

Dispense del corso di Meccanica Applicata alle
Macchine

Paolo Gallina

27 agosto 2002

Indice

Premessa	vii
1 Sintesi dei meccanismi	1
1.1 Problema di generazione di funzioni	1
1.2 Problema di generazione di traiettoria	8
1.3 Esempi concreti ai quali applicare la sintesi dei meccanismi	11
2 Principio dei lavori virtuali	13
2.1 Sistemi ad 1 G.d.L.	13
2.1.1 Lavoro virtuale fatto dalle forze inerziali $\delta\Omega$	13
2.1.2 Come si calcolano i rapporti di trasmissione?	15
2.1.3 Calcolo del lavoro fatto dalle forze esterne δL	18
2.1.4 Cinetostatica	20
2.1.5 Considerazioni sulle forze inerziali	25
2.1.6 Perché le forze interne non vengono considerate ai fini dell'applicazione del principio dei lavori virtuali?	26
2.1.7 Attuatori lineari e motori operanti su robot	27
2.2 Meccanismi a più gradi di libertà	31
3 Metodo Newtoniano	37
3.1 Forze d'inerzia e reazioni vincolari	37
3.1.1 Meccanica del contatto	44
4 Sintesi del volano	47
4.1 Cenni sulla soluzione del moto attraverso l'equazione di Lagrange	48
4.2 Ipotesi semplificativa che porta alla conservazione dell'energia cinetica	49
5 Bilanciamento di Rotori	55
5.1 Bilanciamento statico	56
5.2 Bilanciamento dinamico	61
6 Bilanciamento di manovellismi centrati	67
6.1 Configurazione tipica in un motore a 4 cilindri	72
6.2 Configurazione tipica di un motore a 6 cilindri in linea a 4 tempi	74

7	Camme	77
7.1	Meccanismi equivalenti	78
7.2	Pianificazione della traiettoria del cedente	80
7.3	Sintesi delle camme	84
7.3.1	Camma a punteria centrata	84
7.3.2	Calcolo dell'angolo di pressione in funzione del profilo di camma fornito in coordinate polari.	86
7.3.3	Camma a punteria con piattello	88
7.3.4	Camma a bilanciere con piattello	90
8	Cuscinetti e guide lineari	93
8.1	Attrito	93
8.1.1	Parametri che influenzano il coefficiente d'attrito	95
8.1.2	Attrito volvente	97
8.1.3	Fenomeno dello stick-slip	98
8.2	Cuscinetti volventi	99
8.2.1	Classificazione dei cuscinetti	100
8.2.2	Scelta dei cuscinetti	101
8.2.3	Configurazione di montaggio dei cuscinetti	106
8.3	Guide lineari	111
8.3.1	Tipologia di montaggio	112
8.4	Dimensionamento dei pattini	113
9	Ingranaggi	115
9.1	Come tracciare il profilo del dente	119
9.2	Forze trasmesse	121
9.3	Ruote dentate cilindriche a denti elicoidali	122
9.3.1	Forze trasmesse	125
9.3.2	Accoppiamento di ruote elicoidali	127
9.4	Coppie coniche	129
9.5	Riduttore armonico	132
9.6	Accoppiamento vite madrevite	133
9.6.1	Calcolo della coppia di azionamento del martinetto	135
9.6.2	Viti con filetto trapezoidale	138
9.7	Rotismi	139
9.7.1	Rotismo ordinatio	139
9.7.2	Rotismi epicicloidali	141
9.7.3	Differenziale	144
10	Cinghie, catene e funi	145
10.1	Cinghie non sincrone	145
10.2	Cinghie sincrone	151
10.2.1	Caratteristiche dimensionali di una trasmissione a cinghia	152
10.2.2	Cinghie a profilo trapezoidale (Dimensionamento)	154

11 Freni	159
12 Modellizzazione attraverso la trasformata di Laplace	167
12.1 Trasformata di Laplace	167
12.2 Modellizzazione di un attuatore idraulico	175
12.3 Ingresso impulsivo	177
12.4 Stabilità del sistema	178
12.5 Analisi in frequenza	181
12.6 Interconnessione di sistemi	186
12.7 Controllo	187

Premessa

Questo documento contiene solamente alcune note riguardo il principio dei lavori virtuali applicato ai meccanismi piani. Il materiale didattico va a completamente del testo:

M. Giovagnoni, A.Rossi, Una Introduzione allo studio dei meccanismi, Ed. Libreria Cortina Padova.

Capitolo 1

Sintesi dei meccanismi

Per *sintesi dimensionale* di un meccanismo si intende l'individuazione delle dimensioni geometriche dei suoi membri in maniera tale che il meccanismo soddisfi determinate specifiche cinematiche.

Due tipici problemi di sintesi dimensionale riguardanti i quadrilateri articolati sono:

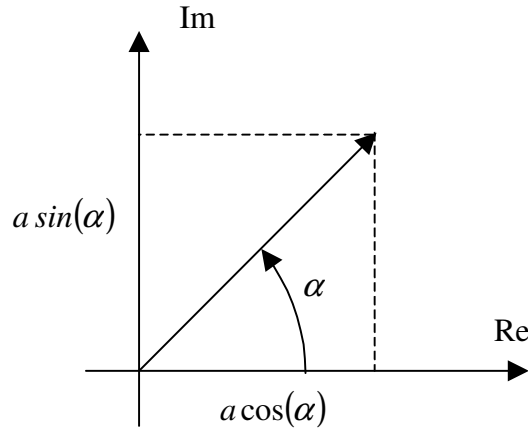
- problema di *generazione di funzioni*;
- problema della *generazione di traiettoria*.

1.1 Problema di generazione di funzioni

Il membro che genera il moto viene detto *membro motore*. Solitamente il membro motore è azionato da un attuatore come un motore elettrico od un pistone. Il *membro condotto* è un membro che fa parte del meccanismo e la cui posizione è legata alla posizione del membro motore.

Nel problema della generazione di funzioni si richiede che il moto del membro condotto sia una funzione matematica del moto del membro motore. Vediamo la soluzione del problema attraverso un metodo analitico per un quadrilatero articolato.

Per facilitare la trattazione introduciamo una notazione complessa per rappresentare un vettore \vec{z} . La notazione $e^{i\alpha}$ (dove i è l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$) rappresenta il numero complesso $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$. Per cui la quantità $z = a e^{i\alpha}$ equivale a $z = a(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$. Essa rappresenta un vettore nel piano complesso che ha $a \cos(\alpha)$ come parte reale ed $a \sin(\alpha)$ come parte immaginaria. La quantità a è il modulo del vettore, mentre α è l'angolo che il vettore forma con l'asse reale



Supponiamo di voler rappresentare un vettore \vec{z}_1 ruotato di una quantità δ rispetto alla posizione angolare di \vec{z} . In notazione complessa \vec{z}_1 vale

$$\vec{z}_1 = a (\cos(\alpha + \delta) + i \sin(\alpha + \delta)) \quad (1.1)$$

in quanto il vettore ruotato \vec{z}_1 ha stesso modulo a rispetto a quello di partenza \vec{z} ed angolo $\alpha + \delta$.

Moltiplichiamo \vec{z} per la quantità complessa $e^{i\delta}$. Si ottiene

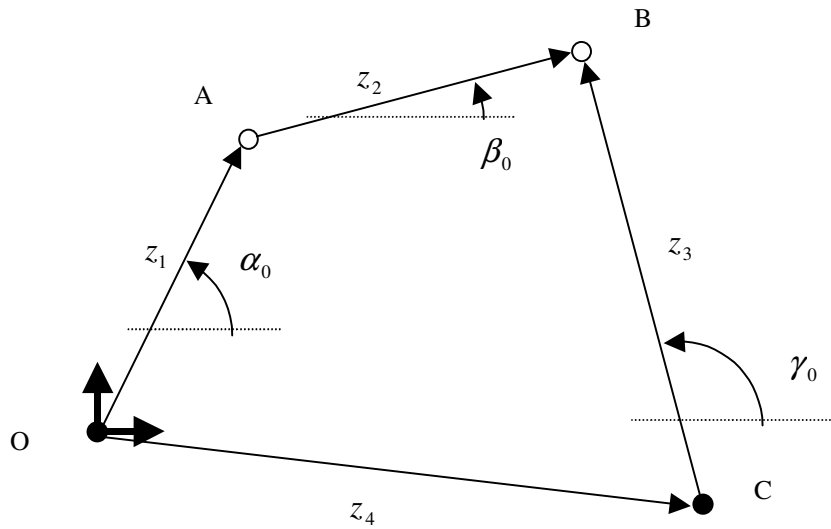
$$\begin{aligned} z e^{i\delta} &= \quad (1.2) \\ &= a (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) (\cos(\delta) + i \sin(\delta)) = \\ &= a (\cos(\alpha) \cos(\delta) - \sin(\alpha) \sin(\delta) + i (\sin(\alpha) \cos(\delta) + \cos(\alpha) \sin(\delta))) = \\ &= a (\cos(\alpha + \delta) + i \sin(\alpha + \delta)) \end{aligned}$$

Confrontando le equazioni 1.1 ed 1.2 si deduce che $z_1 = z e^{i\delta}$, ossia per ottenere un vettore ruotato di una quantità δ è sufficiente in notazione vettoriale complessa moltiplicarlo per l'operatore complesso $e^{i\delta}$.

Un altro modo per vederlo consisteva nel rielaborare il vettore ruotato dato dalla 1.1.

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 &= a (\cos(\alpha + \delta) + i \sin(\alpha + \delta)) = \\ &= a e^{i(\alpha + \delta)} = a e^{i\alpha} e^{i\delta} = \\ &= \vec{z} e^{i\delta} \end{aligned}$$

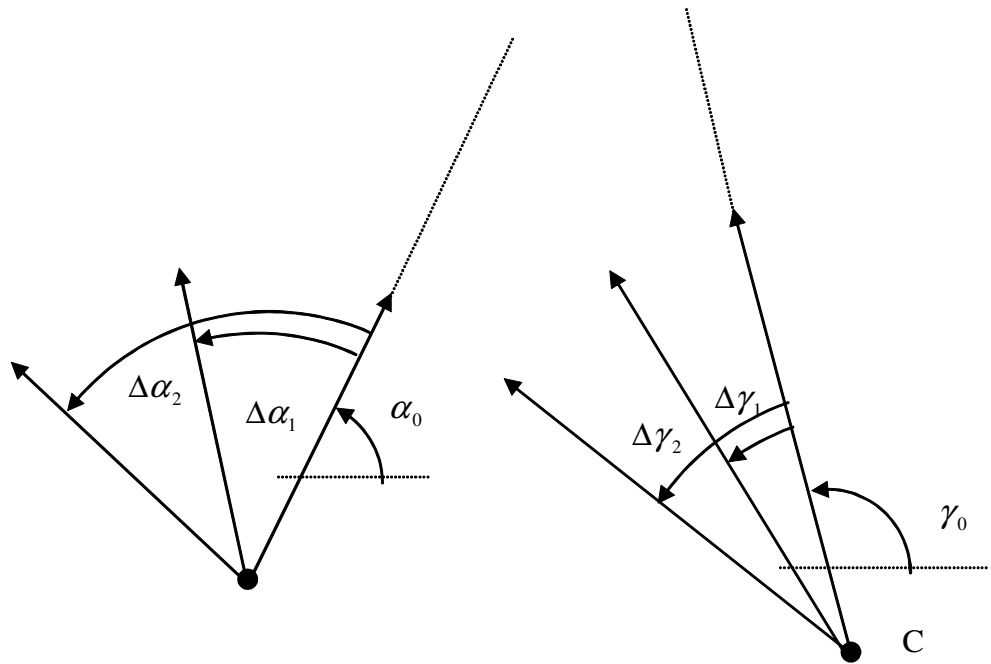
Rappresentiamo un quadrilatero articolato con i vettori associati ai membri come in figura



In O è stata posta l'origine del sistema di riferimento del piano complesso. Poiché si tratta di un problema di sintesi, le lunghezze delle aste non sono note, come pure la loro posizione angolare iniziale. Per chiarezza chiamiamo gli angoli che i vettori formano con l'asse reale α , β , γ e φ_4 .

Il movente è la manovella OA , il cedente la manovella CB .

Nel problema della generazione di funzione si vuole che l'incremento dell'angolo del cedente $\Delta\gamma$ si muova con un certo legame rispetto all'incremento dell'angolo del movente $\Delta\alpha$



Indichiamo con α_0 e γ_0 la posizione angolare iniziale di movente e cedente. α_0 e γ_0 non sono noti all'inizio; non sono quindi un dato del problema. Come si vede dalla figura, $\Delta\alpha_i$ e $\Delta\gamma_i$ rappresentano le posizioni angolari delle due aste relative alla posizione angolare di partenza. Generalmente si vuole che ad un incremento $\Delta\alpha_1$ corrisponda un incremento $\Delta\gamma_1$; se poi, l'incremento angolare del movente arriva ad essere $\Delta\alpha_2$, si vuole che il cedente arrivi ad un ben previsato valore angolare $\Delta\gamma_2$ e così via.

Generalmente il legame tra movente e cedente è dato da una relazione del tipo

$$\Delta\gamma = f(\Delta\alpha) \quad (1.3)$$

Perciò la funzione $f(\Delta\alpha)$ è un dato del problema. Non si riuscirà a costruire il meccanismo in maniera tale che tale legge sia rispettata per ogni $\Delta\alpha$, però si può fare in modo che valga per alcuni incrementi significativi di $\Delta\alpha$. Scegliamo un incremento $\Delta\alpha_1$. L'angolo che la manovella CB dovrà assumere quando il movente ruoterà di un angolo pari a $\Delta\alpha_1$ è dato dalla eq 1.3, cioè $\Delta\gamma_1 = f(\Delta\alpha_1)$. Se si considera un altro incremento, si ottiene $\Delta\gamma_2 = f(\Delta\alpha_2)$. Ripetendo il ragionamento per altri incrementi angolari di movente, si definisce una tabella di relazioni tra gli incrementi angolari del movente e del cedente che rappresentano quindi dati del problema. Si vedrà successivamente quante coppie della tabella utilizzare.

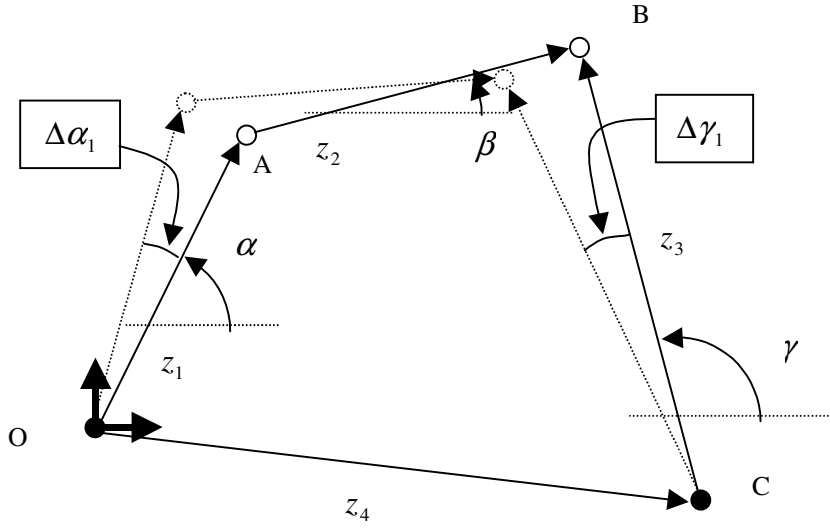
angolo movente	$\Delta\alpha_1$	$\Delta\alpha_2$	\dots
angolo cedente	$\Delta\gamma_1$	$\Delta\gamma_2$	\dots

Scriviamo il poligono di chiusura in notazione complessa chiamando

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 - \vec{z}_4 = 0 \quad (1.4)$$

Questa equazione vettoriale rappresenta il quadrilatero articolato allo stato iniziale. Si ricorda che le incognite del problema sono 6: le componenti reali ed immaginarie dei vettori \vec{z}_1 , \vec{z}_2 e \vec{z}_3 .

Imponiamo un incremento angolare pari a $\Delta\alpha_1$ alla manovella OA. Il vettore \vec{z}_1 , espresso in notazione complessa, diventa $\vec{z}_1 e^{i\Delta\alpha_1}$. Il quadrilatero cambia la sua configurazione cinematica. Ciò che è noto è che la manovella CB incrementa la posizione angolare di una quantità nota $\Delta\gamma_1$ (dato che si legge dalla tabella degli incrementi). Il nuovo vettore che rappresenta il cedente diventa $\vec{z}_3 e^{i\Delta\gamma_1}$.



L'equazione di chiusura nella nuova configurazione cinematica ricavata dal quadrilatero articolato ad incremento angolare avvenuto è

$$\vec{z}_1 e^{i\Delta\alpha_1} + \vec{z}_2 e^{i\Delta\beta_1} - \vec{z}_3 e^{i\Delta\gamma_1} - \vec{z}_4 = 0 \quad (1.5)$$

Notare che $\Delta\beta_1$ è indeterminato perché non era stato imposto nessun legame angolare tra la manovella AB e la manovella motore OA. Sottraendo l'eq. 1.5 alla 1.4, si ottiene l'equazione

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i\Delta\alpha_1}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i\Delta\beta_1}) - \vec{z}_3 (1 - e^{i\Delta\gamma_1}) = 0 \quad (1.6)$$

Il motivo della sottrazione risiede nel fatto che, così facendo, si elimina il vettore \vec{z}_4 .

Questa equazione (due equazioni scalari) ha 7 incognite: le parti reali ed immaginarie di tutti i vettori e la quantità $\Delta\beta_1$. Perciò si può trovare una soluzione nel caso in cui si fissino ad arbitrio 5 valori delle incognite. Come

risultato si avrà un quadrilatero articolato in cui, per una determinata configurazione cinematica, ad un incremento angolare $\Delta\alpha_1$ di movente corrisponderà un incremento angolare $\Delta\gamma_1$ di cedente.

Se volessimo che per un successivo incremento $\Delta\alpha_2$ si determini un incremento $\Delta\gamma_2$ dato dalla tabella, ripetendo il ragionamento si aggiunge una equazione vettoriale, ottenendo il sistema

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_1}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_1}) - \vec{z}_3 (1 - e^{i \Delta\gamma_1}) = 0$$

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_2}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_2}) - \vec{z}_3 (1 - e^{i \Delta\gamma_2}) = 0$$

In questo caso le incognite sono 8: i tre vettori, $\Delta\beta_1$ e $\Delta\beta_2$. Per risolvere il sistema si fissa ad arbitrio il valore di quattro incognite. Risolvendo il sistema di equazioni si ottiene un quadrilatero che rispetta il legame dato dalla eq. 1.3 per due incrementi successivi.

Proseguendo in questa direzione si potrà arrivare al più ad utilizzare il legame tra gli incrementi dato dalla tabella per un numero di 6.

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_1}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_1}) - \vec{z}_3 (1 - e^{i \Delta\gamma_1}) = 0$$

...

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_6}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_6}) - \vec{z}_3 (1 - e^{i \Delta\gamma_6}) = 0$$

Il sistema di 12 equazioni ha esattamente 12 incognite. Quindi è risolvibile almeno in linea di principio. Il legame degli incrementi è rispettato per 6 valori. La difficoltà principale di soluzione di questo sistema consiste nel fatto che le incognite $\Delta\beta_j$ sono argomenti di seni e coseni. Il sistema è perciò non lineare.

Accontentandosi di un rispetto della relazione degli incrementi per soli tre valori, si potrebbe fissare ad arbitrio $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$ e $\Delta\beta_3$. Imponendo tre incrementi si ottiene

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_1}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_1}) + \vec{z}_3 (-1 + e^{i \Delta\gamma_1}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_2}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_2}) + \vec{z}_3 (-1 + e^{i \Delta\gamma_2}) = 0$$

$$\vec{z}_1 (1 - e^{i \Delta\alpha_3}) + \vec{z}_2 (1 - e^{i \Delta\beta_3}) + \vec{z}_3 (-1 + e^{i \Delta\gamma_3}) = 0$$

che rappresenta un sistema di 6 equazioni scalari in 6 incognite.

ESEMPIO

Sintesi di un quadrilatero articolato in cui vi sia un legame tra gli incrementi degli angoli di movente e cedente dato dalla relazione

$$\Delta\gamma = f(\Delta\alpha) = 0,5 \Delta\alpha + 0,1 \Delta\alpha^2 \quad (1.8)$$

Far rispettare la relazione 1.8 per tre incrementi successivi pari a $\Delta\alpha_1 = 0,3rad$, $\Delta\alpha_2 = 0,6rad$, $\Delta\alpha_3 = 0,9 rad$. Si ottiene così la tabella degli incrementi

$$\Delta\gamma_1 = f(\Delta\alpha_1) = 0,159 \text{ rad}$$

$$\Delta\gamma_2 = f(\Delta\alpha_2) = 0,336 \text{ rad}$$

$$\Delta\gamma_3 = f(\Delta\alpha_3) = 0,531 \text{ rad}$$

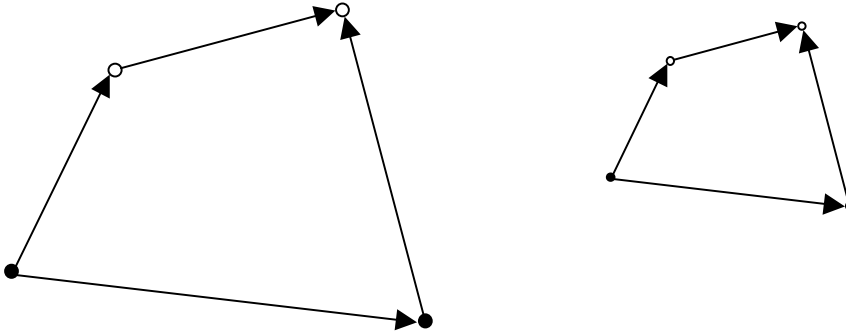
Assegniamo degli incrementi casuali alla posizione angolare dell'asta AB $\Rightarrow \Delta\beta_1 = 0.1 \text{ rad}$; $\Delta\beta_2 = 0.2 \text{ rad}$; $\Delta\beta_3 = 0.3 \text{ rad}$. Il sistema nelle coordinate complesse 1.7 che si ottiene è posto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{i\Delta\alpha_1} & 1 - e^{i\Delta\beta_1} & e^{i\Delta\gamma_1} - 1 \\ 1 - e^{i\Delta\alpha_2} & 1 - e^{i\Delta\beta_2} & e^{i\Delta\gamma_2} - 1 \\ 1 - e^{i\Delta\alpha_3} & 1 - e^{i\Delta\beta_3} & e^{i\Delta\gamma_3} - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{Bmatrix} = 0$$

diventa

$$\begin{bmatrix} 0.0447 - 0.2955i & 0.0050 - 0.0998i & -0.0126 + 0.1583i \\ 0.1747 - 0.5646i & 0.0199 - 0.1987i & -0.0559 - 0.3297i \\ 0.3784 - 0.7833i & 0.0447 - 0.2955i & -0.1377 + 0.5064i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Notare che, proiettando sugli assi immaginario e reale, le equazioni sopra, si sarebbe ottenuto un sistema lineare di 6 equazioni. In notazione complessa valgono le stesse regole del caso reale con il vantaggio che l'ordine della matrice del sistema è 3. Il determinante del sistema sopra è nullo. Questo era prevedibile, in quanto se fosse stato diverso da 0 la soluzione sarebbe stata $\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3 = 0$. Poiché manca il termine noto, vi sono infinite soluzioni. Bisogna fissare un valore ad arbitrio e calcolare le altre incognite. Anche questo fenomeno era prevedibile, poiché, per quanto riguarda il legame tra movente e cedente, meccanismi scalati uno rispetto ad un altro come in figura, hanno stesso comportamento. Rimane quindi un'indeterminazione. L'indeterminazione viene superata imponendo un valore ad uno dei tre valori incogniti.



