle connessioni se si vuole che b_2 e a_1' rappresentino lo stesso nodo



Giunzioni a due bocche



Descrizione tramite matrici di

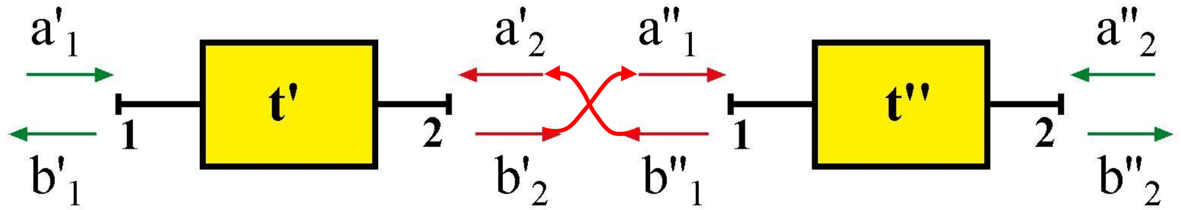
- **Impedenza** $\mathbf{v} = \mathbf{z}\,\mathbf{i}$
- **Ammettenza** $\mathbf{i} = \mathbf{y}\,\mathbf{v}$
- **Diffusione** $\mathbf{b} = \mathbf{s}\,\mathbf{a}$

ma anche

Matrice di trasmissione $\begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix} = \mathbf{t} \begin{vmatrix} b_2 \\ a_2 \end{vmatrix}$

Matrice catena $\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \mathbf{c} \begin{vmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{vmatrix}$

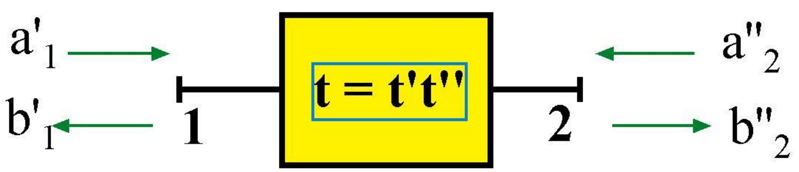
Proprietà della matrice di *trasmissione*



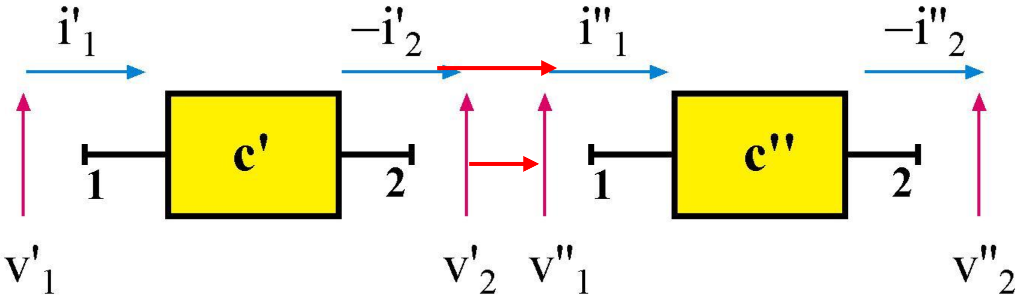
Due giunzioni connesse in cascata:

$$\begin{cases} b'_2 = a''_1 \\ a'_2 = b''_1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{vmatrix} = \mathbf{t}' \begin{vmatrix} b'_2 \\ a'_2 \end{vmatrix} \quad = \mathbf{t}' \begin{vmatrix} a''_1 \\ b''_1 \end{vmatrix} \quad = \mathbf{t}'\,\mathbf{t}'' \begin{vmatrix} b''_2 \\ a''_2 \end{vmatrix}$$



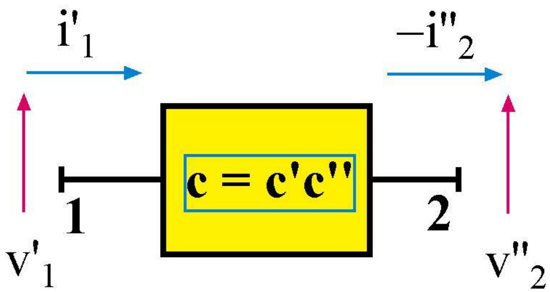
Proprietà della matrice *catena*



Due giunzioni connesse in cascata:

$$\begin{cases} v_2' = v_1'' \\ -i_2' = i_1'' \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} v_1' \\ i_1' \end{vmatrix} = \mathbf{c}' \begin{vmatrix} v_2' \\ -i_2' \end{vmatrix} = \mathbf{c}' \begin{vmatrix} v_1'' \\ i_1'' \end{vmatrix} = \mathbf{c}'\,\mathbf{c}'' \begin{vmatrix} v_2'' \\ -i_2'' \end{vmatrix}$$



