Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 12 febbraio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$. Si scriva la definizione di matrice di cambio di base da una base $\mathcal{B}$ a una base $\mathcal{C}$ di V.
Sia $f : V \to V$ un operatore lineare. Si scriva la relazione matriciale tra $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$. Si dimostri tale relazione.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

(c) Si dica se $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

(d) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che il vettore

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f.$$

(3) (a) Sia $B \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata simmetrica. Si dimostri che anche

$$B^2 = B \cdot\ B$$

è una matrice quadrata simmetrica.

(b) Si consideri in particolare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli

$$C = B^2,$$

si determini il polinomio caratteristico di $L_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(c) Si trovi una base ortonormale di autovettori per L_C.

(4) (a) Si trovi un' equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, 0, -1)$ e contenente la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \qquad \begin{cases} y - x - z &= 1 \\ x + y &= -1 \end{cases} .$$

(b) Si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche della generica retta passante per Q e contenuta nel piano H trovato nel punto precedente.