Imponendo una soluzione del tipo $\vec{z}_1 = 1$, cioè una manovella motore di lunghezza unitaria e disposta orizzontalmente (si poteva proporre anche una soluzione complessa del tutto casuale, del tipo $\vec{z}_1 = 3 + 5i$, ad esempio) si

riconduce il problema a trovare le due incognite complesse \vec{z}_2 e \vec{z}_3 . Poiché il determinante del sistema è nullo, significa che una delle tre equazioni è combinazione lineare delle altre due. Perciò basta considerarne solo 2. Scegliamo le ultime due imponendo $\vec{z}_1 = 1$. Si ottiene

$$\begin{Bmatrix} 0.1747 - 0.5646i \\ 0.3784 - 0.7833i \end{Bmatrix} \vec{z}_1 + \begin{bmatrix} 0.0199 - 0.1987i & -0.0559 - 0.3297i \\ 0.0447 - 0.2955i & -0.1377 + 0.5064i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{Bmatrix} = 0$$

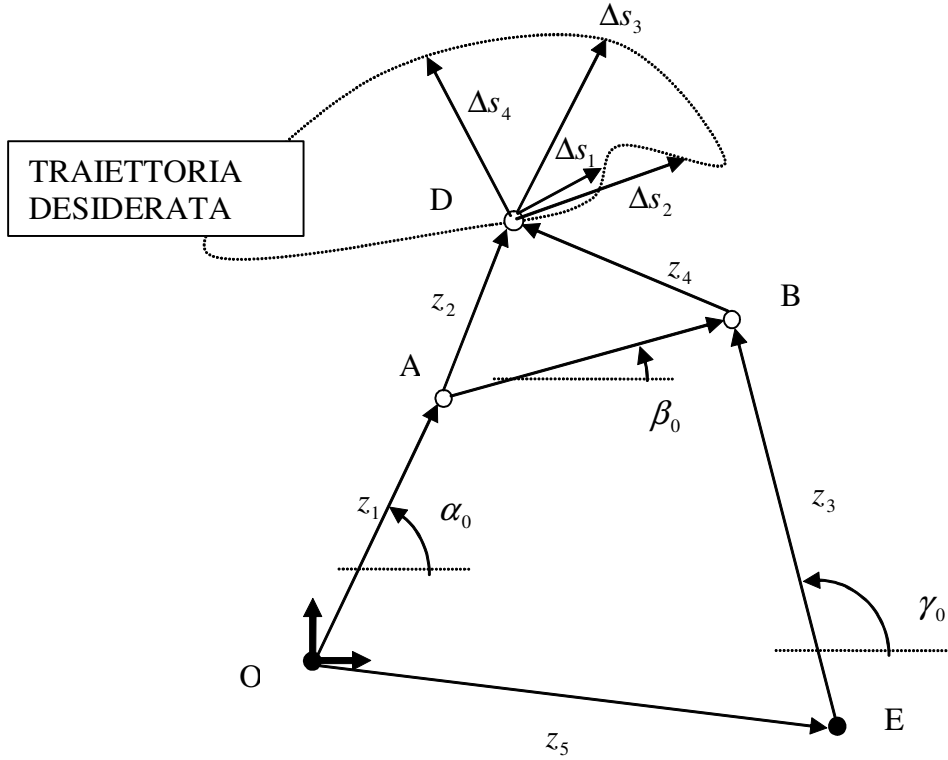
che risolto fornisce

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.0199 - 0.1987i & -0.0559 - 0.3297i \\ 0.0447 - 0.2955i & -0.1377 + 0.5064i \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0.1747 - 0.5646i \\ 0.3784 - 0.7833i \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -1.2285 + 3.4162i \\ 1.1588 + 2.3174i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Non è detto che il meccanismo così trovato sia adeguato dal punto di vista realizzativo. E' necessario verificare che durante il movimento non vi siano configurazioni di singolarità.

1.2 Problema di generazione di traiettoria

L'obiettivo della sintesi nel contesto di generazione di traiettoria è dato dall'individuazione delle caratteristiche geometriche del meccanismo in maniera tale che un punto del meccanismo percorra una traiettoria prefissata. Nel caso di un quadrilatero articolato, il problema è rappresentato in figura



Il punto D deve percorrere una traiettoria prefissata. Non è possibile ricavare un quadrilatero che soddisfi puntualmente tale condizione, ma è senz'altro possibile trovarne uno tale per cui il punto D passi per un numero finito di punti appartenenti alla traiettoria.

La traiettoria può essere definita a mezzo di incrementi Δs_i . Tali quantità (complesse) individuano i punti successivi appartenenti alla traiettoria per i quali il punto D meccanismo è forzato a transitare. I Δs_i sono un dato del problema.

Indichiamo con $\Delta \alpha_i$ gli incrementi angolari del vettore z_1 ; $\Delta \gamma_i$ gli incrementi angolari del vettore z_3 definiti allo stesso modo in cui sono stati definiti nella sintesi di traiettoria. Si noti che gli incrementi angolari del vettore z_2 sono uguali a quelli del vettore z_4 poiché sono vincolati rigidamente tra di loro.

All'inizio, la posizione del punto D è data da

$$D = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \quad (1.9)$$

oppure da

$$D = \vec{z}_5 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 \quad (1.10)$$

Quando avviene un incremento di rotazione $\Delta\alpha_1$ e si vuole che a tale incremento il punto D si sposti di una quantità Δs_1 si ottiene

$$D + \Delta s_1 = \vec{z}_1 e^{i \Delta\alpha_1} + \vec{z}_2 e^{i \Delta\beta_1} \quad (1.11)$$

oppure

$$D + \Delta s_1 = \vec{z}_5 + \vec{z}_3 e^{i \Delta\gamma_1} + \vec{z}_4 e^{i \Delta\beta_1} \quad (1.12)$$

Sottraendo l'eq. 1.11 con la 1.9 e la 1.12 con la 1.10, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= \vec{z}_1 (e^{i \Delta\alpha_1} - 1) + \vec{z}_2 (e^{i \Delta\beta_1} - 1) \\ \Delta s_1 &= \vec{z}_3 (e^{i \Delta\gamma_1} - 1) + \vec{z}_4 (e^{i \Delta\beta_1} - 1) \end{aligned}$$

Estendendo il concetto per uno spostamento j-esimo, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta s_j &= \vec{z}_1 (e^{i \Delta\alpha_j} - 1) + \vec{z}_2 (e^{i \Delta\beta_j} - 1) \\ \Delta s_j &= \vec{z}_3 (e^{i \Delta\gamma_j} - 1) + \vec{z}_4 (e^{i \Delta\beta_j} - 1) \end{aligned}$$

Di queste equazioni (4 scalari; due vettoriali) se ne possono scrivere tante quanti sono gli spostamenti assegnati.

Un procedere molto frequente consiste in non volere nessun legame tra gli incrementi della manovella motore $\Delta\alpha_j$ ed i punti che percorreranno la traiettoria. Ciò significa che se ad esempio la manovella è azionata da un motore che ruota con velocità angolare costante, il punto D passerà per i punti di progetto senza rispettare alcuna tempistica.

In questo caso $\Delta\alpha_j$ diventano incognite.

Il numero di equazioni scalari disponibili è $n_s \times 4$, dove n_s è il numero degli spostamenti che definiscono la traiettoria. Il numero di incognite è dato dai 4 vettori complessi (otto incognite scalari) più gli incrementi $\Delta\alpha_j$, $\Delta\beta_j$ e $\Delta\gamma_j$.

Riassumendo

Numero di equazioni scalari	$n_s \times 4$
Numero di incognite complessivo	$8 + 3 \times n_s$

Si ha un'unica soluzione quando il numero di incognite uguaglia il numero di equazioni, cioè quando $n_s = 8$. Ciò significa che si può costruire un quadrilatero articolato in maniera tale che il punto D passi per 9 punti. Se i punti di passaggio fossero di meno, si potrebbe assegnare ad arbitrio un valore a qualche incognita.

Si ricorda inoltre che la soluzione del problema non sempre esiste ed inoltre non è facile da trovare poiché il sistema non è lineare.

Per ottenere un sistema lineare, bisogna assegnare dei valori agli incrementi $\Delta\alpha_j$, $\Delta\beta_j$ e $\Delta\gamma_j$, che non sono più trattati come incognite. Perciò in questo caso, le incognite rimangono i valori complessi che definiscono le lunghezze e posizioni dei link che sono in numero pari ad 8. Per ottenere un numero di incognite pari al numero delle equazioni, sono richiesti solamente 2 incrementi. Significa che si riesce ad ottenere un quadrilatero articolato che permette al punto D di passare al più per tre punti.

1.3 Esempi concreti ai quali applicare la sintesi dei meccanismi

Le foto seguenti rappresentano il meccanismo cinematico di chiusura di un portabagagli. Si può notare come ai due lati dell'auto, al fine di reggere il portellone, sono presenti due quadrilateri articolati passivi. Il primo fotogramma si riferisce alla posizione completamente aperta del vano. Si nota come, dai fotogrammi 2 e 3, il portellone ruota in senso antiorario, sollevandosi leggermente (osservare la punta estrema del portellone). Contemporaneamente il portellone trasla in avanti, fino ad allinearsi con le guarnizioni nell'ultimo fotogramma.



La foto seguente rappresenta l'interno del vano, dove si notano le due coppie rotoidali in basso. L'unico elemento aggiuntivo è un ammortizzatore che ha la funzione di introdurre una forza viscosa per rallentare la manovra di apertura e chiusura.



Nella progettazione di questo meccanismo, sono state fornite le posizioni aperte e chiuse (configurazioni estreme) del portellone, ed eventualmente una posizione intermedia. Perciò si è imposto il passaggio del portellone per tre punti con una ben determinata angolazione. Forniti questi input, è stata effettuata la sintesi per generazione di traiettoria.

Capitolo 2

Principio dei lavori virtuali

2.1 Sistemi ad 1 G.d.L.

ENUNCIATO: *Il lavoro virtuale fatto dalle forze d'inerzia e dalle forze esterne agenti sul meccanismo è nullo.*

$$\delta\Omega + \delta L_{est} = 0 \quad (2.1)$$

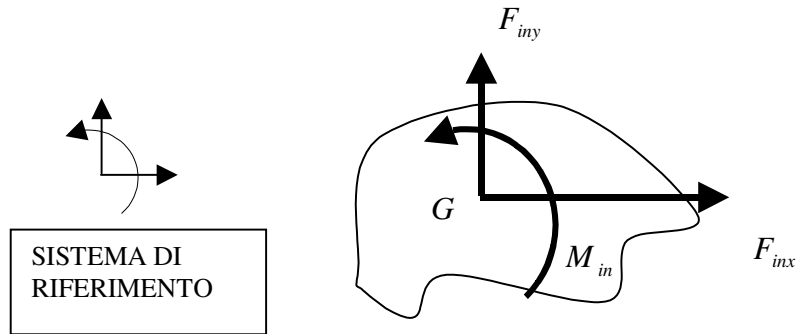
Da questo principio, che equivale alle equazioni di Lagrange, si possono ricavare le equazioni dinamiche del meccanismo. Si ricorda che le equazioni dinamiche sono delle relazioni matematiche che contengono esplicitamente i valori delle accelerazioni, delle velocità delle coordinate libere e le coordinate libere stesse. Esplicitiamo a tal riguardo i termini dell'equazione 2.1 per capire di cosa si tratta.

2.1.1 Lavoro virtuale fatto dalle forze inerziali $\delta\Omega$.

Innanzitutto bisogna capire quali sono le forze inerziali di un meccanismo.

Fissare il *sistema di riferimento assoluto* è la prima cosa da fare. Per sistema di riferimento s'intende individuare la direzione degli assi x,y ed un senso di rotazione (normalmente si fissa per convenzione il senso antiorario come positivo).

Quando si ha un corpo la cui massa non sia trascurabile, corpo che è sottoposto ad una certa accelerazione, le tre forze inerziali che contribuiscono ad effettuare lavoro virtuale sono rappresentate in figura



Notare che le forze inerziali sono orientate concordemente al sistema di riferimento. Le forze inerziali di traslazione lungo x ed y sono applicate nel baricentro del corpo rigido G. I moduli delle forze inerziali valgono

$$\begin{aligned} F_{inx} &= -m \ddot{x}_G \\ F_{iny} &= -m \ddot{y}_G \\ M_{in} &= -I_G \ddot{\vartheta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove $\ddot{x}_G, \ddot{y}_G, \ddot{\vartheta}$ sono le accelerazioni del baricentro del corpo e l'accelerazione angolare. m è la massa del corpo ed I_G è il momento d'inerzia del corpo rispetto al polo G . Perciò se il meccanismo è composto di m_c corpi rigidi, si dovranno tenere in considerazione $3 \times m_c$ contributi dovuti alle forze inerziali per quanto riguarda il calcolo del lavoro virtuale. Le 3 forze inerziali (una in realtà è un momento) rappresentano la risultante ed il momento risultante delle inerzie dovute a tutte le masse di cui è composto il corpo rigido. In altre parole, dato che ogni punto del corpo è dotato di massa ed ha una certa accelerazione, esso fornisce un piccolo contributo inerziale. Poiché i punti sono infiniti, le tre forze inerziali riassumono il contributo di tutti.

Il lavoro in generale consiste in un prodotto tra forza e spostamento lineare del punto di applicazione della forza, oppure tra una coppia ed uno spostamento angolare. Per quanto riguarda il lavoro virtuale, bisogna individuare quali sono gli spostamenti virtuali. Al di là di una definizione formale, gli spostamenti virtuali sono spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli imposti dalle coppie cinematiche. Vengono detti virtuali poiché sono introdotti solo al fine di applicare il principio dei lavori virtuali. Per chiarire le idee, focalizziamo la nostra attenzione su di un *meccanismi ad 1 G.d.L.*

Se il corpo rigido rappresentato in figura facesse parte di un meccanismo ad 1 G.d.L., la posizione del baricentro G del corpo e la sua posizione angolare ϑ sarebbero funzioni della coordinata libera q .

$$\begin{aligned}x_G &= f_x(q) \\y_G &= f_y(q) \\\vartheta &= f_\vartheta(q)\end{aligned}\tag{2.3}$$

La relazione che lega gli spostamenti virtuali del baricentro allo spostamento virtuale della coordinata libera si ottengono per differenziazione della 2.3.

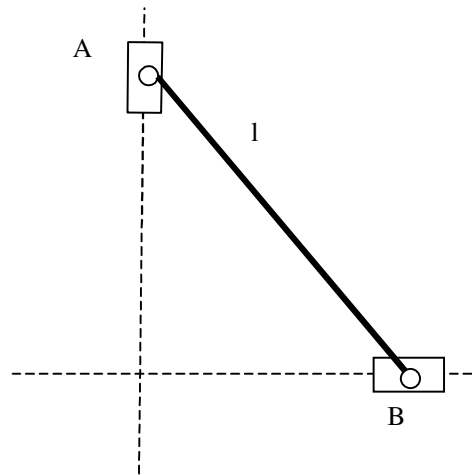
$$\begin{aligned}\delta x_G &= \frac{df_x(q)}{dq} \delta q \\\delta y_G &= \frac{df_y(q)}{dq} \delta q \\\delta \vartheta &= \frac{df_\vartheta(q)}{dq} \delta q\end{aligned}\tag{2.4}$$

Le quantità $\tau_{x_G,q} = \frac{df_x(q)}{dq}$, $\tau_{y_G,q} = \frac{df_y(q)}{dq}$ ed $\tau_{\vartheta,q} = \frac{df_\vartheta(q)}{dq}$ sono i rapporti di trasmissione delle coordinate x ed y del punto G e della posizione angolare del corpo rispetto alla coordinata libera.

2.1.2 Come si calcolano i rapporti di trasmissione?

Ci sono sostanzialmente 2 modi.

1) Per differenziazione diretta. Si esprime il valore della grandezza di cui si vuole esprimere il rapporto di trasmissione rispetto alla coordinata libera. Successivamente si calcola la derivata rispetto alla coordinata libera. Consideriamo il seguente esempio



in cui il pattino A può scorrere lungo l'asse y ed il pattino B lungo l'asse x . Un'asta di lunghezza l collega i due pattini. Scegliamo come coordinata libera la coordinata x del punto B: x_B . Calcolare il rapporto di trasmissione τ_{y_A, x_B} della coordinata y del punto A rispetto alla coordinata libera. La relazione che ci serve per calcolare il rapporto di trasmissione cercato è

$$x_B^2 + y_A^2 = l^2$$

Derivando rispetto ad x_B

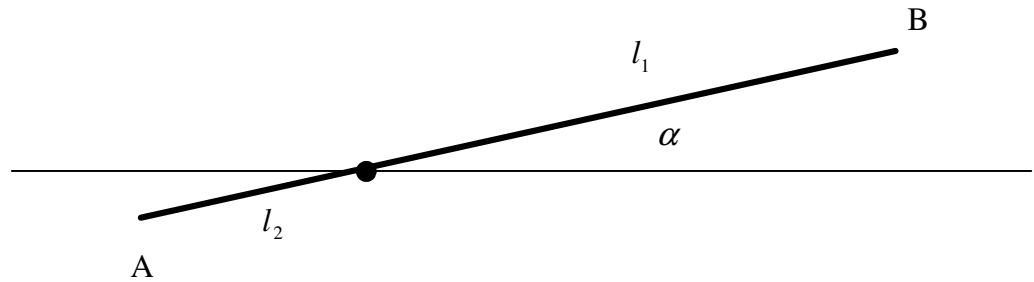
$$x_B + y_A \frac{dy_A}{dx_B} = 0$$

Per cui il rapporto di trasmissione è

$$\tau_{y_A, x_B} = \frac{dy_A}{dx_B} = -\frac{x_B}{y_A} = -\frac{x_B}{\sqrt{l^2 - x_B^2}}$$

Questo modo di procedere può essere usato solo raramente, in quanto si può applicare solamente quando le relazioni sono piuttosto semplici.

Particolare attenzione va posta nei segni. Consideriamo il seguente esempio



Calcoliamo i rapporti di trasmissione della coordinata y dei punti A e B rispetto all'angolo α scelto come coordinata libera. Le relazioni cinematiche da utilizzare sono

$$y_B = l_1 \sin(\alpha)$$

$$y_A = -l_2 \sin(\alpha)$$

Per cui i rapporti di trasmissione cercati sono

$$\tau_{y_B, \alpha} = \frac{dy_B}{d\alpha} = l_1 \cos(\alpha)$$

$$\tau_{y_A, \alpha} = \frac{dy_A}{d\alpha} = -l_2 \cos(\alpha)$$

2) Calcolando il rapporto tra la velocità della grandezza considerata e la velocità della coordinata libera. Vediamone il perché. Immaginiamo di voler calcolare il rapporto di trasmissione della grandezza s rispetto alla coordinata libera q . s è legato da una relazione a q

$$s = f(q) \quad (2.5)$$

Il rapporto di trasmissione che vogliamo calcolare è

$$\tau_{s,q} = \frac{df}{dq} \quad (2.6)$$

Derivando rispetto al tempo la 2.5, si ottiene

$$\dot{s} = \frac{df}{dq} \dot{q} \quad (2.7)$$

Confrontando la 2.6 con la 2.7 si ricava

$$\tau_{s,q} = \frac{\dot{s}}{\dot{q}} \quad (2.8)$$

L'interpretazione pratica dell'ultima relazione è che il rapporto di trasmissione di una grandezza (quota di un punto o posizione angolare di un corpo) di un meccanismo ad 1 G.d.L. si calcola procedendo nel seguente modo. Si impone una velocità qualsiasi alla coordinata libera. Si calcola la velocità della grandezza di interesse attraverso l'analisi di velocità. Infine si fa il rapporto tra le velocità.

I calcoli potrebbero essere ulteriormente semplificati imponendo alla coordinata libera una velocità unitaria fittizia. Infatti, in questo caso, la 2.8 diventa

$$\tau_{s,q} = \dot{s} \quad (2.9)$$

Riassumendo per calcolare il rapporto di trasmissione di una grandezza rispetto alla coordinata libera è sufficiente imporre una velocità unitaria alla coordinata libera ed effettuare l'analisi di velocità. Le velocità così calcolate sono già i rapporti di trasmissione.

Ora che sappiamo come calcolare gli spostamenti virtuali, riaffrontiamo il problema di calcolare il lavoro virtuale fatto dalle forze d'inerzia del corpo rigido considerato all'inizio del capitolo. Esso vale

$$\delta\Omega_{corpo} = F_{inx}\delta x_G + F_{iny}\delta y_G + M_{in}\delta\vartheta$$

Sostituendo 2.2 ed 2.4 si ottiene

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{corpo} &= (F_{inx}\tau_{x_G,q} + F_{iny}\tau_{y_G,q} + M_{in}\tau_{\vartheta,q})\delta q = \\ &= \left(-m\ddot{x}_G\tau_{x_G,q} - m\ddot{y}_G\tau_{y_G,q} - I_G\ddot{\vartheta}\tau_{\vartheta,q} \right)\delta q \end{aligned}$$

Dato che un meccanismo ha m_c corpi rigidi, il lavoro virtuale complessivo fatto dalle forze d'inerzia è la somma dei contributi forniti dalle forze d'inerzia di ogni corpo

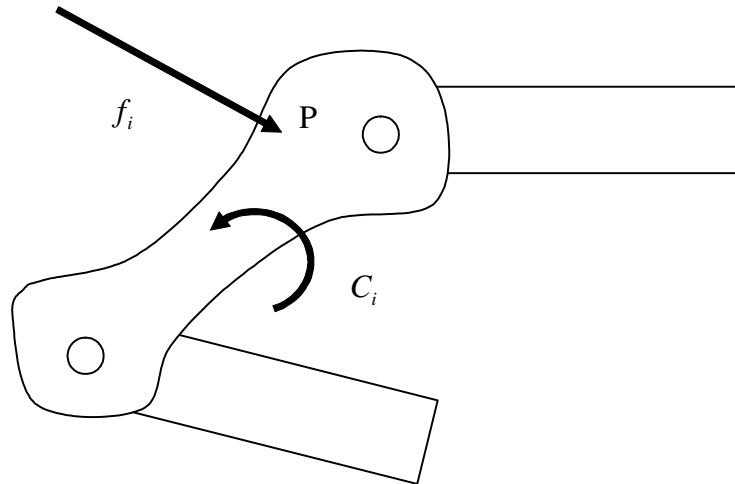
$$\begin{aligned}
 \delta\Omega &= \sum_{i=1}^{m_c} \delta\Omega_i = & (2.10) \\
 &= \sum_{i=1}^{m_c} (F_{inxi} \tau_{x_{G_i,q}} + F_{inyi} \tau_{y_{G_i,q}} + M_{ini} \tau_{\vartheta_{i,q}}) \delta q = \\
 &= \sum_{i=1}^{m_c} \left(-m_i \ddot{x}_{G_i} \tau_{x_{G_i,q}} - m_i \ddot{y}_{G_i} \tau_{y_{G_i,q}} - I_{G_i} \ddot{\vartheta}_i \tau_{\vartheta_{i,q}} \right) \delta q
 \end{aligned}$$

2.1.3 Calcolo del lavoro fatto dalle forze esterne δL

Le forze che agiscono su di un meccanismo possono essere *esterne* ed *interne*. Le forze esterne sono generalmente generate da un attuatore (sistema in grado di generare forza o coppia). A volte si parla di *forze generalizzate* comprendendo sia le forze propriamente dette (che si misurano in N) che le coppie (che si misurano in Nm).