Relazioni tra matrici

Procedimento generale:

Dati due vettori $[p_1 \; p_2]$ e $[p_3 \; p_4]$

fra i quali esiste la relazione matriciale: $\begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = \mathbf{m} \begin{vmatrix} p_3 \\ p_4 \end{vmatrix}$

Si può scrivere: $\begin{vmatrix} \mathbf{e} & -\mathbf{m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m_{11} & -m_{12} \\ 0 & 1 & -m_{21} & -m_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Sia $\mathbf{q}$ $[q_1,q_2,q_3,q_4]$ legato a $\mathbf{p}$ $[p_1,p_2,p_3,p_4]$ dalla relazione:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}\,\mathbf{q} \qquad \{\mathbf{r}\,(4 \times 4)\}$$

$$(\mathbf{e} \quad -\mathbf{m})\,\mathbf{r}\,\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Relazioni tra matrici

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e} & -\mathbf{m}\end{pmatrix}\mathbf{r}\,\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -m_{11} & -m_{12} \\ 0 & 1 & -m_{21} & -m_{22} \end{array}\right| \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{R_{11}} \quad & \quad \mathbf{R_{12}} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ \hline r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{array}\right| \\ \begin{array}{cc} \mathbf{R_{21}} \quad & \quad \mathbf{R_{22}} \end{array} \end{array}
\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e} & -\mathbf{m}\end{pmatrix}\mathbf{r}\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}\,\mathbf{R_{11}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{21}} & \mathbf{e}\,\mathbf{R_{12}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{22}}\end{pmatrix}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Premoltiplicando entrambi i membri per $\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R_{11}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{21}}\right)^{-1}$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{e} & \left(\mathbf{e}\,\mathbf{R_{11}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{21}}\right)^{-1}\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R_{12}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{22}}\right)\end{vmatrix}\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \left(\begin{vmatrix}\mathbf{e} & -\mathbf{m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\right)$$

Relazioni tra matrici

Pertanto $\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \mathbf{n} \begin{vmatrix} q_3 \\ q_4 \end{vmatrix}$ $\quad \mathbf{n} = -\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R_{11}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{21}}\right)^{-1}\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R_{12}} - \mathbf{m}\,\mathbf{R_{22}}\right)$

Esempio:

relazione tra matr. di trasmissione e matr. di diffusione

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix} = \mathbf{t} \begin{vmatrix} b_2 \\ a_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \mathbf{s} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R_{11}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relazione tra t e s

$$\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R}_{11}-\mathbf{m}\,\mathbf{R}_{21}\right)^{-1}=\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right|^{-1}=\frac{1}{s_{21}}\begin{pmatrix}0&-1\\s_{21}&-s_{11}\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{e}\,\mathbf{R}_{12}-\mathbf{m}\,\mathbf{R}_{22}\right)=\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{pmatrix}0&-s_{12}\\1&-s_{22}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}=-\frac{1}{s_{21}}\begin{pmatrix}0&-1\\s_{21}&-s_{11}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-s_{12}\\1&-s_{22}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{s_{21}}&-\dfrac{s_{22}}{s_{21}}\\\dfrac{s_{11}}{s_{21}}&-\dfrac{\det\mathbf{s}}{s_{21}}\end{vmatrix}$$

$$z \rightleftarrows s$$

$$\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \dfrac{-1+z_{11}-z_{22}+\det \mathbf{z}}{1+z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}} & \dfrac{2\,z_{12}}{1+z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}} \\ \dfrac{2\,z_{21}}{1+z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}} & \dfrac{-1-z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}}{1+z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{vmatrix} \dfrac{1+s_{11}-s_{22}-\det \mathbf{s}}{1-s_{11}-s_{22}+\det \mathbf{s}} & \dfrac{2\,s_{12}}{1-s_{11}-s_{22}+\det \mathbf{s}} \\ \dfrac{2\,s_{21}}{1-s_{11}-s_{22}+\det \mathbf{s}} & \dfrac{1-s_{11}+s_{22}-\det \mathbf{s}}{1-s_{11}-s_{22}+\det \mathbf{s}} \end{vmatrix}$$