Le forze vanno valutate ad un determinato istante; in quell'istante il meccanismo si troverà in una determinata configurazione. Si deve avere tanta fantasia da poter visualizzare mentalmente i vettori delle forze esterne generalizzate. Pensiamo ora di fotografare la situazione. Supponiamo di bloccare il tempo e di riuscire a muovere il meccanismo agendo sulla coordinata libera. In questa maniera riusciamo a valutare gli spostamenti virtuali dei punti ai quali sono applicate le forze rispetto allo spostamento virtuale della coordinata libera.

Le forze esterne sono applicate in un punto di un membro del meccanismo. Tale punto si può spostare virtualmente, perciò ha senso calcolare il contributo fornito dalla forza al lavoro virtuale



Nella figura è rappresentato parte del meccanismo. La forza esterna f_i agisce sul punto P mentre la coppia C_i (ricordare che la coppia non agisce su un punto) agisce sullo stesso membro. Il loro lavoro virtuale è

$$\delta L_i = f_{xi} \delta x_{Pi} + f_{yi} \delta y_{Pi} + C_i \delta \varphi_i$$

Introducendo i rapporti di trasmissione, si ottiene

$$\delta L_i = (f_{xi} \tau_{x_{Pi},q} + f_{yi} \tau_{y_{Pi},q} + C_i \tau_{\varphi_i,q}) \delta q$$

Se il meccanismo è soggetto ad n_{fe} forze esterne ed n_{Ce} coppie esterne il lavoro virtuale fatto dalle forze esterne sarà

$$\delta L_{est} = \sum_{i=1}^{n_{fe}} (f_{xi} \tau_{x_{Pi},q} + f_{yi} \tau_{y_{Pi},q}) \delta q + \sum_{i=1}^{n_{Ce}} (C_i \tau_{\varphi_i,q}) \delta q \quad (2.11)$$

La formula completa esplicitata che esprime il princio dei lavori virtuali si ottiene sostituendo la 2.11 ed 2.10 nella 2.1

$$\delta \Omega + \delta L_{est} = 0$$

\implies

$$\sum_{i=1}^{m_c} (F_{inxi} \tau_{x_{Gi},q} + F_{inyi} \tau_{y_{Gi},q} + M_{ini} \tau_{\vartheta i,q}) \delta q + \sum_{i=1}^{n_{fe}} (f_{xi} \tau_{x_{Pi},q} + f_{yi} \tau_{y_{Pi},q}) \delta q + \sum_{i=1}^{n_{Ce}} (C_i \tau_{\varphi_i,q}) \delta q = 0$$

Si può pensare di semplificare lo spostamento virtuale della coordinata libera, ottenendo il risultato finale

$$\sum_{i=1}^{m_c} F_{inxi} \tau_{x_{Gi},q} + F_{inyi} \tau_{y_{Gi},q} + M_{ini} \tau_{\vartheta i,q} + \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n_{fe}} f_{xi} \tau_{x_{Pi},q} + f_{yi} \tau_{y_{Pi},q} + \sum_{i=1}^{n_{Ce}} C_i \tau_{\varphi_i,q} = 0$$

Questa formula che ha un aspetto complicato, in realtà è molto semplice da interpretare. Essa esprime che:

la somma dei prodotti di tutte le forze agenti sul meccanismo (forze d'inerzia + forze esterne) moltiplicate per il rapporto di trasmissione (del punto di applicazione della forza rispetto alla coordinata libera) è nulla.

2.1.4 Cinetostatica

Focalizziamo la nostra attenzione su un meccanismo ad un grado di libertà. Il problema è così posto: data la legge oraria della coordinata libera, calcolare la forza o la coppia che permette tale atto di moto ad un determinato istante.

Per risolvere questo problema (si tratta di un problema dinamico) si utilizza l'equazione scalare 2.12. Essendo un'unica equazione, deve avere un'unica incognita che rappresenta la grandezza da determinare. Nella maggior parte dei casi si tratta della coppia che un motore elettrico deve produrre o la forza che un pistone pneumatico deve generare. Tutte le altre forze agenti nel meccanismo devono essere note.

La legge oraria è data da una funzione del tipo (funzione che deve essere nota)

$$q = f_l(t)$$

All'istante $t = \bar{t}$, per derivazione si ottiene

$$\dot{q} = \frac{df_l(\bar{t})}{dt}$$

$$\ddot{q} = \frac{d^2 f_l(\bar{t})}{dt^2}$$

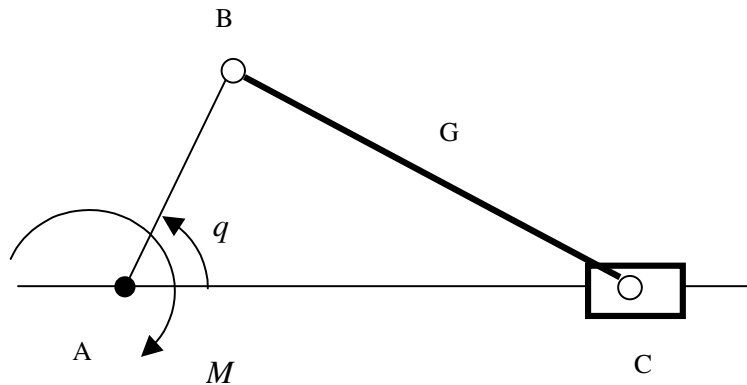
Attraverso l'analisi di velocità si calcolano le velocità dei punti dove sono applicate le forze esterne (e le forze d'inerzia) e dividendo per \dot{q} si calcolano i rapporti di trasmissione.

Attraverso l'analisi di accelerazione si calcolano le accelerazioni dei baricentri dei corpi dotati di massa non trascurabile e le accelerazioni angolari dei medesimi. Queste accelerazioni servono per calcolare le forze d'inerzia.

A questo punto tutti i termini della 2.12 sono noti tranne la forza generalizzata da determinare: la forza dell'attuatore che determina il moto.

Esempio

Consideriamo un meccanismo molto semplice come un biella-manovella



Gli unici corpi la cui massa non sia trascurabile sono la biella BC ed il pattino C. Il punto G è il baricentro della biella. Calcolare la coppia M da applicare alla manovella all'istante $t = 0$ per avere la legge oraria $q(t) = 48 + 5 \sin(30t)$ [°].

DATI: $AB = 0,3 \text{ m}$; $BC = 0,9 \text{ m}$; $m_{BC} = 1Kg$; $m_C = 0,6Kg$

Notare che la coppia M da applicare è stata orientata in senso orario (senso opposto alla convenzione addottata). Non si tratta di un errore. La coppia, essendo un'incognita, può essere orientata a piacimento. Se ne terrà conto in seguito, considerando che il lavoro virtuale della coppia sarà negativo.

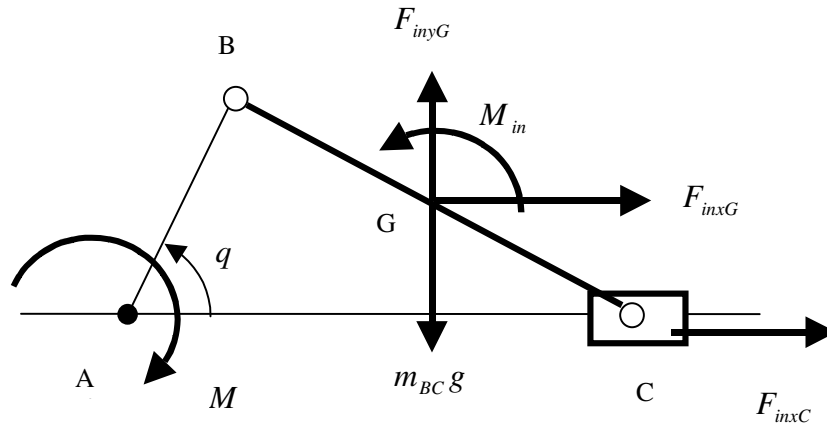
Le forze inerziali del meccanismo sono la forza inerziale di traslazione lungo x e lungo y della biella BC, la forza inerziale di rotazione della biella e la forza inerziale di traslazione del pattino C lungo x .

Le forze esterne sono la coppia M e la forza peso della biella BC.

Nota che ci sarebbe anche la forza peso del pattino C (di modulo $m_C g$ ed orientata verso il basso), ma questa non contribuisce al lavoro virtuale in quanto il vincolo del pattino non permette alcun spostamento virtuale verticale del punto di applicazione C

$$\begin{aligned} \delta y_C &= 0 \\ \implies \\ -m_C g \delta y_C &= 0 \end{aligned}$$

Rappresentiamo le forze



Applicando il P.L.V., l'equazione 2.12 assume la forma

$$F_{inxG} \tau_{xG,q} + F_{inyG} \tau_{yG,q} + M_{in} \tau_{\varphi_2,q} + F_{inxC} \tau_{xC,q} - M - m_{BC} g \tau_{yG,q} = 0$$

Esplicitando le forze

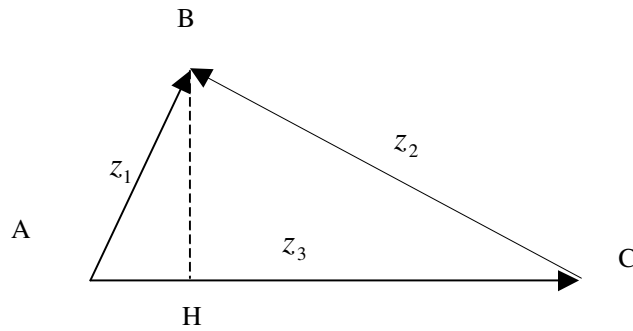
$$\begin{aligned} & -m_{BC} \ddot{x}_G \tau_{xG,q} - m_{BC} \ddot{y}_G \tau_{yG,q} + \\ & -I_G \ddot{\varphi}_2 \tau_{\varphi_2,q} - m_C \ddot{x}_C \tau_{xC,q} + \\ & -M - m_{BC} g \tau_{yG,q} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notare che la coppia è preceduta da un segno - poiché non è concorde all'orientazione scelta per il sistema di riferimento.

Bisogna determinare i rapporti di trasmissione e le accelerazioni. La velocità e la accelerazione della manovella all'istante iniziale valgono

$$\begin{aligned} q &= 48[^\circ] = [rad] \\ \dot{q} &= 5 \cos(30 t) \times 30 = 150[^\circ/s] \\ \ddot{q} &= 0 \end{aligned}$$

ANALISI CINEMATICA DI POSIZIONE



Calcolo dell'angolo della biella e della posizione del pattino C

$$BH = z_1 \sin(q) = 0,22m$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{BH}{z_2}\right) = 2,89rad$$

$$z_3 = z_1 \cos(q) - z_2 \cos(\varphi_2) = 1,07m$$

ANALISI DI VELOCITA'

$$z_1 \cos(q) - z_2 \cos(\varphi_2) - z_3 = 0$$

$$z_1 \sin(q) - z_2 \sin(\varphi_2) = 0$$

derivando

$$-z_1 \sin(q) \dot{q} + z_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 - \dot{z}_3 = 0$$

$$z_1 \cos(q) \dot{q} - z_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = 0$$

si ricava immediatamente

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{z_1 \cos(q)}{z_2 \cos(\varphi_2)} \dot{q} = -0,6rad/s$$

$$\dot{z}_3 = -z_1 \sin(q) \dot{q} + z_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = -0,718rad/s$$

Per calcolare i rapporti di trasmissione servono le velocità del baricentro della biella, la cui posizione è

$$G = \bar{z}_3 + \frac{\bar{z}_2}{2}$$

$$x_G = z_3 + \frac{z_2}{2} \cos(\varphi_2)$$

$$y_G = \frac{z_2}{2} \sin(\varphi_2)$$

La velocità del baricentro è

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{z}_3 - \frac{z_2}{2} \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = -0,65m/s \\ \dot{y}_G &= \frac{z_2}{2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = 0,26m/s\end{aligned}$$

RAPPORTI DI TRASMISSIONE

$$\begin{aligned}\tau_{x_G,q} &= \frac{\dot{x}_G}{\dot{q}} = -0,249m/rad \\ \tau_{y_G,q} &= \frac{\dot{y}_G}{\dot{q}} = 0,1m/rad \\ \tau_{\varphi_2,q} &= \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{q}} = -0,23 \\ \tau_{x_C,q} &= \frac{\dot{x}_C}{\dot{q}} = \frac{\dot{z}_3}{\dot{q}} = -0,27\end{aligned}$$

ANALISI DI ACCELERAZIONE (notare che l'accelerazione di manovella è nulla)

$$\begin{aligned}-z_1 \cos(q) \dot{q}^2 + z_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + z_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \ddot{z}_3 &= 0 \\ -z_1 \sin(q) \dot{q}^2 - z_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - z_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 &= 0\end{aligned}$$

Dalla seconda

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_2 &= -\frac{z_1 \sin(q) \dot{q}^2 + z_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2}{z_2 \cos(\varphi_2)} = -1,66rad/s^2 \\ \ddot{z}_3 &= -z_1 \cos(q) \dot{q}^2 + z_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + z_2 \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 = -1,32m/s^2\end{aligned}$$

Le accelerazioni del baricentro e del punto C sono

$$\begin{aligned}\ddot{x}_G &= \ddot{z}_3 - \frac{z_2}{2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - \frac{z_2}{2} \sin(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 = -1,35m/s^2 \\ \ddot{y}_G &= -\frac{z_2}{2} \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{z_2}{2} \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 = -0,76m/s^2 \\ \ddot{x}_C &= \ddot{z}_3 = -1,32m/s^2\end{aligned}$$

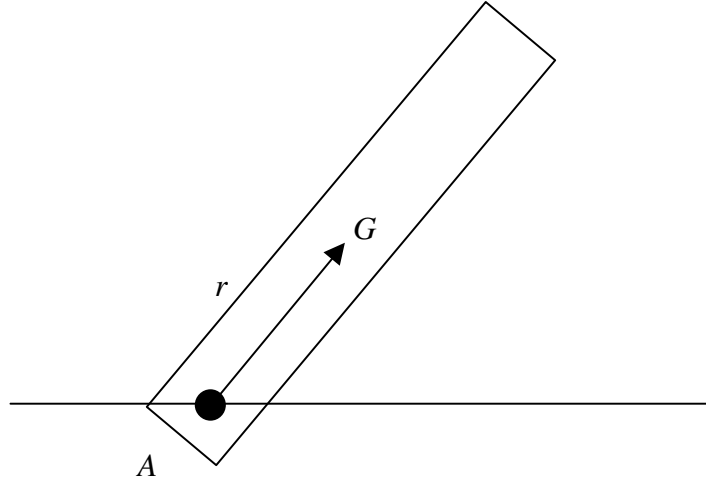
Sostituendo nella 2.13 si esplicita l'unica incognita dell'equazione

$$M = -m_{BC} \ddot{x}_G \tau_{x_G,q} - m_{BC} \ddot{y}_G \tau_{y_G,q} - I_G \ddot{\varphi}_2 \tau_{\varphi_2,q} - m_C \ddot{x}_C \tau_{x_C,q} - m_{BC} g \tau_{y_G,q} = -1,43Nm$$

$$\text{dove } I_G = \frac{1}{12} m_{BC} BC^2$$

2.1.5 Considerazioni sulle forze inerziali

Consideriamo il lavoro virtuale fatto dalle forze d'inerzia di un corpo rigido vincolato al telaio attraverso una coppia rotoidale attorno alla quale può ruotare.



Si era visto che le forze d'inerzia forniscono 3 contributi

$$\delta\Omega_{corpo} = -m \ddot{x}_G \delta x_G - m \ddot{y}_G \delta y_G - I_G \ddot{\vartheta} \delta\vartheta \quad (2.14)$$

Poiché il punto A è fisso al telaio si può calcolare

$$\begin{aligned} x_G &= r \cos(\vartheta) \\ y_G &= r \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Differenziando si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -r \cos(\vartheta) \dot{\vartheta}^2 - r \sin(\vartheta) \ddot{\vartheta} \\ \ddot{y}_G &= -r \sin(\vartheta) \dot{\vartheta}^2 + r \cos(\vartheta) \ddot{\vartheta} \end{aligned}$$

Gli spostamenti virtuali del baricentro possono essere legati allo spostamento virtuale dell'angolo

$$\begin{aligned} \delta x_G &= -r \sin(\vartheta) \delta\vartheta \\ \delta y_G &= r \cos(\vartheta) \delta\vartheta \end{aligned}$$

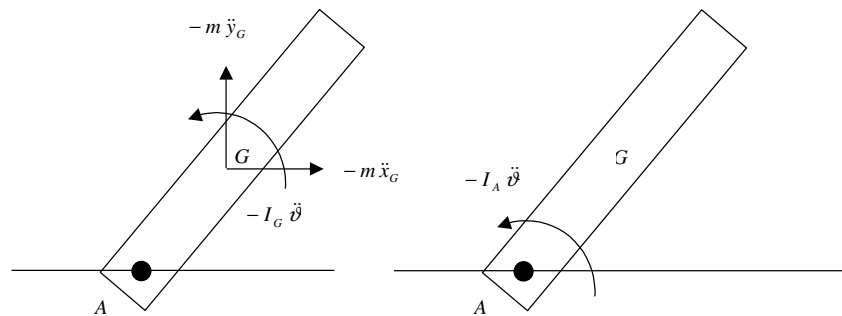
Sostituendo nell'equazione 2.14, si ha

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{corpo} &= -m \left(-r \cos(\vartheta) \dot{\vartheta}^2 - r \sin(\vartheta) \ddot{\vartheta} \right) (-r \sin(\vartheta) \delta\vartheta) + \\ &\quad - m \left(-r \sin(\vartheta) \dot{\vartheta}^2 + r \cos(\vartheta) \ddot{\vartheta} \right) (r \cos(\vartheta) \delta\vartheta) + \\ &\quad - I_G \ddot{\vartheta} \delta\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{corpo} &= -m r^2 \ddot{\vartheta} \delta\vartheta - I_G \ddot{\vartheta} \delta\vartheta = \\ &= - (m r^2 + I_G) \ddot{\vartheta} \delta\vartheta \end{aligned}$$

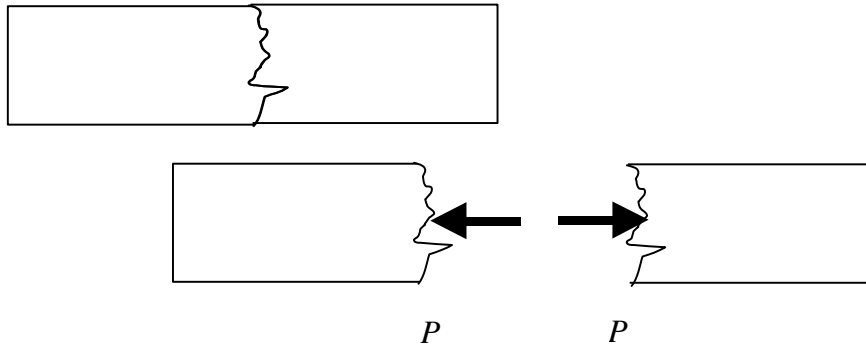
Con l'ultima formula si è dimostrato che i tre contributi al lavoro virtuale dovuto alle forze d'inerzia sono stati sostituiti da un unico contributo. Nota che $I_A = m r^2 + I_G$ è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto al punto fisso A.

Operativamente, quando si ha un meccanismo con un corpo rigido avente un punto fisso a telaio, non è necessario calcolare tutti e 3 i contributi delle forze d'inerzia. E' sufficiente considerare un'unica coppia d'inerzia (calcolando il momento d'inerzia rispetto al punto fisso)



2.1.6 Perché le forze interne non vengono considerate ai fini dell'applicazione del principio dei lavori virtuali?

Le forze interne non intervengono nel calcolo del lavoro virtuale perché non compiono lavoro. Vediamolo in dettaglio con un esempio



Supponiamo di avere un corpo rigido facente parte di un meccanismo. Supponiamo inoltre che il meccanismo possa solo traslare orizzontalmente per come sono fissati i vincoli. Sappiamo che una forza interna è una forza di reazione che si genera all'interno dei membri stessi (ce ne sono infinite ovviamente). Isoliamone una a caso nel seguente modo. Pensiamo di spezzare il corpo figurativamente. La parte di sinistra del corpo agisce con una forza interna sulla parte di destra del corpo. Ma per il principio di azione e reazione anche la parte di destra agisce con una forza interna uguale e contraria. Entrambe le forze agiscono sul punto P i cui spostamenti lungo x sono legati alla coordinata libera q

$$x_P = f(q)$$

Indichiamo con f il modulo della forza interna. Il lavoro virtuale fatto dalle due forze interne è

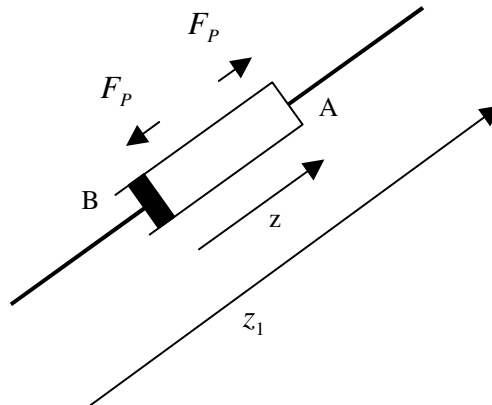
$$\delta L = f \delta x_P + (-f) \delta x_P = 0$$

Il segno - che precede la seconda forza interna è stato inserito poiché il vettore che rappresenta la forza è orientato nella direzione opposta rispetto all'asse della x .

Perciò il lavoro delle forze interne è nullo, qualunque sia il valore della forza interna. Notare che quanto visto è valido solamente per corpi rigidi.

2.1.7 Attuatori lineari e motori operanti su robot

Consideriamo il caso di un meccanismo composto, tra gli altri organi, di un pistone pneumatico od idraulico come in figura



Viene da chiedersi come calcolare il contributo dato dalla forza prodotta dal pistone al lavoro virtuale. La pressione prodotta all'interno della camera del cilindro produce una forza F_P sulla base del cilindro nel punto A ed una forza uguale e contraria sul punto B del pistone. Si nota una somiglianza con il caso delle forze interne. Esiste una importante differenza. Mentre nel caso di due forze interne uguali e contrarie, le forze agiscono sullo stesso punto, nel caso del pistone idraulico (o pneumatico) le forze uguali e contrarie agiscono su punti che possono allontanarsi od avvicinarsi tra di loro. Per questo motivo forniscono un contributo al lavoro virtuale e devono essere considerate come forze esterne.

Il lavoro virtuale prodotto è

$$\begin{aligned} \delta L_{est} &= \vec{F}_P \cdot \vec{\delta A} - \vec{F}_P \cdot \vec{\delta B} = \\ &= \vec{F}_P \cdot (\vec{\delta A} - \vec{\delta B}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove il prodotto è un prodotto scalare tra due vettori e $\vec{\delta A}$ rappresenta lo spostamento virtuale vettoriale e del punto A e non è altro che una notazione più compatta per esprimere $\vec{\delta A} = (\delta x_A, \delta y_A)$. Allo stesso modo $\vec{F}_P = (F_{Px}, F_{Py})$

Introduciamo il vettore $\vec{z} = \vec{A} - \vec{B}$. Considerando gli spostamenti virtuali, si ottiene dalla relazione precedente che $\vec{\delta A} - \vec{\delta B} = \vec{\delta z}$. Per cui il lavoro virtuale diventa $\delta L_{est} = \vec{F}_P \cdot \vec{\delta z}$.

$\vec{\delta A} - \vec{\delta B} = \vec{\delta z}$ ha il seguente significato: lo spostamento virtuale del vettore che congiunge i punti A e B (il vettore z) è la differenza degli spostamenti virtuali dei due punti.

Adesso è sufficiente esplicitare i termini racchiusi all'interno della formula dello spostamento virtuale.

Sapendo che

$$\vec{z} = z \left\{ \begin{array}{l} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{array} \right\}$$

si riesce ad esplicitare lo spostamento virtuale del vettore z

$$\vec{\delta z} = \frac{d\vec{z}}{dq} \delta q = \left(\begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix} \frac{dz}{dq} + z \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{Bmatrix} \frac{d\vartheta}{dq} \right) \delta q$$

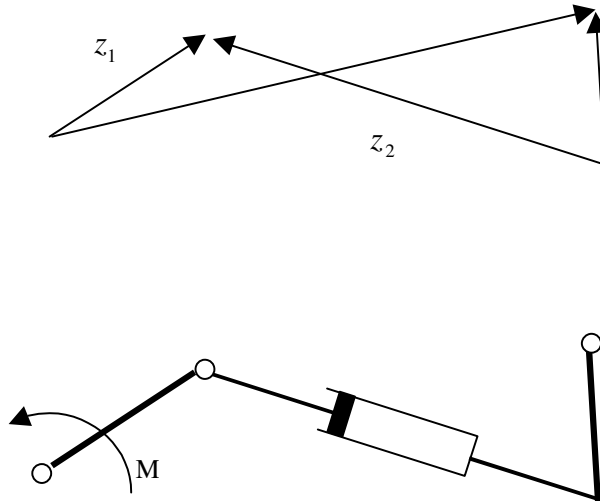
La forza F_P è orientata seconta la direzione del pistone $\vec{F}_P = F_P \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix}$.

Calcoliamo il contributo al lavoro virtuale

$$\begin{aligned} \delta L_{est} &= \vec{F}_P \cdot (\vec{\delta A} - \vec{\delta B}) = \\ &= F_P \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix} \frac{dz}{dq} + z \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{Bmatrix} \frac{d\vartheta}{dq} \right) \delta q = \\ &= F_P \frac{dz}{dq} \delta q = \\ &= F_P \delta z \end{aligned}$$

Dall'ultima relazione ci si rende conto che la trattazione matematica è tanto complicata quanto semplice è il risultato: *il lavoro virtuale fatto da un pistone è dato dal prodotto della forza che il pistone produce per l'allungamento virtuale del pistone δz* . Notare che al posto del vettore z si sarebbe potuto prendere il vettore z_1 che congiunge le estremità di attacco del pistone. Il motivo è che gli allungamenti virtuali sono gli stessi $\delta z = \delta z_1$ e quindi il lavoro virtuale non cambia.

ESEMPIO



Calcolare la forza che il pistone deve produrre per equilibrare la coppia M . Diamo per scontato l'analisi di velocità ed il calcolo dei rapporti di trasmis-

sione e concentriamoci sulla scrittura dell'equazione di equilibrio. Essendo il meccanismo fermo, non ci sono forze inerziali. L'equazione di equilibrio fornisce

$$M \delta\varphi_1 + F_p \delta z_2 = 0$$

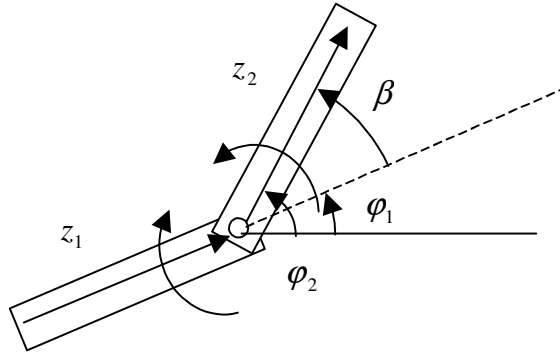
e se si sceglie l'angolo di manovella come coordinata libera si ottiene

$$M + F_p \tau_{z_2, \varphi_1} = 0$$

Se orientiamo z_2 nell'altro verso, il risultato non cambia, in quanto δz_2 rappresenta l'allungamento virtuale che rimane così invariato.

Se F_p assume un valore negativo, significa che il pistone deve tirare per mantenere l'equilibrio.

Consideriamo ora il caso tipico di un motore elettrico calettato tra due membri. E' una situazione simile a quella del pistone



Il motore esercita una coppia C sul secondo membro. Per il principio di azione e reazione, il motore esercita una coppia uguale e contraria sul primo membro. Perciò vi sono due forze da tenere in considerazione ed il lavoro virtuale è

$$\delta L = C \delta\varphi_2 - C \delta\varphi_1 = C (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)$$

Poiché in un sistema reale viene spesso scelta come coordinata indipendente l'angolo compreso tra i due link: $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$, si usa esprimere il lavoro virtuale in funzione dello spostamento virtuale di questa variabile

$$\delta L = C \delta\beta$$

Perciò il lavoro virtuale eseguito da un motore calettato tra due link vincolati a mezzo di una coppia rotoidale è dato dal prodotto della coppia prodotta per lo spostamento virtuale della posizione angolare relativa di un link rispetto all'altro.

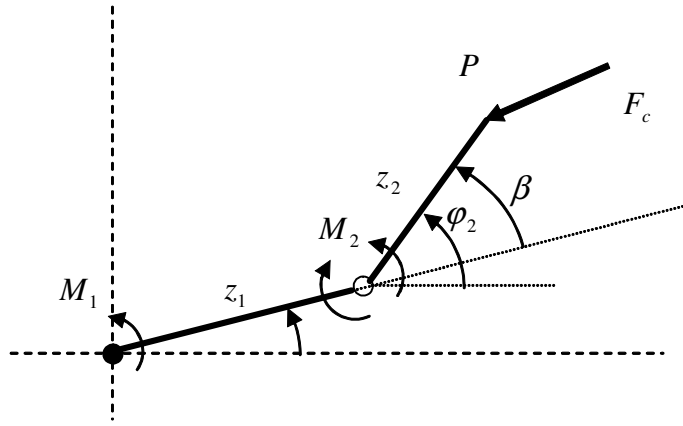
2.2 Meccanismi a più gradi di libertà

Nel caso di meccanismi ad n gradi di libertà il principio dei lavori virtuali è ugualmente valido: *Il lavoro virtuale fatto dalle forze d'inerzia e dalle forze esterne agenti sul meccanismo è nullo per qualsiasi combinazione di spostamenti virtuali.*

$$\delta\Omega + \delta L_{est} = 0 \quad (2.16)$$

Basta solamente usare un po' di cautela nell'identificazioni degli spostamenti virtuali.

Consideriamo un semplice esempio



Calcolare le coppie che i due motori (i cui assi coincidono con le coppie rotoidali) devono fornire per equilibrare staticamente il carico F_c .

Scriviamo il lavoro virtuale fatto dalle forze esterne moltiplicando come al solito forze esterne per spostamenti virtuali dei punti di applicazione

$$M_1 \delta\varphi_1 + M_2 (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1) + F_{cx} \delta x_P + F_{cy} \delta y_P = 0 \quad (2.17)$$

In alternativa si poteva arrivare alla stessa equazione mettendo in pratica quanto visto per quanto riguarda il lavoro virtuale compiuto da un motore elettrico calettato tra due link, cioè

$$M_1 \delta\varphi_1 + M_2 \delta\beta + F_{cx} \delta x_P + F_{cy} \delta y_P = 0$$

Apparentemente si è scritto un'unica equazione. In realtà, esplicitando gli spostamenti virtuali si vedrà come sia possibile ottenere 2 equazione che permettano di calcolare le 2 coppie fornite dai motori.

Mentre per un sistema ad 1 G.d.L. uno spostamento virtuale è legato allo spostamento virtuale della coordinata libera attraverso il rapporto di trasmissione, nei sistemi ad n gradi di libertà lo spostamento virtuale è legato agli n spostamenti virtuali delle coordinate libere.

Nell'esempio le coordinate libere sono φ_1 e φ_2 . Lo spostamento virtuale del punto di applicazione della forza F_c si pone in funzione dello spostamento virtuale delle coordinate libere

$$\begin{aligned}\vec{P} &= z_1 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} + z_2 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} \\ \implies \\ \delta\vec{P} &= z_1 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{Bmatrix} \delta\varphi_1 + z_2 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{Bmatrix} \delta\varphi_2\end{aligned}$$

Sostituendo nell'eq. 2.17

$$\begin{aligned}M_1 \delta\varphi_1 + M_2 (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1) + \\ + F_{cx} (-z_1 \sin(\varphi_1) \delta\varphi_1 - z_2 \sin(\varphi_2) \delta\varphi_2) + \\ F_{cy} (z_1 \cos(\varphi_1) \delta\varphi_1 + z_2 \cos(\varphi_2) \delta\varphi_2) \\ = 0\end{aligned}\tag{2.18}$$

Il lavoro virtuale deve essere nullo per qualunque combinazione di spostamenti virtuali consentiti dai vincoli. Poiché ci sono 2 G.d.L. i due spostamenti virtuali possono essere scelti indipendentemente l'uno dall'altro. Scegliamo di tener fermo il primo corpo e di muovere solamente il secondo. Si ottiene la combinazione $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$. Questo spostamento virtuale è solo uno tra gli infiniti ammissibili, ma se lo si applica alla 2.18 si ottiene

$$(M_2 - F_{cx} z_2 \sin(\varphi_2) + F_{cy} z_2 \cos(\varphi_2)) \delta\varphi_2 = 0\tag{2.19}$$

Ripetendo il ragionamento con una combinazione di spostamenti virtuali $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$, si ottiene la seconda equazione indipendente dalla prima

$$(M_1 - M_2 + F_{cx} z_1 \sin(\varphi_1) + F_{cy} z_1 \cos(\varphi_1)) \delta\varphi_1 = 0\tag{2.20}$$

Semplificando i due spostamenti virtuali si ottiene un sistema di due equazioni in 2 incognite: M_1 ed M_2 .

$$\begin{aligned}M_2 - F_{cx} z_2 \sin(\varphi_2) + F_{cy} z_2 \cos(\varphi_2) &= 0 \\ M_1 - M_2 + F_{cx} z_1 \sin(\varphi_1) + F_{cy} z_1 \cos(\varphi_1) &= 0\end{aligned}$$

Nel caso generale con n gradi di libertà si opera nel seguente modo

Sia f_i o una forza esterna generalizzata agente sul meccanismo (componente di una forza lungo x, lungo y od una coppia), oppure una forza d'inerzia (lungo x, lungo y oppure un coppia d'inerzia).

Di queste f_i ce ne sono n di incognite.

Sia s_i o la coordinata x od y del punto di applicazione della forza f_i , oppure l'angolo del corpo al quale la coppia è applicata.

Sia n_f il numero delle forze (od equivalentemente dei corrispettivi spostamenti virtuali)

Il lavoro virtuale, utilizzando una notazione così sintetica è

$$\sum_{i=1}^{n_f} f_i \delta s_i = 0$$

Usando una notazione matriciale

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{s} = 0 \quad (2.21)$$

dove $\mathbf{f}^T = \{ f_1 \quad \dots \quad f_{n_f} \}$ ed $\delta \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \delta s_1 \\ \vdots \\ \delta s_{n_f} \end{Bmatrix}$.

Gli spostamenti virtuali sono legati agli spostamenti virtuali delle coordinate libere. Infatti, poiché $s_i = s_i(q_1, \dots, q_n)$, si ottiene $\delta s_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial s_i}{\partial q_n} \delta q_n$. Per cui, considerando tutti gli spostamenti virtuali

$$\begin{Bmatrix} \delta s_1 \\ \vdots \\ \delta s_{n_f} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_{n_f}}{\partial q_1} & & \frac{\partial s_{n_f}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

La matrice $W_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_{n_f}}{\partial q_1} & & \frac{\partial s_{n_f}}{\partial q_n} \end{bmatrix}$ è detta matrice dei rapporti di velocità poiché vale anche la proprietà $\dot{\mathbf{s}} = W_s \dot{\mathbf{q}}$.

Sostituiamo la 2.22 nella 2.21

$$\mathbf{f}^T W_s \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.23)$$

Nota che $\mathbf{f}^T W_s$ è un vettore riga.

Poiché la scelta degli spostamenti virtuali delle coordinate libere è arbitraria, n combinazioni del tipo $\delta \mathbf{q}_1 = \{ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \}$, $\delta \mathbf{q}_2 = \{ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \}$, ..., $\delta \mathbf{q}_n = \{ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \}$. Sostituendo la prima combinazione nella 2.23, si ottiene che la prima componente del vettore $\mathbf{f}^T W_s$ deve essere nulla. Sostituendo la seconda combinazione $\delta \mathbf{q}_2$, si ottiene che la seconda componente deve essere nulla, e così via. Perciò si arriva al risultato

$$\mathbf{f}^T W_s = \{ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \}$$

che rappresenta un sistema di n equazioni nelle n incognite.

Allo stesso modo si può utilizzare la notazione

$$W_s^T \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nota che non tutte le componenti di \mathbf{f} sono incognite; alcune rappresentano forze d'inerzia ed altre rappresentano forze note.

Come si calcolano praticamente i termini della matrice delle velocità?

Un modo per farlo consiste nel sfruttare la proprietà $\dot{\mathbf{s}} = W_s \dot{\mathbf{q}}$. Se compiamo l'analisi di velocità considerando una velocità fittizia delle coordinate libere pari a $\dot{\mathbf{q}} = \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T$, significa che si sono tenute ferme tutte le coordinate libere del meccanismo tranne la prima che ha una velocità unitaria. In questo caso si ottiene

$$\dot{\mathbf{s}} = W_s \dot{\mathbf{q}} = W_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{s11} \\ W_{s21} \\ \vdots \\ W_{sn_f1} \end{pmatrix}$$

ossia, le velocità $\dot{\mathbf{s}}$ sono la prima colonna della matrice W_s . Per calcolare la seconda colonna si procede allo stesso modo. Si impone una velocità fittizia in cui tutte le coordinate libere sono ferme tranne la seconda la quale viene fatta muovere con velocità unitaria. Si effettua l'analisi di velocità calcolando le velocità di tutti i punti di interesse. Queste velocità rappresentano la seconda colonna della matrice W_s .

Una volta ricavata la matrice dei rapporti di velocità, risulta molto semplice risolvere il sistema

$$W_s^T \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scomponiamo il vettore delle forze, dividendo le n forze incognite (raggruppate nel vettore \mathbf{f}_1), dalle forze note (raggruppate nel vettore \mathbf{f}_2). \mathbf{f}_1 ha n componenti, mentre \mathbf{f}_2 ha $n_f - n$ componenti.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}$$

Dividiamo la matrice dei rapporti di velocità nel seguente modo

$$W_s^T = [W_{s1}^T \quad W_{s2}^T]$$

dove W_{s1}^T è un blocco della matrice W_s^T (le n righe per le prime n colonne), mentre W_{s2}^T è il blocco di destra della matrice W_s^T , cioè le n righe per le ultime $n_f - n$ colonne. Nota che la matrice W_{s1}^T è quadrata.

Con questa notazione il sistema viene riscritto

$$\begin{aligned} W_s^T \mathbf{f} &= [W_{s1}^T \quad W_{s2}^T] \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \\ &= W_{s1}^T \mathbf{f}_1 + W_{s2}^T \mathbf{f}_2 = 0 \end{aligned}$$

Per cui il risultato cercato è

$$\mathbf{f}_1 = - (W_{s1}^T)^{-1} W_{s2}^T \mathbf{f}_2$$

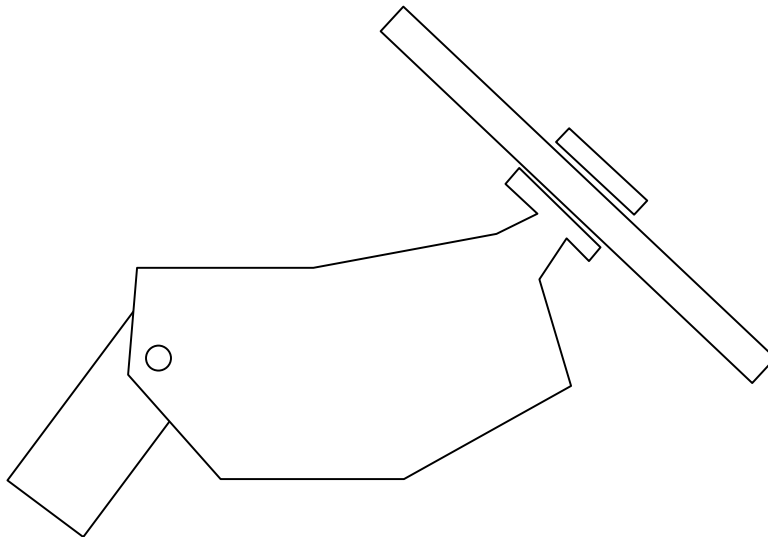
Capitolo 3

Metodo Newtoniano

Consideriamo sempre il caso piano. Il concetto che sta dietro al metodo newtoniano è molto semplice. Il meccanismo viene scomposto ed ogni singolo membro viene considerato come un corpo rigido a sé. In quanto tale, le forze di reazione che gli altri membri esercitano su di esso vengono considerate forze esterne. Individuate tutte le forze esterne, basta imporre l'equilibrio dinamico. La parte più delicata riguarda l'individuazione delle forze esterne.

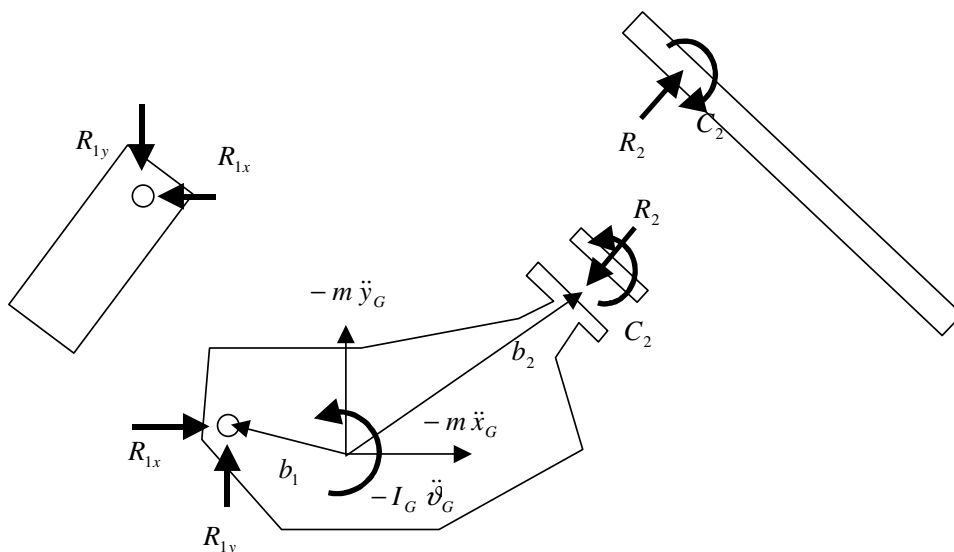
3.1 Forze d'inerzia e reazioni vincolari

Consideriamo il membro in figura che fa parte di un meccanismo più complesso.



Il membro è vincolato agli altri due membri contigui attraverso una coppia rotoidale ed una coppia prismatica.

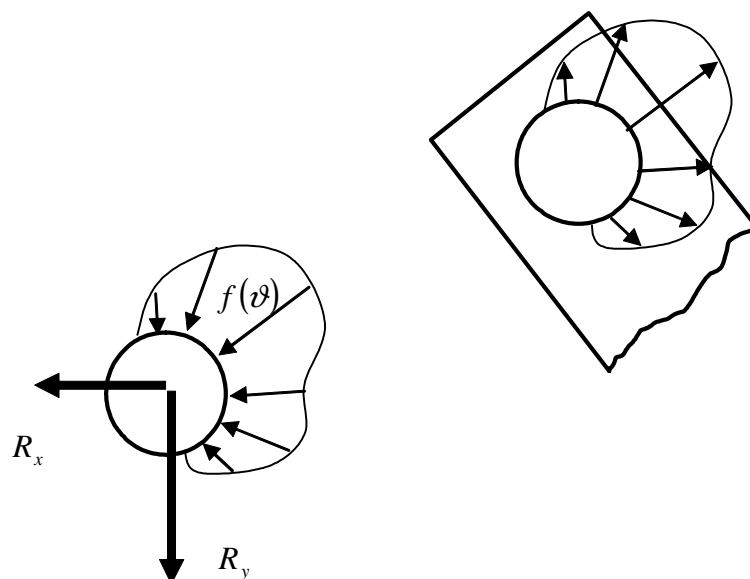
La coppia rotoidale rappresenta un vincolo. Essa impedisce a due punti (uno di un corpo ed uno di un altro corpo) di non manifestare moti relativi tra di loro. Intuitivamente si capisce che un corpo esercita sull'altro una forza. E per il principio di azione e reazione, la stessa forza viene percepita dal primo corpo. Immaginiamo di scomporre il meccanismo ed inseriamo le forze di reazione dovute alle coppie cinematiche



Le forze di reazione della coppia rotoidale sono uguali e contrarie, nel senso che, se il corpo di sinistra esercita sul corpo centrale una forza lungo x pari ad R_x , il corpo centrale esercita su quello di sinistra una forza pari a $-R_x$. Affinché una coppia rotoidale impedisca il moto relativo lungo x ed y di due punti, devono nascere delle reazioni lungo i due assi.

Per la coppia prismatica le cose sono diverse. Poiché il pattino può scorrere liberamente lungo la sua sede, i corpi non si scambiano alcuna forza lungo quella direzione di scorrimento. Ancora, osservando la figura, affinché il corpo di destra possa scorrere, quello di sinistra non deve esercitare alcuna forza lungo la direzione di scorrimento. Invece il corpo di destra non può ruotare. Per impedirlo, il corpo di sinistra esercita sul corpo di destra una coppia di reazione. Inoltre il corpo di destra non può traslare lungo la direzione perpendicolare all'asse di scorrimento. Da cui si capisce come sia presente anche una forza di reazione R come in figura.

In realtà in luogo di forze e momenti è più corretto parlare di risultante e momento risultante delle azioni che un corpo esercita sull'altro.



In figura è rappresentato un accoppiamento rotoidale. A sinistra c'è il perno, mentre a destra è rappresentata la sede. I due corpi sono distanziati per semplicità grafica, ma si intende che il perno ruota all'interno della sede. La superficie della sede esercita sulla superficie del perno una pressione locale $f(\vartheta)$ che varia al variare dell'angolo ϑ ed è perpendicolare alla superficie di contatto. La risultante di questa pressione è l'incognita che interessa nell'analisi dinamica (per quanto riguarda il metodo newtoniano). Le risultanti sono (notare che la pressione è assunta positiva quando comprime la superficie del perno)

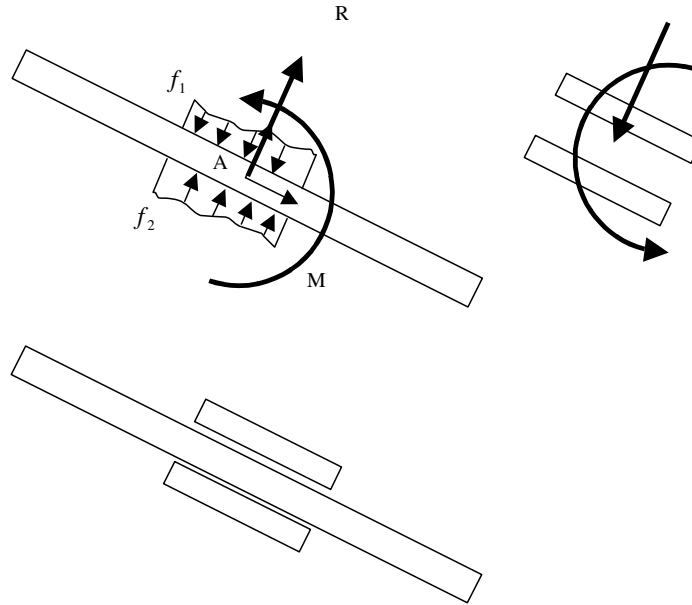
$$R_x = \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos(\vartheta) r l d\vartheta \quad (3.1)$$

$$R_y = \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin(\vartheta) r l d\vartheta$$

(r è il raggio del perno ed l è la lunghezza del perno).