$$t \rightleftarrows s \qquad z \rightleftarrows t$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s_{21}} & -\dfrac{s_{22}}{s_{21}} \\ \dfrac{s_{11}}{s_{21}} & -\dfrac{\det \mathbf{s}}{s_{21}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \dfrac{t_{21}}{t_{11}} & \dfrac{\det \mathbf{t}}{t_{11}} \\ \dfrac{1}{t_{11}} & -\dfrac{t_{12}}{t_{11}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{t_{11}+t_{12}+t_{21}+t_{22}}{t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22}} & \dfrac{2\det \mathbf{t}}{t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22}} \\ \dfrac{2}{t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22}} & \dfrac{t_{11}-t_{12}-t_{21}+t_{22}}{t_{11}+t_{12}-t_{21}-t_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+z_{11}+z_{22}+\det \mathbf{z}}{2z_{21}} & \dfrac{1+z_{11}-z_{22}-\det \mathbf{z}}{2z_{21}} \\ \dfrac{-1+z_{11}-z_{22}+\det \mathbf{z}}{2z_{21}} & \dfrac{-1+z_{11}+z_{22}-\det \mathbf{z}}{2z_{21}} \end{pmatrix}$$

Proprietà di un 2-bocche reale

$$\det\left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right)>0 \;\Rightarrow\; \det\begin{pmatrix} 1-\left|s_{11}\right|^2-\left|s_{21}\right|^2 & -s_{11}^*s_{12}-s_{22}s_{21}^* \\ -s_{11}s_{12}^*-s_{22}^*s_{21} & 1-\left|s_{22}\right|^2-\left|s_{12}\right|^2 \end{pmatrix}>0$$

$$\mathbf{Q}_p = \text{ minore principale di } \left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^*\mathbf{s}\right)$$

$$\det\left(\mathbf{Q}_p\right)>0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \left|s_{11}\right|^2+\left|s_{21}\right|^2<1 \\ \left|s_{22}\right|^2+\left|s_{12}\right|^2<1 \end{cases}$$

Proprietà di un 2-bocche **privo di perdite**

Si è visto che la matrice di diffusione di un multipolo privo di elementi dissipativi è una matrice unitaria cioè vale la relazione

$$\tilde{\mathbf{s}}^{*}\mathbf{s} = \mathbf{e}$$

Questa relazione equivale a un sistema di n+(n-1)/2 equazioni che si ottengono eguagliando a uno prodotti scalari di ogni riga o colonna per la coniugata di se stessa ed eguagliando a zero i prodotti scalari di ogni riga o colonna per la coniugata di una riga o colonna diversa.

Tali equazioni consentono di ridurre il numero di elementi indipendenti della matrice di diffusione in quanto dati alcuni elementi è possibile ricavare gli altri

Proprietà di un 2-bocche

Assenza di perdite

$$\left(\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{s}}^{*}\mathbf{s}\right)=0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{s}}^{*}\mathbf{s}=\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{s}\,\tilde{\mathbf{s}}^{*}=\mathbf{e}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11}^{*} & s_{21}^{*} \\ s_{12}^{*} & s_{22}^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |s_{11}|^2+|s_{21}|^2=1 \\ |s_{22}|^2+|s_{12}|^2=1 \\ s_{11}^{*}s_{12}+s_{22}s_{21}^{*}=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11}^{*} & s_{21}^{*} \\ s_{12}^{*} & s_{22}^{*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |s_{11}|^2+|s_{12}|^2=1 \\ |s_{22}|^2+|s_{21}|^2=1 \\ s_{11}^{*}s_{21}+s_{22}s_{12}^{*}=0 \end{cases}$$

...e pertanto:

$$\boxed{\begin{aligned} |s_{12}| &= |s_{21}| \\ |s_{11}| &= |s_{22}| \end{aligned}}$$

Proprietà di un 2-bocche

ancora per un 2 – bocche privo di perdite:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{z}^* = 0}$$

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{11}^* & z_{12}^* \\ z_{21}^* & z_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z_{11}\,,\, z_{22} \rightarrow \mathit{immaginari} \\ |z_{12}| = |z_{21}| \\ \varphi^{12} = \pi - \varphi^{21} \end{cases}$$

2 – bocche privo di perdite e reciproco:

$$\boxed{\mathbf{z} + \mathbf{z}^* = 0}$$

Tutti gli elementi di z sono immaginari

Proprietà di un 2-bocche

Reciprocità, matrice di trasmissione:

Da $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s_{21}} & -\dfrac{s_{22}}{s_{21}} \\ \dfrac{s_{11}}{s_{21}} & -\dfrac{\det \mathbf{s}}{s_{21}} \end{pmatrix}$

$$\det \mathbf{t} = \frac{s_{22}s_{11} - \det \mathbf{s}}{(s_{21})^2} = \frac{s_{22}s_{11} - s_{22}s_{11} + s_{12}s_{21}}{(s_{21})^2} = \frac{s_{12}}{s_{21}}$$

Se è reciproco: $\boxed{\det \mathbf{t} = 1}$

Se è reciproco e privo di perdite:

Matrice t specificata da: $|t_{11}| \quad \varphi^{11} \quad \varphi^{12}$