Il metodo newtoniano porta al calcolo delle reazioni vincolari e delle forze attive che generano il moto. Attraverso il metodo newtoniano non si riesce a stabilire come siano puntualmente distribuite le pressioni di reazione tra i due corpi a contatto.

Vediamo come viene realizzata una coppia prismatica.



Nella figura soprastante, l'asta più lunga che appartiene ad un corpo è vincolata a scorrere all'interno di un pattino che appartiene ad un'altro corpo. Per il particolare vincolo, nell'ipotesi che non vi sia attrito, i due corpi si scambiano delle reazioni che sono perpendicolari all'asse di scorrimento lungo tutta la superficie di contatto. Poniamo un sistema di riferimento nel punto A. Il versore del sistema di riferimento che chiameremo s è orientato lungo l'asse di scorrimento; l è perpendicolare. In figura sono rappresentate le pressioni puntuali esercitate dal pattino sul corpo che scorre su ambo i lati. Queste pressioni variano lungo l'asse e quelle di un lato sono diverse da quelle dell'altro. Indichiamole con $f_1(s)$ ed $f_2(s)$

La risultante lungo la perpendicolare all'asse è data da

$$R = \int_{s_i}^{s_f} f_2(s) t ds - \int_{s_i}^{s_f} f_1(s) t ds$$

dove s_i ed s_f sono gli estremi del pattino e t è lo spessore del pattino. Il momento risultante rispetto al polo A è

$$M = \int_{s_i}^{s_f} s f_2(s) t ds - \int_{s_i}^{s_f} s f_1(s) t ds$$

Perciò le azioni che i due corpi si scambiano sono equivalenti ad una coppia ed una forza applicata nel punto A. La forza di reazione avrà una componente lungo x ed una lungo y : $R = \{R_x, R_y\}$. Il metodo Newtoniano permette di calcolare la risultante ed il momento risultante delle azioni calcolate, ma non

il valore della pressione puntuale. La distribuzione della pressione può essere calcolata attraverso la teoria della meccanica del contatto.

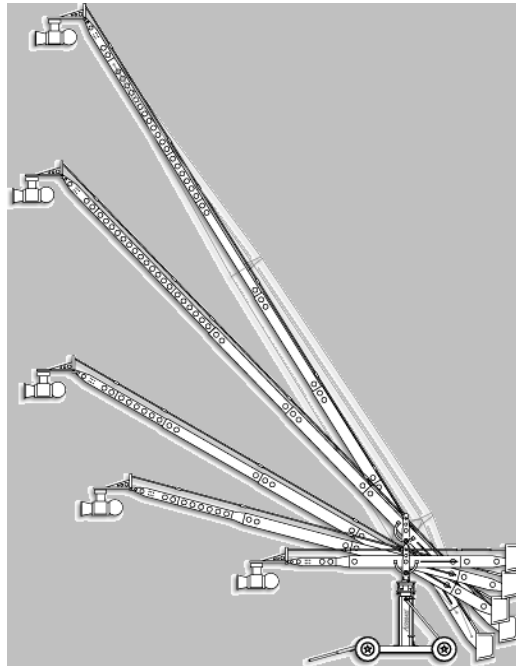
Riconsideriamo il corpo nella prima figura. Per esso si possono scrivere 3 equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} R_{1x} + F_{inx} + R_{2x} &= 0 \\ R_{1y} + F_{iny} + R_{2y} &= 0 \\ C_2 + M_{in} + b_1 \wedge R_1 + b_2 \wedge R_2 &= 0 \end{aligned}$$

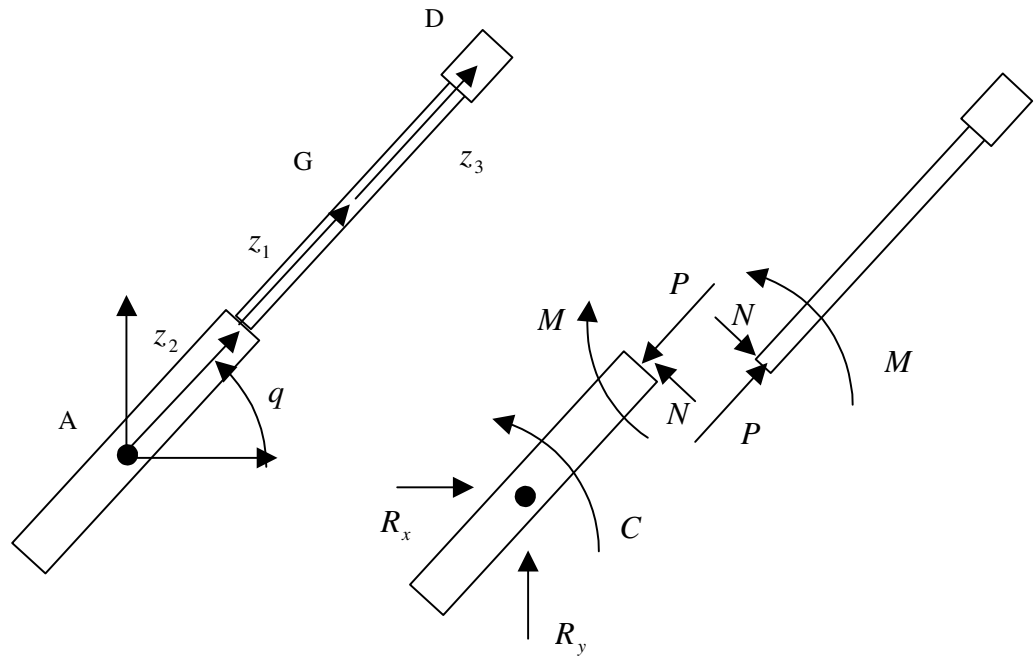
dove $F_{inx} = -m \ddot{x}_G$, $F_{iny} = -m \ddot{y}_G$ ed $M_{in} = -I_G \ddot{\theta}$. La terza equazione rappresenta l'equilibrio alla rotazione rispetto al baricentro del corpo. Si poteva scegliere qualsiasi altro polo rispetto al quale applicare l'equilibrio dinamico. b_1 e b_2 sono i bracci delle reazioni rispetto al baricentro. Di queste equazioni se ne possono scrivere tante quanti sono i corpi di cui è composto il meccanismo. Il vantaggio del metodo Newtoniano rispetto al metodo energetico è che fornisce direttamente il valore delle reazioni vincolari. Lo svantaggio è che aumentano il numero di equazioni e quindi le dimensioni del sistema.

ESEMPIO

Consideriamo un braccio telescopico per applicazioni cinematografiche. Calcolare le reazioni vincolari sul primo troncone telescopico, la coppia necessaria a sollevare il braccio nonché la forza di spinta per estendere il troncone.



Il meccanismo viene così schematizzato (per comodità è stato capovolto a destra)



Il baricentro del primo troncone coincide con il punto di rotazione A. Il baricentro del tratto estendibile è nel punto G. La telecamera è posta nel punto D. Nella figura di sinistra sono rappresentate le forze di reazione e le forze esterne applicate al sistema: la coppia C e la forza di allungamento P. (Si noti che il sistema ha 2 GdL)

DATI: $q = 48^\circ$; $z_1 = 1,1m$; $z_2 = 1,2m$; $z_3 = 1,5m$; $I_A = 34Kgm^2$ $I_G = 32Kgm^2$ $m_G = 98Kg$; $m_D = 10Kg$; $m_A = 70Kg$;

$$\dot{q} = 10^\circ/s; \quad \dot{z}_1 = 0,5m/s;$$

$$\ddot{q} = 1^\circ/s^2; \quad \ddot{z}_1 = 0,1m/s^2;$$

Si calcolano le forze d'inerzia e le forze peso

$$\begin{aligned}
M_{inA} &= -I_A \ddot{q} \\
F_{inGx} &= -m_G \ddot{x}_G \\
F_{inGy} &= -m_G \ddot{y}_G \\
M_{inG} &= -I_G \ddot{q} \\
F_{inDx} &= -m_D \ddot{x}_D \\
F_{inDy} &= -m_D \ddot{y}_D \\
p_G &= -m_G g \\
p_D &= -m_D g \\
p_A &= -m_A g
\end{aligned}$$

Notare che i vettori che rappresentano le forze peso sono orientati verso le y positive; notare inoltre che la forza d'inerzia alla rotazione della telecamera non compare in quanto la sua massa è concentrata nel punto D. Calcoliamo ora le grandezze di interesse

$$\begin{aligned}
G &= (z_1 + z_2) \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,34 \\ 1,49 \end{Bmatrix} m \\
\dot{G} &= \dot{z}_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + (z_1 + z_2) \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} = \begin{Bmatrix} 0,075 \\ 0,605 \end{Bmatrix} m/s \\
\ddot{G} &= \ddot{z}_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + \dot{z}_1 \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} - (z_1 + z_2) \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} \dot{q}^2 \\
&\quad + (z_1 + z_2) \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \ddot{q} = \begin{Bmatrix} -0,064 \\ 0,11 \end{Bmatrix} m/s^2
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il punto D

$$\begin{aligned}
D &= (z_1 + z_2 + z_3) \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2,23 \end{Bmatrix} m \\
\dot{D} &= \dot{z}_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + (z_1 + z_2 + z_3) \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} = \begin{Bmatrix} -0,054 \\ 0,722 \end{Bmatrix} m/s \\
\ddot{D} &= \ddot{z}_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + \dot{z}_1 \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} - (z_1 + z_2 + z_3) \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} \dot{q}^2 \\
&\quad + (z_1 + z_2 + z_3) \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \ddot{q} = \begin{Bmatrix} -0,098 \\ 0,099 \end{Bmatrix} m/s^2
\end{aligned}$$

Equazioni di equilibrio applicate al primo corpo

$$\begin{aligned}
R_x - P \cos(q) - N \sin(q) &= 0 \\
R_y - P \sin(q) + N \cos(q) + p_A &= 0 \\
C + M_{inA} - M + N z_2 &= 0
\end{aligned}$$

Notare che l'ultima equazione rappresenta l'equilibrio dei momenti rispetto al polo A; di conseguenza le reazioni R_x, R_y e la forza P non danno contributo (avendo braccio nullo).

Equilibrio del secondo corpo

$$\begin{aligned} P \cos(q) + F_{inGx} + F_{inDx} + N \sin(q) &= 0 \\ P \sin(q) + F_{inGy} + F_{inDy} - N \cos(q) + p_G + p_D &= 0 \\ M + M_{inG} + N z_1 + (p_D + F_{inDy}) z_3 \cos(q) - F_{inDx} z_3 \sin(q) &= 0 \end{aligned}$$

L'equilibrio ai momenti è stato calcolato rispetto al polo G. Poniamo il sistema in forma matriciale

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(q) & -\sin(q) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin(q) & \cos(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cos(q) & \sin(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(q) & -\cos(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ P \\ N \\ C \\ M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_A \\ -M_{inA} \\ -F_{inGx} - F_{inDx} \\ -F_{inGy} - F_{inDy} - p_G - p_D \\ -M_{inG} - (p_D + F_{inDy}) z_3 \cos(q) + F_{inDx} z_3 \sin(q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Invertendo il sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ P \\ N \\ C \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \text{ N} \\ 1758 \text{ N} \\ 791 \text{ N} \\ -722 \text{ N} \\ 1512 \text{ Nm} \\ 789 \text{ Nm} \end{pmatrix}$$

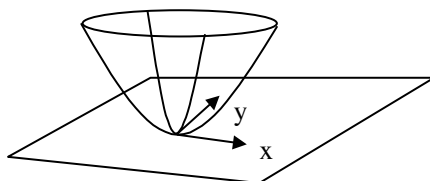
3.1.1 Meccanica del contatto

Ci si potrebbe chiedere come sono distribuite le pressioni le cui azioni determinano la reazione di contatto della 3.1. Il calcolo della distribuzione delle pressioni non è di facile soluzione. E' necessario introdurre il concetto di elasticità del materiale. Una teoria interessante, che fa uso di ipotesi semplificative, è la *Teoria Hertziana*. Essa si applica quando si ha a che fare con un contatto puntiforme (sfera contro piano o sfera contro sede sferica) o lineare (cilindro contro cilindro). Le altre ipotesi introdotte sono:

- i solidi in contatto sono isotropi;
- le deformazioni sono elastiche;

- le dimensioni dell'area di contatto sono piccole rispetto al raggio di curvatura dei corpi non deformati;

Prendiamo in considerazione un solido che va in contatto con un piano, come in figura.



Al solido per il momento non è applicata alcuna forza, perciò si può pensare che il contatto sia puntiforme. La superficie del solido, rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel punto di contatto è espressa dalla relazione

$$z = f(x, y)$$

Poiché nel punto di contatto il piano è tangente alla superficie, le derivate parziali della funzione devono essere nulle

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

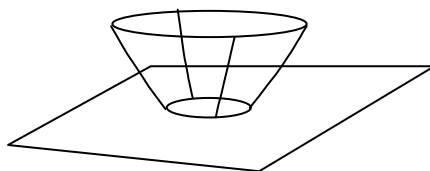
Si ipotizza inoltre che il sistema di riferimento sia orientato in maniera tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$. Si può dimostrare che esiste sempre una orientazione del sistema di riferimento per cui l'ultima relazione sia valida.

Sviluppando attraverso la serie di Taylor la funzione, troncando al secondo ordine, si ottiene

$$z \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) y^2$$

Da quest'ultima relazione si deduce che le curve di livello del solido (cioè le curve che si generano dall'intersezione del solido con un piano parallelo al piano di contatto), in prossimità del punto di contatto sono ellissi.

Applichiamo una forza P al corpo perpendicolarmente al piano. Il corpo inizierà a deformarsi ed il contatto non sarà più puntiforme. E' sostanzialmente corretto pensare che anche le superfici di contatto abbiano forma ellittica



Hertz dimostrò che la distribuzione delle pressioni è data dalla relazione

$$p = \sigma = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (3.2)$$

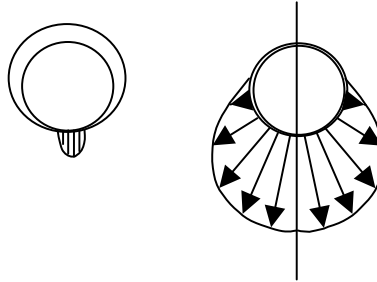
dove a e b sono i semiassi dell'ellisse di contatto.

Questo risultato è valido anche nel caso in cui il corpo sia in contatto con una superficie diversa da un piano. Questo è il caso ad esempio di un perno all'interno di un alloggiamento cilindrico o di una sfera a contatto con la pista di un cuscinetto.

Nel caso di un cilindro a contatto con una sede cilindrica, l'eq. 3.2 degenera nella seguente

$$p = \sigma = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

in quanto uno dei due assi dell'ellisse tende all'infinito. Attraverso questa teoria è possibile calcolare la pressione puntuale che il perno trasmette alla sede. Notare però che quando perno e sede hanno all'incirca lo stesso raggio, la superficie di contatto aumenta e viene così a mancare un'ipotesi fondamentale su cui si fonda la teoria di Hertz. In questi casi è necessario indagare la distribuzione delle pressioni con altri strumenti, ad esempio attraverso una analisi agli elementi finiti.

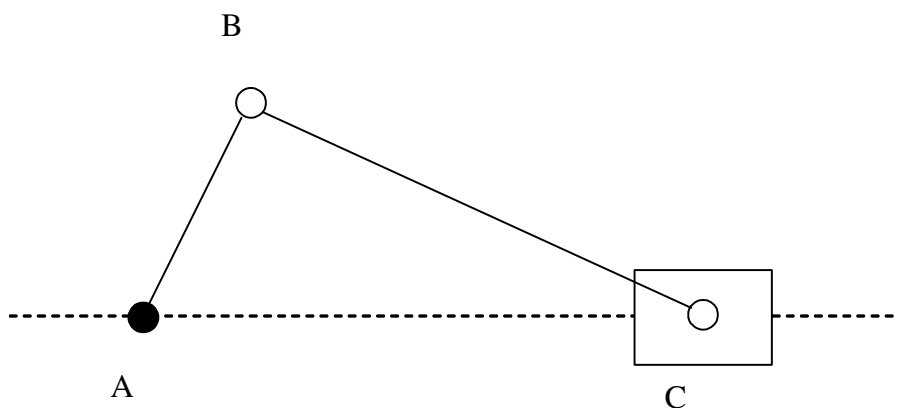


Capitolo 4

Sintesi del volano

Per introdurre l'argomento appoggiamoci ad un semplice esempio: un manovellismo centrato.

Tutti gli organi del meccanismo hanno massa non trascurabile.



L'energia cinetica del meccanismo sarà

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_{BC} (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_{BC} \dot{\vartheta}_{BC}^2 + \frac{1}{2} m_C \dot{x}_C^2$$

dove I_A è il momento d'inerzia della manovella AB rispetto al polo A, m_{BC} ed m_C sono le masse della biella BC e del pattino C, q è la posizione angolare della manovella, (x_G, y_G) sono il baricentro della biella ed x_C è la posizione del pattino. Introducendo i rapporti di trasmissione riferiti alla coordinata libera q l'energia cinetica può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} I_A \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_{BC} (\tau_{x_G, q}^2 + \tau_{y_G, q}^2) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_{BC} \tau_{\vartheta_{BC}, q}^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_C \tau_{x_C, q}^2 \dot{q}^2 = \\
&= \frac{1}{2} (I_A + m_{BC} \tau_{x_G, q}^2 + m_{BC} \tau_{y_G, q}^2 + I_{BC} \tau_{\vartheta_{BC}, q}^2 + m_C \tau_{x_C, q}^2) \dot{q}^2 = \\
&= \frac{1}{2} A \dot{q}^2
\end{aligned}$$

Il termine tra parentesi rotonda A viene definito *inerzia ridotta* alla coordinata libera q . Esso è dato dalla somma delle varie inerzie moltiplicate per il rapporto di trasmissione al quadrato. Viene detta inerzia ridotta poiché congloba tutti i contributi delle varie inerzie, sostituendoli con uno solo, come se il meccanismo, ai fini dinamici, fosse assimilabile ad uno fittizio composto da una sola manovella con momento d'inerzia variabile pari ad A . Poiché i rapporti di trasmissione dipendono solamente dalla configurazione cinematica che varia con q , anche l'inerzia ridotta è una funzione di q

$$A = A(q)$$

4.1 Cenni sulla soluzione del moto attraverso l'equazione di Lagrange

Supponiamo che il meccanismo sia posto nel piano orizzontale, in maniera tale che l'energia potenziale rimanga costante. Sulla manovella è presente una coppia motrice pari a C_m , mentre sul pattino è presente una forza di attrito costante pari ad f_a . Utilizziamo l'equazione di Lagrange per ricavare l'equazione del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

dove $L = T - V$ è la funzione di Lagrange. Nel nostro caso, non essendoci energia potenziale, si ha $L = T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2$. Q è il lavoro delle forze non conservative rapportato a q , cioè $Q = C_m - f_a \tau_{x_C, q}$. Esplicitiamo l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 \right) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (A(q) \dot{q}) - \frac{1}{2} \frac{dA}{dq} \dot{q}^2 &= \frac{dA}{dq} \dot{q}^2 + A(q) \ddot{q} - \frac{1}{2} \frac{dA}{dq} \dot{q}^2 \quad (4.2) \\
&= A(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dA}{dq} \dot{q}^2 = \\
&= C_m - f_a \tau_{x_C, q}
\end{aligned}$$

Questa equazione è integrabile e fornisce un certo risultato $q = q(t)$. L'integrazione può essere fatta per via numerica, e non sempre è di facile soluzione poiché si tratta di un'equazione non lineare.

4.2 Ipotesi semplificativa che porta alla conservazione dell'energia cinetica

Come introdotto all'inizio del paragrafo precedente, supponiamo che il meccanismo sia posto nel piano orizzontale, in maniera tale che l'energia potenziale rimanga costante. Sulla manovella è presente una coppia motrice pari a C_m , mentre sul pattino è presente una forza di attrito costante pari ad f_a .

Introduciamo un'ipotesi che avrà delle conseguenze interessanti. Ipotizziamo che per un certo angolo di manovella \bar{q} percorso, il lavoro fatto dalla coppia motrice sia uguale all'energia dissipata dalla forza d'attrito, cioè

$$\int_0^{\bar{q}} C_m dq = \int_0^{x_C(\bar{q})} f_a dx_C \quad (4.3)$$

Al di là dei formalismi matematici per esprimere il concetto, ciò che importa è che durante il moto tutta l'energia fornita dalla coppia motrice viene spesa per vincere le forze di attrito. Se perciò il meccanismo, all'istante iniziale, ha una certa velocità e quindi una certa energia cinetica, questa energia cinetica si manterrà costante anche negli istanti successivi, in quanto non viene fornita altra energia al sistema. Quando il meccanismo transita per il punto iniziale anche la velocità sarà uguale a quella di partenza. Il fatto che ogni volta che la manovella transita per uno stesso angolo la velocità sia uguale, non significa che la velocità durante la rotazione sia costante. Indichiamo con t_p il periodo di tempo che la manovella impiega a fare un giro. Per la periodicità detta vale $\dot{q}(t) = \dot{q}(t + t_p)$.

Proviamo a trovare la soluzione del moto. (In questo caso particolare si riesce a ricavarla per via analitica senza ricorrere all'integrazione numerica) Come condizione iniziale supponiamo che la manovella sia disposta orizzontalmente ($q_0 = 0$) con una velocità angolare iniziale pari a \dot{q}_0 . Per il bilancio energetico, il lavoro fatto dalle forze esterne deve essere pari all'incremento di energia cinetica del meccanismo. Perciò quando la manovella avrà una posizione q vale la relazione

$$L_{est} = T(q) - T(0)$$

dove il lavoro delle forze esterne è nullo per l'eq. 4.3 $L_{est} = \int_0^q C_m dq - \int_0^{x_C(q)} f_a dx_C = 0$.

Come risultato si ha che l'energia cinetica iniziale rimane costante durante tutto il moto della manovella. Questo risultato è piuttosto intuitivo. Se tutto il lavoro della coppia motrice viene usato per vincere la forza di attrito, è chiaro che l'energia (e nel nostro caso l'energia del sistema è solo cinetica) del meccanismo

si mantiene invariata. Dalla costanza dell'energia cinetica si può calcolare la velocità della manovella durante il ciclo

$$T(q) = T(0) \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}A(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2}A(0) \dot{q}_0^2 \Rightarrow \dot{q} = \sqrt{\frac{A(0)}{A(q)}} \dot{q}_0$$

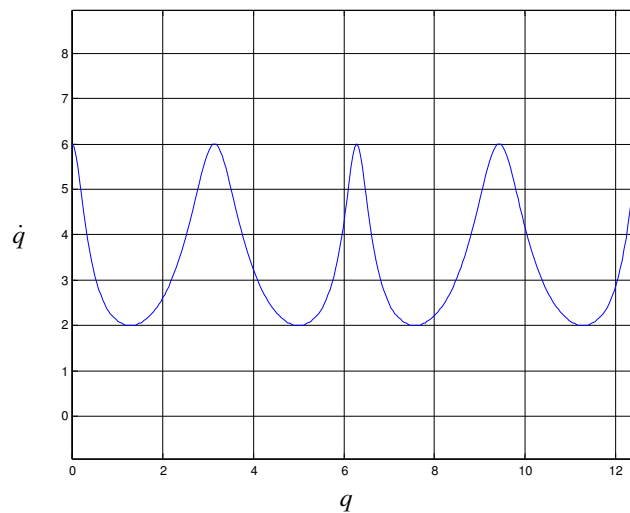
Calcoliamo la velocità in un esempio concreto. Consideriamo un meccanismo biella manovella in cui $AB = 0.4 \text{ m}$; $BC = 1,2 \text{ m}$; $I_A = 0.2667 \text{ Kg m}^2$; $m_C = 12 \text{ Kg}$. La massa della biella BC è trascurabile. Il velocità angolare della manovella quando $q = 0$ è $\dot{q}_0 = 6 \text{ rad/s}$. Il rapporto di trasmissione della coordinata x del pattino rispetto alla coordinata libera è (basta fare una analisi di velocità)

$$\tau_{x_C, q} = (\cos(q) \tan(\varphi_2) - \sin(q)) AB$$

dove φ_2 è la posizione angolare della manovella e dall'analisi cinematica di posizione si ricava $\varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{AB}{BC} \sin(q)\right)$. Conoscendo il rapporto di trasmissione in funzione dell'angolo di manovella si calcola l'inerzia ridotta

$$A(q) = I_A + m_C \tau_{x_C, q}^2$$

A questo punto si ha tutto per graficare l'andamento della velocità angolare in funzione dell'angolo q utilizzando la 6.1



Il grafico è stato ricavato con il seguente programma in matlab
%DATI

```

AB=0.4;
BC=1.2;
IA=0.2667;
mC=12
qpunto0=6
n=300;
q=0;
% calcolo di A0
% quando la manovella è orizzontale il rapporto di trasmissione è
nullo
A0=IA;
delta_q=2*2*pi/n
for i=1:n
phi2=-asin((AB/BC)*sin(q));
tau=(cos(q)*tan(phi2)-sin(q))*AB;
A=IA+mC*tau^2;
vet_q(i)=q;
vet_qpunto(i)=sqrt(A0/A)*qpunto0;
q=q+delta_q;
end
plot(vet_q,vet_qpunto)
grid
axis equal

```

Si nota che la velocità della manovella varia tra un massimo di 6 rad/s ed un minimo di 2 rad/s . In molte applicazioni, affinché il motore non sia soggetto a forti cambiamenti di velocità è richiesto che l'escursione della velocità sia contenuta all'interno di alcuni valori ben prefissati. Questo limite è espresso matematicamente nel seguente modo. Si indica la velocità massima e minima con \dot{q}_{\max} , \dot{q}_{\min} . Si definisce *velocità media* la quantità $\dot{q}_{\text{med}} = \frac{\dot{q}_{\max} + \dot{q}_{\min}}{2}$. Il *grado di irregolarità* della velocità angolare è definito come

$$g = \frac{\dot{q}_{\max} - \dot{q}_{\min}}{\dot{q}_{\text{med}}}$$

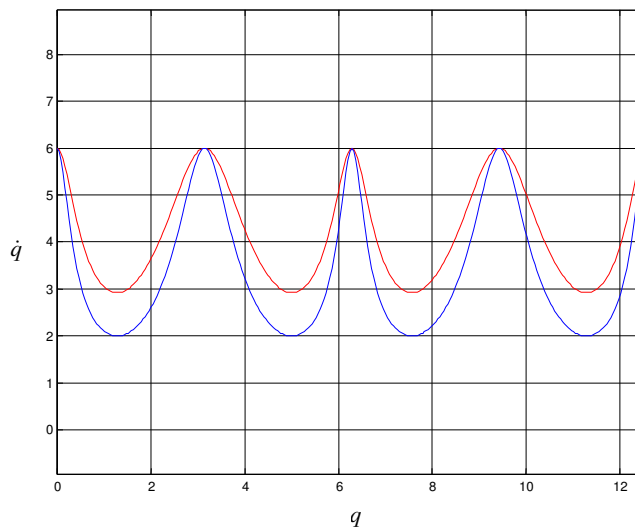
Nell'esempio nostro il grado di irregolarità è $g = \frac{6-2}{4} = 1$;

Una tecnica adottata per diminuire il grado di irregolarità consiste nell'aumentare la componente inerziale costante dell'inerzia ridotta. Fisicamente questo viene ottenuto calettando un disco alla manovella. Se il disco ha inerzia I_D , la nuova inerzia ridotta diventa $A(q) + I_D$ e l'andamento della velocità è dato dalla formula

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{A(0) + I_D}{A(q) + I_D}} \dot{q}_0 \quad (4.5)$$

Si vede dalla formula che all'aumentare di I_D la velocità della manovella durante il moto tende ad avvicinarsi a quella iniziale, diminuendo quindi il grado di

irregolarità. Continuando l'esempio, calettiamo un disco avente momento d'inerzia $I_D = 0.2Kgm^2$. Modificando il programma (aggiornando l'inerzia ridotta) si ottiene il nuovo andamento della velocità



graficato in rosso. Si vede come la velocità minima sia arrivata al valore di $2,925rad/s$. Il grado di irregolarità è sceso al valore $g = 0,69$. I gradi di regolarità richiesti dipendono dal tipo di applicazione. Qui di seguito viene fornita una tabella.

Tipologia di macchina	pompe e ventilatori	motori	alternatori
g richiesto	$\frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$	$\frac{1}{100} \div \frac{1}{300}$	$\frac{1}{300}$

Nel nostro esempio il disco che viene detto volano è stato calettato alla manovella di un manovellismo centrato per uniformare il moto. Lo stesso concetto può essere applicato anche a macchine diverse, in tutti i casi in cui la macchina operi in maniera ciclica e l'inerzia equivalente del meccanismo non sia costante.

Notare che il grado di irregolarità non dipende dalla velocità iniziale. Infatti, pensiamo ad esempio, di considerare un sistema con una velocità iniziale \dot{q}_{01} aumentata di k volte rispetto a quella utilizzata nella formula 4.5, cioè $\dot{q}_{01} = k \dot{q}_0$. Il nuovo grafico dell'andamento della velocità sarà dato sempre dalla consueta formula

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sqrt{\frac{A(0) + I_D}{A(q) + I_D}} \dot{q}_{01} = \\ &= \sqrt{\frac{A(0) + I_D}{A(q) + I_D}} k \dot{q}_0 \end{aligned}$$

4.2. IPOTESI SEMPLIFICATIVA CHE PORTA ALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA 53

Di conseguenza anche le velocità massime nuove saranno k volte le velocità massime e minime ottenuta con velocità iniziale pari a \dot{q}_0

$$\begin{aligned}\dot{q}_{\max 1} &= k \dot{q}_{\max} \\ \dot{q}_{\min 1} &= k \dot{q}_{\min}\end{aligned}$$

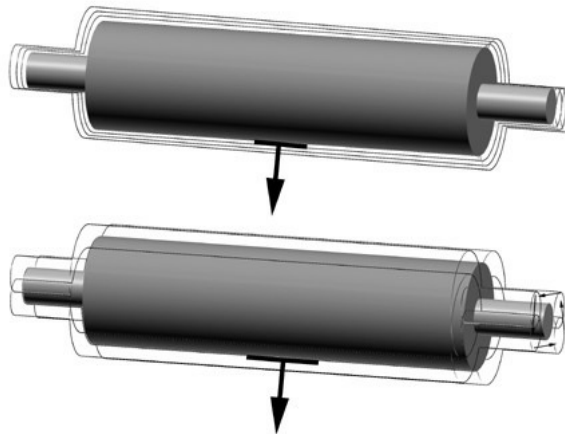
E' vero che la differenza tra velocità massima e minima è adesso k volte quella precedente $\dot{q}_{\max 1} - \dot{q}_{\min 1} = k (\dot{q}_{\max} - \dot{q}_{\min})$, però il grado di irregolarità rimane inalterato

$$g = \frac{\dot{q}_{\max 1} - \dot{q}_{\min 1}}{(\dot{q}_{\max 1} + \dot{q}_{\min 1})/2} = \frac{\dot{q}_{\max} - \dot{q}_{\min}}{(\dot{q}_{\max} + \dot{q}_{\min})/2}$$

Capitolo 5

Bilanciamento di Rotori

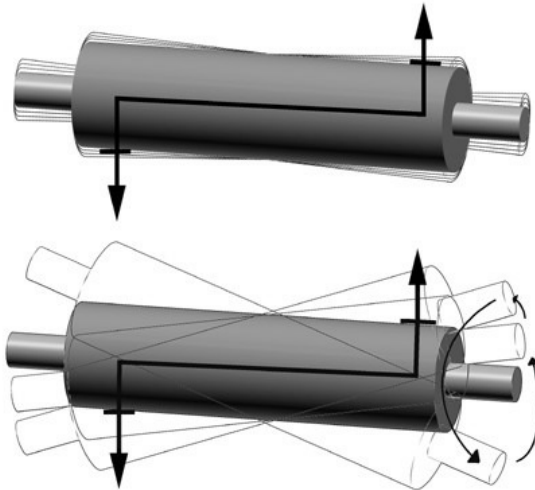
In molte applicazioni sono presenti rotori di dimensioni considerevoli posti in rotazione a velocità costante. Basti pensare a turbine, ventilatori, le ruote stesse di automobili. Se i rotori non sono perfettamente bilanciati, lo squilibrio introduce delle forze inerziali centrifughe che si scaricano sui supporti. Tali forze sono fonte di vibrazione e determinano una sollecitazione armonica che riduce la vita dei sostegni (per fatica). Si parla di *sbilanciamento statico* quando il baricentro del rotore non passa per l'asse di rotazione. In questo caso, il rotore, lasciato libero di ruotare, si comporterà come un pendolo, oscillando fintantoché il baricentro non sarà sul piano verticale passante per l'asse di rotazione.



statico.jpg

Supponiamo di inserire una massa aggiuntiva appropriata (vincolandola al rotore) in qualunque piano normale all'asse di rotazione in maniera tale da riportare il baricentro sull'asse di rotazione. In qualunque posizione angolare si ponga ora il rotore, esso rimarrà in tale posizione. Si dice che il rotore è equilibrato staticamente. Ma se il rotore viene posto in rotazione, la dissimetria

delle masse introduce delle forze inerziali che tendono a sbilanciare il rotore come in figura. In questo caso il rotore viene detto *sbilanciato dinamicamente*.

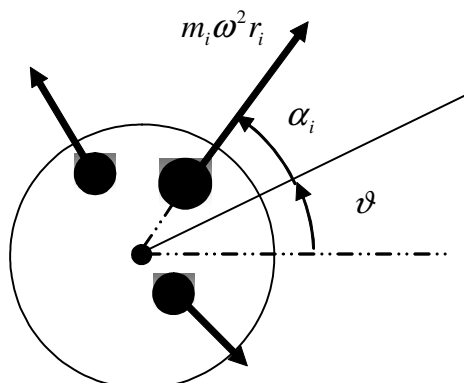


dinamico.jpg

Solitamente ci si accontenta di equilibrare staticamente il rotore quando si ha a che fare con rotori molto corti rispetto al diametro del rotore. Per alberi lunghi è richiesto in ogni caso il bilanciamento dinamico.

5.1 Bilanciamento statico

Prima di comprendere come intervenire per annullare lo sbilanciamento statico, analizziamo che tipo di sollecitazione esercita un rotore sbilanciato sui supporti. Poniamoci nel piano perpendicolare all'asse di rotazione. Supponiamo che sul rotore di massa uniforme (quindi con baricentro appartenente all'asse di rotazione) siano presenti delle masse sbilancianti. Non sono conosciuti né il valore delle masse, né la loro posizione. L'obiettivo del bilanciamento è quello di calettare una ulteriore massa in maniera tale da bilanciare staticamente il sistema.



Ogni massa sbilanciante introduce una forza centrifuga in modulo pari ad $m_i \omega^2 r_i$, dove m_i è il valore della massa, $\omega = \dot{\vartheta}$ è la velocità di rotazione (il rotore ruota a velocità costante) ed r_i è la distanza della massa dal centro. α_i è la posizione angolare della massa sbilanciante rispetto ad un riferimento noto del rotore. Nel problema del bilanciamento non interessa conoscere l'entità di tutte queste masse e come sono disposte; inoltre, nella maggioranza dei casi non si hanno masse puntiformi, ma distribuzioni di massa. Ciò che importa è l'effetto complessivo di tutte le masse.

Le componenti lungo x e lungo y della somma delle forze centrifughe delle masse sbilancianti (forze che agiscono sul rotore) sono date dalla formula

$$F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \sum_i m_i \omega^2 r_i \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta + \alpha_i) \\ \sin(\vartheta + \alpha_i) \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

dove ϑ è la posizione angolare del rotore, cioè la posizione angolare del riferimento (associato al rotore) rispetto all'orizzontale.

Questo sistema di masse ha lo stesso effetto dinamico di un'unica massa equivalente posta nel baricentro del sistema. La stessa forza data dall'eq. 5.1, sarebbe quindi prodotta da un'unica massa sbilanciante (il cui valore è $m_{eq} = \sum_i m_i$) posizionata nel baricentro del sistema costituito da tutte le masse sbilancianti. Questa massa equivalente introdurrebbe una forza centrifuga agente sul rotore pari a

$$F = m_{eq} \omega^2 r_G \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta + \alpha_G) \\ \sin(\vartheta + \alpha_G) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

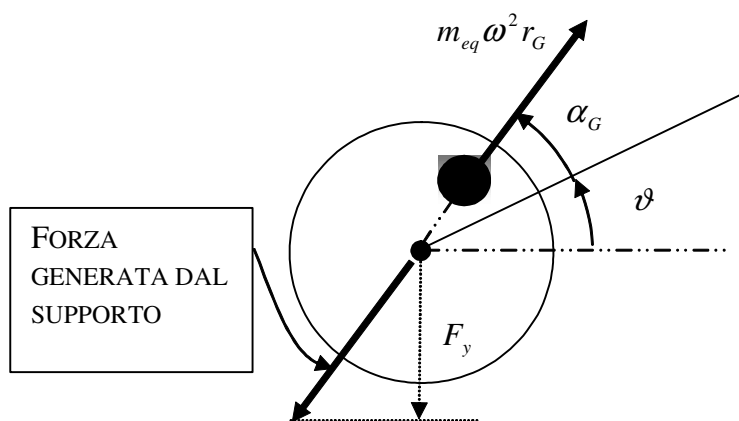
dove ed r_G è la distanza del baricentro del sistema delle masse sbilancianti dal centro di rotazione. α_G è la posizione angolare del baricentro rispetto al riferimento.

Per quanto detto le eq. 5.1 e 5.2 forniscono lo stesso valore al variare della posizione angolare ϑ del rotore. Si ribadisce che non sono note né le posizioni delle masse sbilancianti, né tanto meno la posizione angolare della massa sbilanciante equivalente od il suo valore.

In notazione complessa la 5.2 diventa

$$F = m_{eq} \omega^2 r_G e^{j \alpha_G} e^{j \vartheta} \quad (5.3)$$

Perciò $F = \omega^2 m_{eq} r_G e^{j \alpha_G} e^{j \vartheta}$ è una forza che ruota con l'angolo ϑ , proporzionale al quadrato della velocità angolare. Dato che l'asse di rotazione del rotore non si muove, il perno al quale è vincolato il rotore deve esercitare una forza uguale e contraria a quella fornita dalla eq. 5.3. L'equilibrio delle forze è rappresentato nella figura seguente.

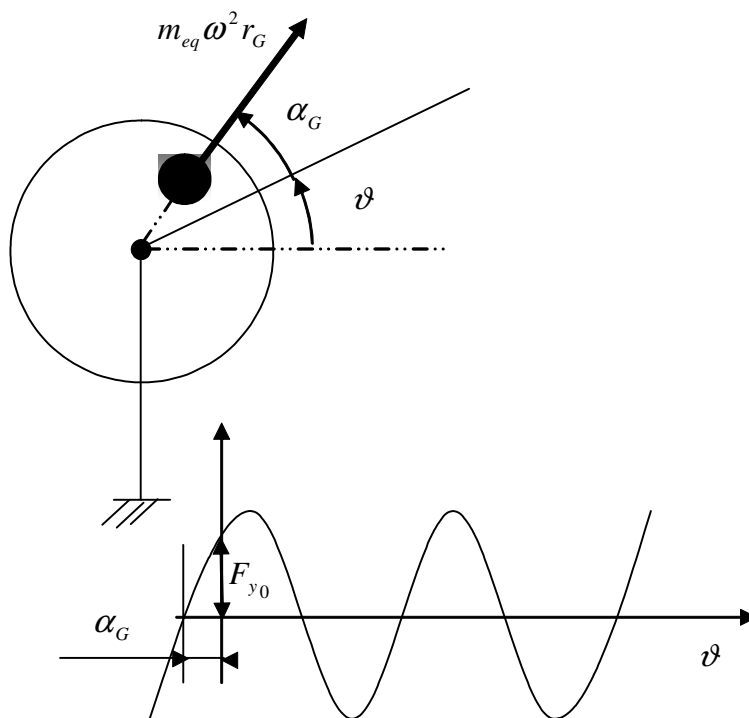


Attraverso la misura della forza generata dal supporto si riesce quindi a risalire a quella fornita dalla eq. 5.3. Un altro punto di vista consiste nel dire che la forza centrifuga equivalente F si scarica a terra attraverso i supporti. Solitamente in un bilanciamento statico si misura la componente y delle forze scaricate a terra dal rotore attraverso i supporti: F_y . Fissiamo la seguente convenzione: F_y è positiva quando il sensore registra una forza che tende a tirare il rotore verso il basso od, in altre parole, quando il rotore tende a tirare il supporto verso l'alto. Impostando l'equilibrio lungo l'asse y si ottiene che F_y è pari al valore della componente y di $m_{eq} \omega^2 r_G$, cioè

$$\begin{aligned} F_y(\vartheta) &= m_{eq} \omega^2 r_G \operatorname{Im}(e^{j \alpha_G} e^{j \vartheta}) = \\ F_y(\vartheta) &= m_{eq} \omega^2 r_G \sin(\alpha_G + \vartheta) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Un modo molto semplice ed efficace per misurare F_y consiste nell'utilizzare una cella di carico (sensore di forza) ed uno oscilloscopio. Sul rotore viene montato un sensore induttivo (una specie di fotocellula) in corrispondenza del riferimento scelto, in maniera tale che quando il sensore induttivo passa per l'orizzontale significa che $\vartheta = 0$. Quando questo evento avviene, l'oscilloscopio inizia a misurare il valore di F_y al variare del tempo. Perciò si potrà ottenere un grafico simile a quello in figura.

Dal grafico di $F_y(\vartheta)$ si legge:



- il valore della forza massima F_{yMAX} ;
 - il valore di F_y quando il sensore induttivo attraversa l'orizzontale, cioè $F_y(0)$. Questo valore lo si legge direttamente dal grafico sopra ed è F_{y0} .
- Dalla equazione 5.4 si deduce che

$$\begin{aligned} F_{yMAX} &= m_{eq} \omega^2 r_G \\ F_{y0} = F_y(0) &= m_{eq} \omega^2 r_G \sin(\alpha_G) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dato che F_{yMAX} ed F_{y0} vengono misurati (letti dal grafico) e la velocità angolare è nota, si ricava

$$m_{eq} r_G = \frac{F_{yMAX}}{\omega^2}$$

Il passo successivo consiste nel determinare la posizione angolare di questa massa equivalente sbilanciante. Sfruttando la seconda delle eq. 5.5, si ricava

$$\alpha_G = \arcsin\left(\frac{F_{y0}}{m_{eq} \omega^2 r_G}\right) = \arcsin\left(\frac{F_{y0}}{F_{yMAX}}\right)$$

Introduciamo ora una massa nota m per equilibrare il sistema. Il suo contributo centrifugo è

$$F_m = m \omega^2 r \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta + \beta) \\ \sin(\vartheta + \beta) \end{Bmatrix} = m \omega^2 r e^{j\beta} e^{j\vartheta}$$

dove β è la posizione angolare della massa equilibratrice rispetto al sistema di riferimento.

Affinché la massa equilibri l'azione delle masse sbilanciati, è necessario che

$$F + F_m = 0$$

per cui

$$\begin{aligned} m_{eq} \omega^2 r_G e^{j\alpha_G} e^{j\vartheta} + m \omega^2 r e^{j\beta} e^{j\vartheta} &= 0 \\ \Rightarrow \\ m_{eq} r_G e^{j\alpha_G} &= -m r e^{j\beta} \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione sopra (i moduli e le fasi dei due vettori devono essere uguali) si riesce a ricavare la distanza dal centro di rotazione della massa m equilibratrice

$$r = \frac{m_{eq} r_G}{m} = \frac{F_{yMAX}}{\omega^2 m} \quad (5.6)$$

e la posizione angolare rispetto al riferimento

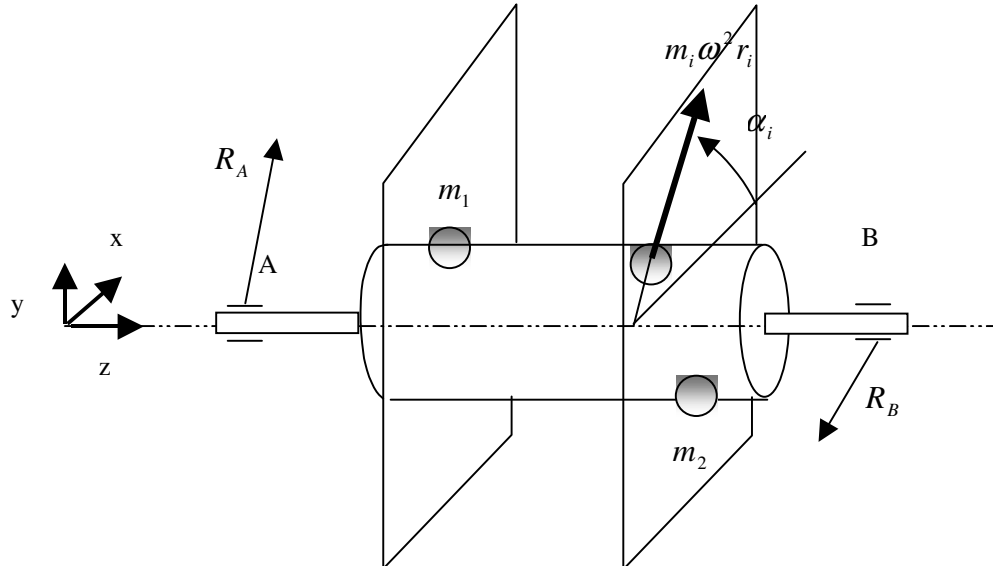
$$\begin{aligned}
 e^{j\beta} &= -e^{j\alpha_G} \\
 \Rightarrow \\
 \beta &= \alpha_G + \pi
 \end{aligned}$$

infatti i due vettori devono essere uno orientato in maniera opposta all'altro e quindi sfasati di 180° . Si poteva alternativamente bilanciare il rotore introducendo una massa di valore non noto posta ad una distanza r nota dal centro. In questo caso la posizione angolare si calcolava come sopra mentre bisognava calcolare il valore della massa rimaneggiando l'eq. 5.6

$$m = \frac{m_{eq} r_G}{r} = \frac{F_{yMAX}}{\omega^2 r}$$

5.2 Bilanciamento dinamico

Nella figura sottostante è rappresentato un rotore con asse di rotazione coincidente con l'asse z del sistema di riferimento assoluto e supportato nei punti A e B. Supponiamo che vi siano delle masse sbilanciati. In figura è rappresentata solo una di queste. Vediamo come sia possibile equilibrare dinamicamente il rotore vincolando due masse m_1 ed m_2 al rotore rotanti su due piani qualsiasi.



Come nel caso statico è possibile misurare le forze trasmesse dai supporti a terra nei punti A e B. Supponiamo esse abbiano un andamento dato da

$$\vec{R}_A = \begin{Bmatrix} R_A \cos(\alpha_A) \\ R_A \sin(\alpha_A) \\ 0 \end{Bmatrix}, \vec{R}_B = \begin{Bmatrix} R_B \cos(\alpha_B) \\ R_B \sin(\alpha_B) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

se espresse rispetto al sistema di riferimento assoluto. Formalmente \vec{R}_A ed \vec{R}_B rappresentano le forze che i supporti esercitano sul rotore.

E' più conveniente esprimere solamente le componenti lungo x ed y usando una notazione complessa (asse x reale; asse y immaginario). Per cui

$$\vec{R}_A = R_A e^{j \alpha_A} \quad \vec{R}_B = R_B e^{j \alpha_B} \quad (5.8)$$

Questi valori sono misurati quando il riferimento passa per lo zero, cioè quando la posizione del rotore è $\vartheta = 0 + 2k\pi$. Figurativamente si tratta di scattare una istantanea delle forze in gioco quando il riferimento del rotore transita per uno stesso punto dopo aver compiuto un giro. Si è già visto nel caso statico come sia possibile ricavare dal grafico delle forze scaricate a terra in funzione dell'angolo di rotazione del rotore, il valore del modulo della forza scaricata ai supporti R_A ed R_B , come pure gli sfasamenti α_A ed α_B . Le forze \vec{R}_A ed \vec{R}_B non sono altro che l'effetto dei contributi delle masse sbilancianti.

Viene da chiedersi quale sia la relazione matematica tra le reazioni vincolari e le forze centrifughe prodotte dalle masse sbilancianti. La trattazione che segue ha lo scopo di mostrare quale sia la relazione matematica che lega le forze di reazione (5.7) e le forze inerziali indotte dalle masse sbilancianti.

E' necessario calcolare anche i momenti delle forze di reazione. Calcoliamo come esempio il momento della forza di reazione \vec{R}_A rispetto all'origine del sistema di riferimento (cioè prendendo l'origine come polo attorno al quale calcolare il momento). Esso è dato dal prodotto vettoriale del vettore \vec{OA} per \vec{R}_A . Esso ha modulo pari al modulo di \vec{OA} per il modulo di \vec{R}_A , dato che \vec{OA} ed \vec{R}_A sono perpendicolari. Inoltre ha direzione perpendicolare sia all'asse di rotazione (direzione del vettore \vec{OA}) che al vettore \vec{R}_A (applicare la regola della mano destra). Se indichiamo con b_A la distanza di A da O, seguendo le indicazioni sopradette, si ottiene $\vec{OA} \wedge \vec{R}_A = b_A R_A e^{j \alpha_A} e^{j \frac{\pi}{2}}$. Si ricorda che si stanno considerando le forze all'istante in cui il riferimento del rotore passa per lo zero. Il prodotto vettoriale $\vec{OA} \wedge \vec{R}_A$ è un vettore; è quindi definito da tre componenti. Però, dato che questo vettore non ha componente lungo l'asse z per quanto detto, lo si rappresenta attraverso una notazione complessa (che esprime solo due componenti), in maniera tale che la parte reale del numero complesso $b_A R_A e^{j \alpha_A} e^{j \frac{\pi}{2}}$ sia la componente x di $\vec{OA} \wedge \vec{R}_A$ e la parte immaginaria di $b_A R_A e^{j \alpha_A} e^{j \frac{\pi}{2}}$ sia la componente y di $\vec{OA} \wedge \vec{R}_A$.

Facendo l'equilibrio delle forze inerziali e delle reazioni lungo x, y e l'equilibrio ai momenti, si ottiene un sistema di due equazioni complesse.

$$R_A e^{j \alpha_A} + R_B e^{j \alpha_B} + \sum_i m_i \omega^2 r_i e^{j \alpha_i} = 0 \quad (5.9)$$

$$b_A R_A e^{j \alpha_A} e^{j \frac{\pi}{2}} + b_B R_B e^{j \alpha_B} e^{j \frac{\pi}{2}} + \sum_i m_i \omega^2 r_i b_i e^{j \alpha_i} e^{j \frac{\pi}{2}} = 0$$

Cioè forze sbilancianti e reazioni devono equilibrarsi. Nota che la quantità $e^{j \frac{\pi}{2}}$ può essere semplificata. Sono state introdotte le quantità: b_A è la distanza del supporto A dall'origine del sistema, b_B è la distanza del supporto B dall'origine del sistema e b_i è la distanza della massa i -esima dall'origine lungo l'asse z .

Posto in forma matriciale il sistema 5.9 fornisce

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b_A & b_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A e^{j \alpha_A} \\ R_B e^{j \alpha_B} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_i m_i \omega^2 r_i e^{j \alpha_i} \\ \sum_i m_i \omega^2 r_i b_i e^{j \alpha_i} \end{Bmatrix}$$

Elaborando la matrice si ottiene che le forze di reazione sono

$$\begin{Bmatrix} R_A e^{j \alpha_A} \\ R_B e^{j \alpha_B} \end{Bmatrix} = - \frac{1}{(b_B - b_A)} \begin{bmatrix} b_B & -1 \\ -b_A & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_i m_i \omega^2 r_i e^{j \alpha_i} \\ \sum_i m_i \omega^2 r_i b_i e^{j \alpha_i} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Dalla relazione sopra si vede come il contributo delle masse sbilancianti genera due reazioni vincolari che agiscono perpendicolarmente all'asse di rotazione e ruotano in fase con il rotore.

In realtà le forze sbilancianti (cioè la posizione delle masse sbilancianti) non sono note e ciò che si conosce sono semplicemente i valori misurati \vec{R}_A ed \vec{R}_B quando il riferimento del rotore passa per l'orizzontale. L'eq. 5.10 ha la sola funzione di mostrare che i contributi di molte masse sbilancianti hanno l'effetto di far generare ai supporti due sole forze rotanti nei punti A e B che agiscono sul rotore per tenerlo in asse.

Per come sono stati introdotti, \vec{R}_A ed \vec{R}_B sono i valori delle reazioni che il telaio esercita sul rotore. Il problema del bilanciamento consiste nel leggere le reazioni vincolari ed inserire successivamente un sistema di masse in maniera tale da annullare le reazioni vincolari stesse.

Vista qual'è l'origine di \vec{R}_A ed \vec{R}_B si passa adesso a capire come eliminarle. Per eliminare lo sbilanciamento serve conoscere in particolare i moduli R_A ed R_B e gli sfasamenti α_A ed α_B . Come nel caso statico si inseriscono due sensori di misura nei supporti A e B. Questi sensori registrano la componente lungo y di \vec{R}_A ed \vec{R}_B . Concentriamoci sul supporto A; per il supporto B valgono analoghe considerazioni. In particolare, l'ampiezza del segnale misurato è il valore R_A , mentre il segnale misurato (che può venir indicato con R_{A0}) quando il riferimento

passa per l'orizzontale è $R_{A0} = R_A \cos(\alpha_A)$. Da questa ultima formula si ricava lo sfasamento $\alpha_A = \arccos(R_{A0}/R_A)$.

Per equilibrare il sistema, introduciamo due masse rispettivamente ad una distanza b_1 e b_2 dal piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per l'origine del sistema di riferimento. Le distanze b_1 e b_2 individuano quindi i *piani di equilibratura*. Tali masse devono dare un contributo uguale alle reazioni vincolari registrate nei supporti in maniera tale da compensarle. In altre parole, \vec{R}_A ed \vec{R}_B sono le forze che il telaio deve esercitare sul rotore per mantenerlo in sede quando il rotore non è bilanciato; si possono introdurre due masse in maniera tale che abbiano lo stesso effetto sul rotore delle forze di reazione \vec{R}_A ed \vec{R}_B . Infatti, se queste due masse producono le stese azioni lungo x e lungo y delle \vec{R}_A ed \vec{R}_B , significa che il rotore, una volta bilanciato (cioè una volta inserite le masse) non scaricherà più alcuna forza sui supporti. Per cui, uguagliando le risultanti delle forze delle masse bilancianti e delle reazioni, si ottiene (considerare come polo l'origine del sistema di riferimento)

$$\begin{aligned} R_A e^{j \alpha_A} + R_B e^{j \alpha_B} &= m_1 \omega^2 r_1 e^{j \alpha_1} + m_2 \omega^2 r_2 e^{j \alpha_2} \\ b_A R_A e^{j \alpha_A} e^{j \frac{\pi}{2}} + b_B R_B e^{j \alpha_B} e^{j \frac{\pi}{2}} &= m_1 \omega^2 r_1 b_1 e^{j \alpha_1} e^{j \frac{\pi}{2}} + m_2 \omega^2 r_2 b_2 e^{j \alpha_2} e^{j \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Solitamente si fissano ad arbitrio i valori delle distanze dall'asse di rotazione delle due masse bilancianti, cioè r_1 ed r_2 . Le incognite del sistema sono m_1 , m_2 , α_1 e α_2 .

Poniamo il sistema in forma matriciale ed introduciamo le due incognite ausiliarie $z_1 = m_1 e^{j \alpha_1}$ e $z_2 = m_2 e^{j \alpha_2}$

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1 b_1 & r_2 b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{Bmatrix} R_A e^{j \alpha_A} + R_B e^{j \alpha_B} \\ b_A R_A e^{j \alpha_A} + b_B R_B e^{j \alpha_B} \end{Bmatrix}$$

Il sistema è risolvibile e fornisce la posizione angolare delle masse bilancianti e la loro distanza dal centro di rotazione.

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2 (b_2 - b_1) r_1 r_2} \begin{bmatrix} r_2 b_2 & -r_2 \\ -r_1 b_1 & r_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A e^{j \alpha_A} + R_B e^{j \alpha_B} \\ b_A R_A e^{j \alpha_A} + b_B R_B e^{j \alpha_B} \end{Bmatrix}$$

Dai vettori calcolati si ottiene

$$m_1 = \|z_1\|, \quad m_2 = \|z_2\|$$

dato che $z_1 = m_1 e^{j \alpha_1} \Rightarrow \|z_1\| = m_1 \|e^{j \alpha_1}\| = m_1$. Per quanto riguarda le posizioni angolari rispetto a cui posizionare le masse sbilanciati basta osservare che $\text{Re}(z_1) = m_1 \cos(\alpha_1)$ ed $\text{Im}(z_1) = m_1 \sin(\alpha_1)$. Combinando le due relazioni si ottiene

$$\alpha_1 = \arctan 2(\operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Re}(z_1))$$

$$\alpha_2 = \arctan 2(\operatorname{Im}(z_2), \operatorname{Re}(z_2))$$

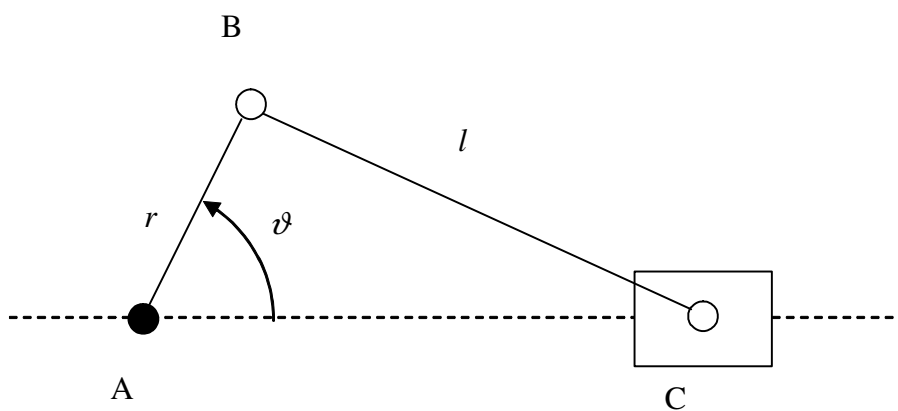
Per avere un'idea di come viene effettuato il bilanciamento in ambiente industriale, dare un'occhiata al seguente ?? .

Capitolo 6

Bilanciamento di manovellismi centrati

Questo capitolo riguarda i metodi per ridurre le forze di reazione o parte di queste che la manovella di un manovellismo centrato scarica a telaio. Ridurre le forze scaricate a telaio è auspicabile: da una parte gli elementi costruttivi di cui sono costituite le coppie cinematiche sono meno sollecitati, dall'altra insorgono meno vibrazioni dell'intero meccanismo.

Calcoliamo prima di tutto quali sono le forze di reazione.



Il meccanismo più semplice che tratteremo è costituito da una manovella, una biella ed un pattino. Il punto A è solitamente chiamato *perno di banco*, il punto B *perno di manovella* o *bottone di manovella* ed il punto C *piede di biella*. Esso può essere semplificato introducendo delle masse concentrate in luogo dei corpi rigidi continui. Per quanto riguarda la manovella AB, di massa m_{AB} e momento d'inerzia I_{AB} (rispetto al baricentro della manovella) si opera

in questa maniera. Si sostituisce la manovella con una manovella priva di massa lungo il segmento AB e con due masse m_1 ed m_2 concentrate agli estremi, masse il cui valore è da determinare. I valori di queste due masse vengono determinati in maniera tale da lasciare inalterato il baricentro della manovella e la massa totale della manovella, perciò deve valere

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_2 a_2 \\ m_1 + m_2 &= m_{AB} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_{AB} \\ m_2 &= \frac{a_1}{a_1 + a_2} m_{AB} \end{aligned}$$

dove a_1 ed a_2 sono le distanze delle masse (coè dei punti A e B) dal baricentro della manovella.

Per quanto riguarda i fini dinamici, la nuova manovella non ha lo stesso comportamento di quella originale, in quanto non ha stesso momento d'inerzia, ma l'approssimazione è sufficiente per i nostri fini.

La stessa schematizzazione può essere fatta per la biella (la cui massa è m_{BC})

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{a_4}{a_3 + a_4} m_{BC} \\ m_4 &= \frac{a_3}{a_3 + a_4} m_{BC} \end{aligned}$$

dove m_3 è la massa sostitutiva nel punto B ed m_4 nel punto C. a_3 ed a_4 sono le distanze degli estremi della biella dal suo baricentro.

In questa maniera, nel punto B del meccanismo equivalente c'è una massa concentrata pari ad

$$m_B = m_2 + m_3$$

e nel pattino

$$m_C = m_4 + m_P$$

dove m_P è la massa del pattino.

E' necessario calcolare l'accelerazione del piede di biella \ddot{x}_C . Chiamiamo la distanza $r = AB$ ed $l = BC$.

Il moto del pistone è dato da

$$\begin{aligned} x_C &= r \cos(\vartheta) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\vartheta)} = \\ &= r \cos(\vartheta) + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\vartheta)} \end{aligned} \tag{6.1}$$

L'equazione può essere approssimata considerando che, poiché nella maggior parte dei casi r ha valore di molto inferiore ad l , la quantità $s = \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\vartheta)$ è molto piccola. Perciò consideriamo la funzione $f(s) = \sqrt{1-s}$. Linearizziamola nell'intorno dell'origine (dove s è piccolo). Si ottiene $f(s) \simeq f(0) + \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} s = \sqrt{1} - \frac{1}{2}s$. Applicando queste considerazioni alla 6.1, si ottiene (considerare anche che $\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = \cos(2\vartheta) \Rightarrow (1 - \sin^2(\vartheta)) - \sin^2(\vartheta) = \cos(2\vartheta) \Rightarrow \sin^2(\vartheta) = (1/2)(1 - \cos(2\vartheta))$)

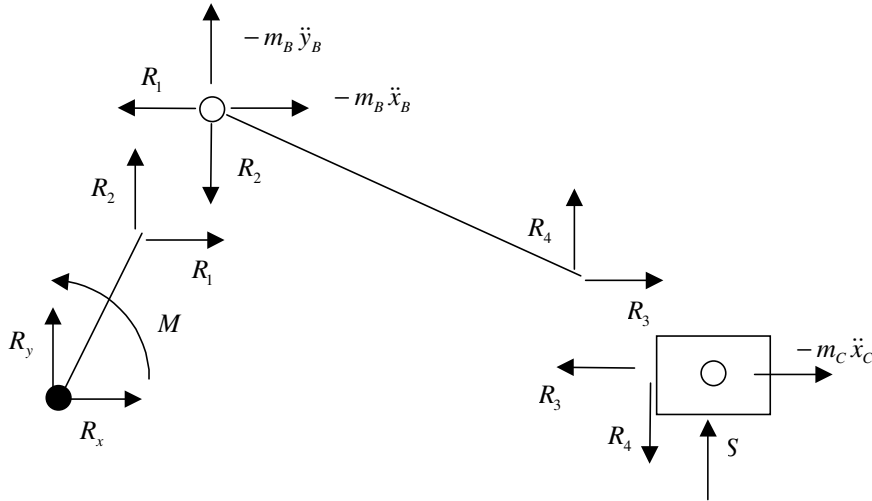
$$\begin{aligned} x_C &= r \cos(\vartheta) + l \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\vartheta)\right) = \\ &= r \cos(\vartheta) + l \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \left(\frac{1 - \cos(2\vartheta)}{2}\right)\right) = \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$= l - \frac{r^2}{4l} + r \cos(\vartheta) + \frac{r^2}{4l} \cos(2\vartheta) \quad (6.3)$$

Se indichiamo con $\omega = \dot{\vartheta}$ la velocità angolare della manovella e consideriamo la velocità angolare costante, l'accelerazione vale

$$\ddot{x}_C = -\omega^2 r \cos(\vartheta) - \omega^2 \frac{r^2}{l} \cos(2\vartheta)$$

Consideriamo ora i tre corpi come in figura e calcoliamo le reazioni vincolari. Supponiamo che la coppia sia applicata alla manovella (un esempio di applicazione è il compressore). Per semplicità si introduce l'ipotesi che al pistone non sia applicato nessun carico. Perciò la coppia M produce un atto di moto per cui la velocità angolare di manovella è costante. Si trascurano le forze peso.



Le equazioni di equilibrio che si possono ricavare sono (nota che sono sufficienti 8 equazioni dato che ci sono 8 incognite)

$$\begin{aligned}
 R_x + R_1 &= 0 \\
 R_y + R_2 &= 0 \\
 M + R_2 r \cos(\vartheta) - R_1 r \sin(\vartheta) &= 0 \\
 -R_1 + R_3 - m_B \ddot{x}_B &= 0 \\
 -R_2 + R_4 - m_B \ddot{y}_B &= 0 \\
 R_4 l + R_3 r \sin(\vartheta) &= 0 \\
 S - R_4 &= 0 \\
 -R_3 - m_C \ddot{x}_C &= 0
 \end{aligned}$$

L'equazione ai momenti della manovella considera come polo il punto A, della biella invece il punto B.

Nel ricavare la sesta equazione si è applicata l'ipotesi che l'angolo che la biella forma con l'asse di scorrimento sia piccolo in maniera tale da considerare il braccio rispetto al polo B della forza di reazione R_4 circa pari ad l .

La R_x si trova immediatamente (sfruttando in sequenza la prima, la quarta e l'ottava)

$$R_x = -R_1 = -R_3 + m_B \ddot{x}_B = m_C \ddot{x}_C + m_B \ddot{x}_B$$

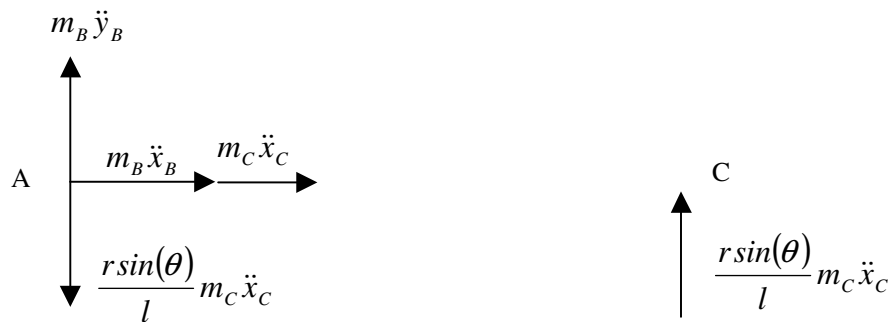
Dalla sesta e la settima si ha

$$S = R_4 = -R_3 \frac{r \sin(\vartheta)}{l} = \frac{r \sin(\vartheta)}{l} m_C \ddot{x}_C$$

Infine, dalla seconda e dalla quinta (e sfruttando i risultati precedenti) si ha

$$R_y = -R_2 = -R_4 + m_B \ddot{y}_B = -\frac{r \sin(\vartheta)}{l} m_C \ddot{x}_C + m_B \ddot{y}_B$$

Perciò le forze di reazione che il telaio esercita sul meccanismo sono le seguenti rappresentate in figura



Nota che $m_B \ddot{x}_B$ ed $m_B \ddot{y}_B$ (si ricorda che queste forze sono le reazioni prodotte dal telaio sul perno di manovella) sono le componenti che produrrebbe una massa m_B nel punto B ruotando. Perciò se si inserisce una ulteriore massa m_u (calettata sulla manovella) sfasata di 180° rispetto alla posizione di m_B si riesce ad eliminare completamente queste due componenti lungo x ed y. Il valore della massa m_u deve essere tale per cui il baricentro del sistema composto dalla massa m_u ed m_B stia nel punto A. Per cui la relazione seguente deve essere soddisfatta

$$m_B r = m_u r_u$$

dove r_u è la distanza di m_u dal punto A.

Le due forze di modulo $\frac{r \sin(\vartheta)}{l} m_C \ddot{x}_C$ producono una coppia sul telaio che in generale è trascurabile rispetto alle forze che si scaricano a telaio nel punto A.

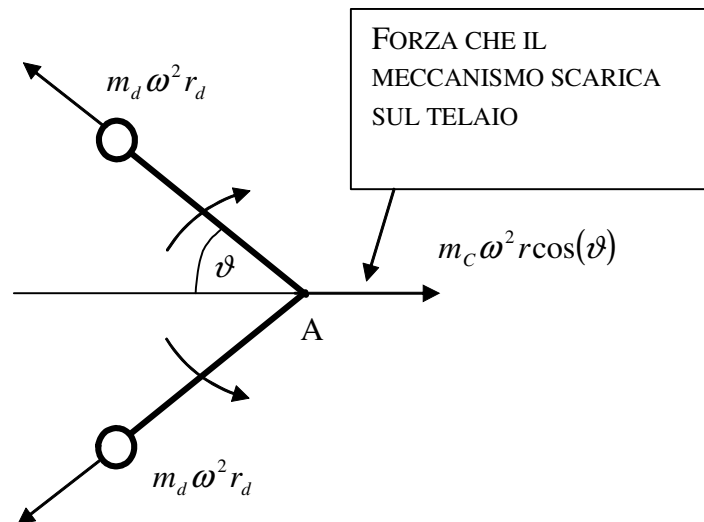
Vediamo nel seguito come annullare la forza $m_C \ddot{x}_C$. Essa si compone di due contributi

$$m_C \ddot{x}_C = -m_C \omega^2 r \cos(\vartheta) - m_C \omega^2 \frac{r^2}{l} \cos(2\vartheta) \quad (6.4)$$

Il primo contributo viene detto *forza alternata del primo ordine*; il secondo *forza alternata del secondo ordine*.

Si ricorda che questa forza rappresenta la forza che il telaio esercita sul meccanismo, perciò la forza che il meccanismo esercita sul telaio va cambiata di segno.

Un metodo per annullare la forza alternata del primo ordine consiste nell'utilizzare due masse controrotanti alla velocità ω in maniera tale da produrre una forza complessiva lungo l'asse delle x in grado di bilanciare il valore $m_C \omega^2 r \cos(\vartheta)$.



La massa più in alto ruota in senso antiorario; quella in basso in senso orario. Queste due masse, per poter compensare la forza devono avere una posizione angolare pari a ϑ rispetto all'orizzontale. In questo caso il contributo delle due masse fornisce in modulo il valore

$$2 m_d r_d \omega^2 \cos(\vartheta)$$

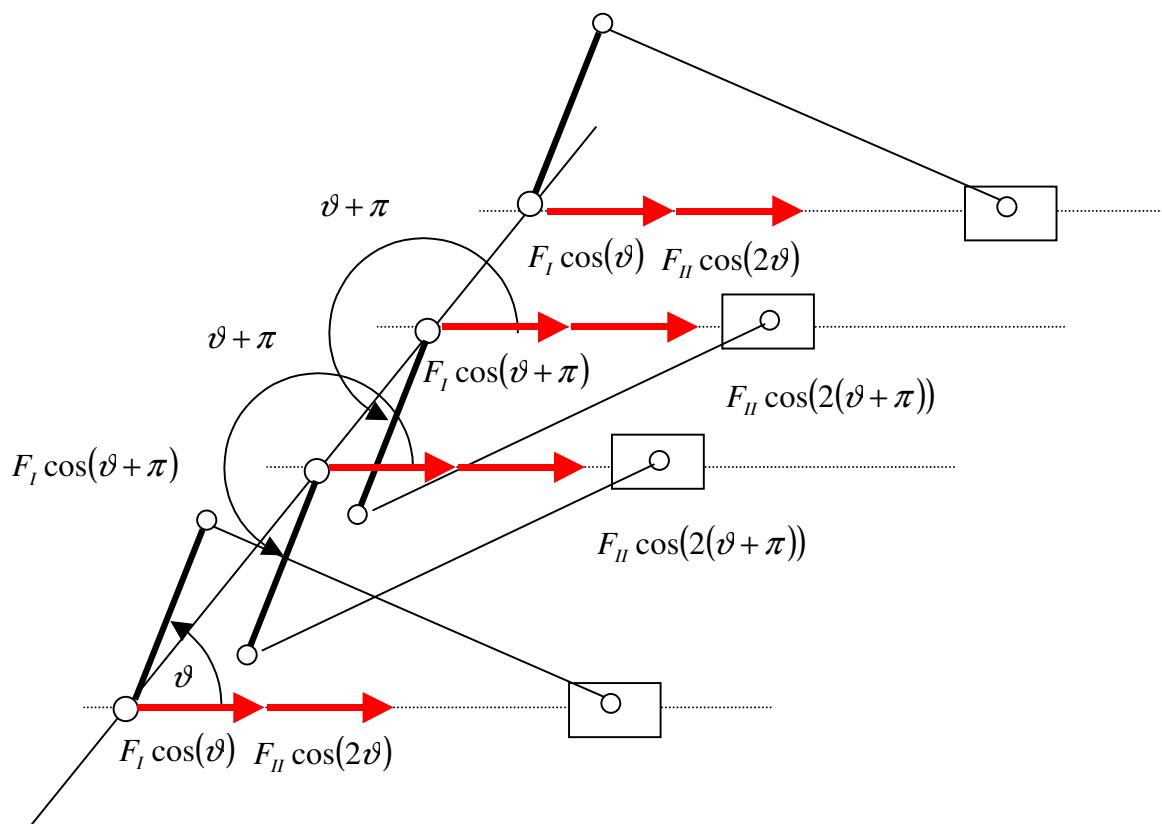
Per equilibrare la forza orizzontale le due masse e le loro distanze dal centro di rotazione devono soddisfare la seguente equazione

$$2 m_d r_d = m_C r$$

In molti casi pratici la forza alternata del primo ordine viene eliminata nella configurazione in cui si hanno più cilindri in linea come nel caso che segue, senza ricorrere quindi alle due masse controrotanti.

6.1 Configurazione tipica in un motore a 4 cilindri

Consideriamo un motore a 4 cilindri in linea in cui l'albero a gomiti è piano (un albero a gomiti è detto piano quando i perni di manovella appartengono ad un piano). Analizziamo le forze che il meccanismo scarica sul telaio. Generalmente la forza centrifuga rotante è bilanciata dalla massa m_u calettata sulla manovella (bilanciamento prodotto dalle maschette). Trascuriamo la coppia data dalla forza S . Le forze che hanno maggior rilevanza sono le forze del primo e secondo ordine. Ricordiamo che il valore delle forze scaricate sul telaio sono date dalla eq. 6.4 cambiata di segno. Rappresentiamole nella seguente figura



dove $F_I = m_C \omega^2 r$ e $F_{II} = m_C \omega^2 r^2 / l$
 L'albero a gomiti è costruito in maniera tale che l'angolo delle manovelle centrali sia sfasato di 180° rispetto all'angolo delle manovelle laterali. Di conseguenza le forze del primo ordine sono equilibrate, infatti sommandole si ottiene

$$\begin{aligned} & F_I \cos(\vartheta) + F_I \cos(\vartheta + \pi) + F_I \cos(\vartheta + \pi) + F_I \cos(\vartheta) \\ &= 2 F_I (\cos(\vartheta) + \cos(\vartheta + \pi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

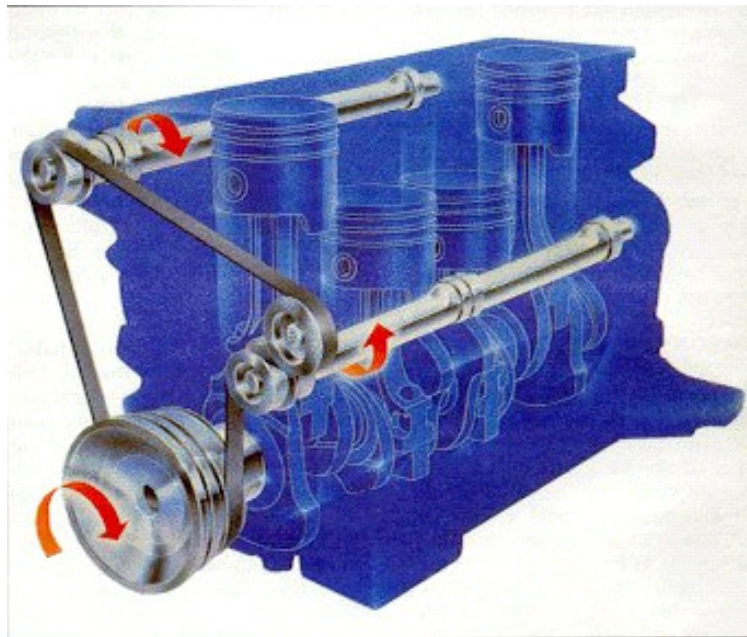
Per quanto riguarda le forze del secondo ordine, l'equilibrio non sussiste, infatti la forza complessiva che si scarica sul telaio è

$$\begin{aligned} & F_{II} \cos(2\vartheta) + F_{II} \cos(2(\vartheta + \pi)) + F_{II} \cos(2(\vartheta + \pi)) + F_{II} \cos(2\vartheta) \\ &= 2 F_{II} (\cos(2\vartheta) + \cos(2(\vartheta + \pi))) \\ &= 4 F_{II} \cos(2\vartheta) \end{aligned}$$

cioè 4 volte ogni singola forza alterna del secondo ordine.

Nota inoltre che il sistema di forze complessivo non esercita nessuna coppia rispetto ad un asse perpendicolare all'asse di rotazione dell'albero a gomiti. Questo perché è presente una perfetta simmetria di forze.

In alcuni casi, per annullare la forza complessiva del secondo ordine, vengono inserite due masse controrotanti con una velocità angolare doppia rispetto a quella di rotazione dell'albero a gomiti (vedi figura seguente). Le masse controrotanti sono costituite da due alberi il cui baricentro non passa per l'asse di rotazione.

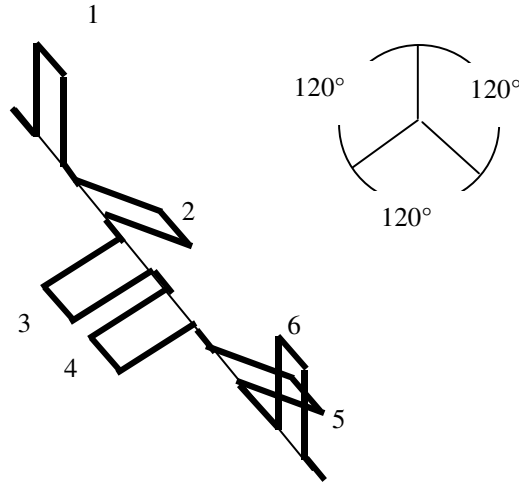


Notare come la cinghia dentata si avvolga attorno alla puleggia di destra per invertire il moto dell'albero di destra rispetto a quello di sinistra. Notare inoltre che la puleggia calettata sull'albero a gomiti ha diametro doppio rispetto ai diametri delle pulegge degli alberi controrotanti. Per cui, la velocità di rotazione degli alberi controrotanti è il doppio di quella della manovella (albero a gomiti). Infatti questo sistema serve ad eliminare le forzanti del II° ordine (che hanno una frequenza doppia rispetto alla frequenza di rotazione della manovella).

6.2 Configurazione tipica di un motore a 6 cilindri in linea a 4 tempi

Consideriamo in figura solamente lo schema dell'albero a gomiti di un motore a 6 cilindri

6.2. CONFIGURAZIONE TIPICA DI UN MOTORE A 6 CILINDRI IN LINEA A 4 TEMPI 75



Le manovelle sono sfasate di 120° una rispetto all' altra. Come nel motore a 4 cilindri consideriamo esclusivamente le forze del primo e del secondo ordine. Considera che i cilindri 1 e 6 hanno stessa forza del primo e del secondo ordine. La stessa cosa avviene per la coppia 2-5 e per la coppia 3-4. La somma delle forze del primo ordine fornisce dunque

$$\begin{aligned} & 2F_I \cos(\vartheta) + 2F_I \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + 2F_I \cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 2F_I \operatorname{Re}\left(e^{j\vartheta} + e^{j(\vartheta + \frac{2\pi}{3})} + e^{j(\vartheta + \frac{4\pi}{3})}\right) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

in quanto gli ultimi tre vettori complessi sono vettori unitari sfasati di 120 gradi e quindi si equilibrano.

Per quanto riguarda le forze del secondo ordine si ottiene

$$\begin{aligned} & 2F_{II} \cos(2\vartheta) + 2F_{II} \cos\left(2\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + 2F_{II} \cos\left(2\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2F_{II} \operatorname{Re}\left(e^{2j\vartheta} + e^{2j(\vartheta + \frac{2\pi}{3})} + e^{2j(\vartheta + \frac{4\pi}{3})}\right) = \\ &= 2F_{II} \operatorname{Re}\left(e^{2j\vartheta} \left(1 + e^{\frac{4\pi}{3}j} + e^{\frac{8\pi}{3}j}\right)\right) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

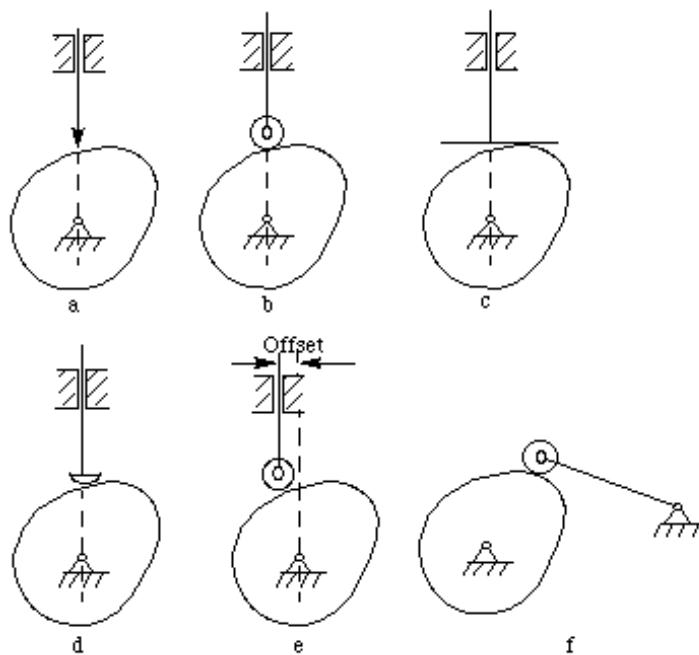
Anche in questo caso, all'interno della parentesi rotonda ci sono tre vettori unitari sfasati di 120° che quindi si equilibrano.

Nota inoltre che il sistema di forze complessivo non esercita nessuna coppia rispetto ad un asse perpendicolare all'asse di rotazione dell'albero a gomiti. Questo perché è presente una perfetta simmetria di forze.

Capitolo 7

Camme

Si definisce *camma* una coppia cinematica in cui il moto avviene tra due profili a contatto opportunamente sagomati. Nelle camme piane il *movente* è rappresentato da un corpo che ruota attorno ad un punto fisso. Il cedente, a cui viene trasmesso il moto, può essere di diversa natura. Nella figura si possono distinguere diversi tipi di camma.

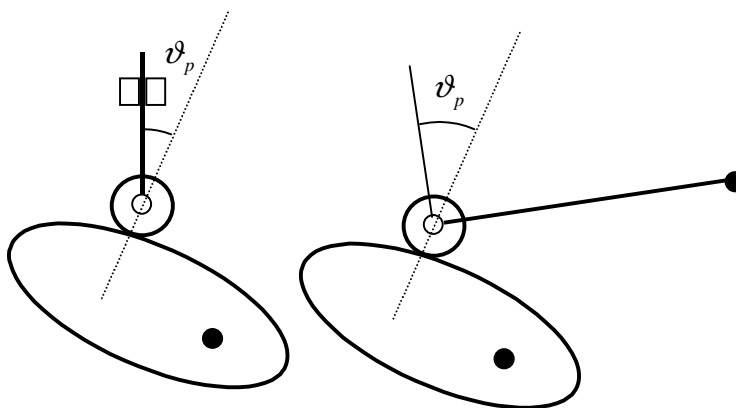


La camme a, b, c, d ed e sono dette *camme di prima specie* ed il cedente viene chiamato *punteria*. Sono contraddistinte dal fatto che il cedente ha un moto traslatorio. La camma f è detta *camma di seconda specie* ed il cedente viene chiamato *bilanciere*. Queste camme sono contraddistinte dal fatto che il

cedente ha un moto rotatorio anziché traslatorio. Il cedente può essere a *rotella* (b, e, f), a *piattello* (c) ed a *cottello* (a).

Il cedente ha un moto periodico che, a seconda del tipo di camma, è traslatorio (*camma a punteria*) o rotatorio (*camma a bilanciere*).

Una caratteristica importante della camma è l'*angolo di pressione* ϑ_p . Per una camma a rotella esso rappresenta l'angolo formato tra la spinta diretta secondo la normale alla superficie di contatto e la direzione di spostamento del centro della rotella.



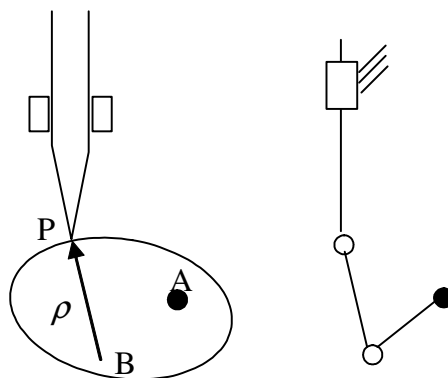
Se indichiamo con S la spinta tra i profili coniugati a contatto e con F la forza trasmessa effettivamente al cedente (cioè la componente di S utile ai fini del movimento del cedente), si ha la relazione

$$F = S \cos(\vartheta_p)$$

mentre la componente $S \sin(\vartheta_p)$ si scarica sul telaio del cedente. Si vede come, all'aumentare dell'angolo di pressione si verificano delle situazioni pericolose, in quanto la forza utile F diminuisce notevolmente. In altre parole, a parità di forza utile F trasmessa al cedente per farlo muovere, il valore della forza S scambiata perpendicolarmente dai profili (cioè la forza complessiva di contatto) è tanto più elevata quanto maggiore è l'angolo di pressione. Di conseguenza, una elevata forza di contatto aumenta sia la forza di attrito che si oppone allo strisciamento dei profili di camma, sia la pressione locale. Il valore del modulo dell'angolo di pressione, indicativamente, non deve superare i 45° .

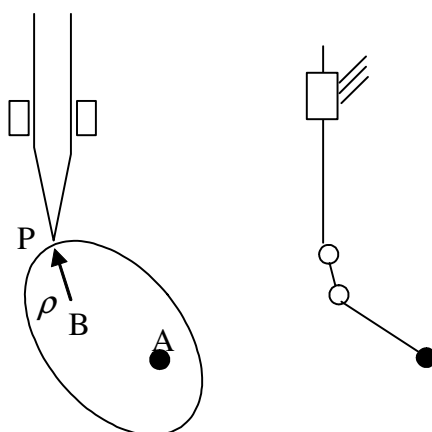
7.1 Meccanismi equivalenti

Vediamo come sia possibile effettuare l'analisi di velocità ed accelerazione di una camma attraverso l'introduzione di meccanismi equivalenti. La camma ruota attorno al punto A fisso a telaio.



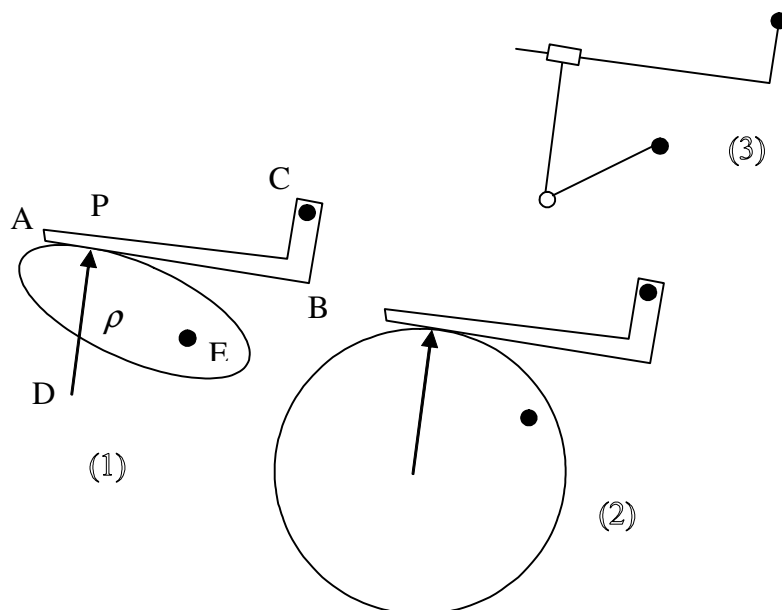
La camma a punteria qui schematizzata è assimilabile al meccanismo articolato di destra. Il motivo deriva dal fatto che nel punto di contatto P tra punteria ed il profilo di camma, la camma è approssimabile localmente con un certo raggio di curvatura ρ (il cerchio di raggio ρ che approssima il profilo di camma ha centro nel punto B). Per questa proprietà, per piccoli spostamenti del punto di contatto P , la distanza di P da B non varia. E' noto che un siffatto tipo di vincolo è schematizzabile attraverso un'asta (l'asta PB del meccanismo equivalente) con due coppie rotoidali agli estremi. Inoltre il punto P è vincolato a traslare lungo la guida, per cui è stata introdotta una coppia prismatica. Perciò il meccanismo equivalente può essere studiato utilizzando i mezzi visti per sviluppare l'analisi di velocità ed accelerazione dei meccanismi piani.

Naturalmente questa analisi è valida solo localmente. In un'altra configurazione, il meccanismo equivalente cambierà, in quanto cambia il raggio di curvatura della camma come mostrato nella seguente figura



dove la lunghezza dell'asta PB si è ridotta.

Vediamo con un'altro esempio il meccanismo equivalente di una camma a bilanciata



In questo caso, la camma originale (1) viene sostituita con una camma equivalente costituita da un disco di raggio pari a ρ che rappresenta il raggio di curvatura del profilo (2). Infatti localmente, cioè nel punto di contatto P , la camma può essere sostituita da un disco con raggio pari a ρ . Anche il disco ruota attorno al punto fisso a telaio E . Con questa sostituzione si vede come il punto di contatto P si mantiene sempre alla stessa distanza ρ dal punto D . Inoltre il tratto AB del cedente deve sempre mantenersi tangente al disco o, in altre parole, perpendicolare al raggio del disco DP . Questo doppio vincolo di tangenza al disco e costanza della distanza del punto di contatto è realizzabile attraverso l'introduzione di una coppia prismatica in P ed una rotoidale in D . Perciò lo schema equivalente è dato dalla figura (3).

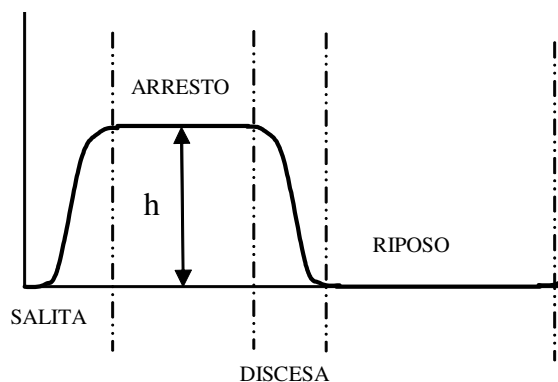
7.2 Pianificazione della traiettoria del cedente

Nella progettazione delle camme il moto del cedente rappresenta la prima cosa da definire. Solitamente il moto del cedente è un dato del problema ed il problema si riduce a effettuare la sintesi della camma a partire da questo dato. Esso è rappresentato da una funzione che esprime la variazione della posizione del cedente rispetto alla posizione angolare del movente

$$y = y(\alpha)$$

dove y è la posizione del cedente ed α è la posizione angolare del movente.

Solitamente questa funzione è caratterizzata da un tratto di salita, un tratto di arresto, un tratto di discesa ed un tratto di riposo



In genere gli angoli che definiscono la durata di una fase, cioè $\alpha_s, \alpha_a, \alpha_d$ ed α_r , sono dati del problema. Notare che $\alpha_s + \alpha_a + \alpha_d + \alpha_r = 2\pi$. Inoltre viene assegnato il massimo valore h della posizione del cedente che viene mantenuto durante tutta la fase di arresto. La prima cosa che deve fare il progettista è pianificare la traiettoria del cedente durante la fase di salita e discesa. Una traiettoria lineare a tratti come nella seguente figura non è ottimale, in quanto vi sono delle discontinuità della derivata prima ed in quei punti il cedente subisce delle istantanee variazioni di velocità con conseguente innesco di vibrazioni.



Ci sono diverse tecniche di pianificazione. Ne vediamo alcune:

1) Tratti di accelerazione costante

In questa tecnica i tratti di salita e discesa vengono percorsi con accelerazione o decelerazione costanti.

Concentriamoci nel tratto di salita. Un modo per evitare la discontinuità della derivata prima nel passaggio dal tratto di salita al tratto di arresto consiste nel pianificare la traiettoria in maniera tale da percorrere il tratto di salita per la prima metà ad accelerazione costante e per la seconda metà a decelerazione costante (in modulo pari all'accelerazione), cioè

$$\begin{aligned}\ddot{y}(\alpha) &= \frac{d^2y}{dt^2} = k \quad \text{per } 0 < \alpha < \frac{\alpha_s}{2} \\ \ddot{y}(\alpha) &= -k \quad \text{per } \frac{\alpha_s}{2} < \alpha < \alpha_s\end{aligned}$$

dove k è una costante da determinare.

Inoltre all'inizio ed alla fine della fase di salita la velocità deve essere nulla

$$\begin{aligned}\dot{y}(\alpha) &= \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{per } \alpha = 0 \\ \dot{y}(\alpha) &= 0 \quad \text{per } \alpha = \alpha_s\end{aligned} \quad (7.1)$$

Di conseguenza, poiché al termine del tratto di salita il cedente arriva con velocità nulla, non vi è alcuna discontinuità con il tratto di arresto in cui la velocità è anch'essa nulla.

Poiché in una attuazione di camma, la velocità angolare del movente è costante, si può scrivere $\alpha = \omega t$, dove ω è la velocità di rotazione della camma. Per cui $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \omega \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{d\alpha^2} \omega^2$. Si deduce che imporre al cedente che il primo tratto di salita avvenga ad accelerazione costante (derivata seconda rispetto al tempo) significa imporre al cedente che, per il primo tratto di salita, anche la derivata seconda della y rispetto all'angolo α sia costante. Si può quindi scrivere

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\alpha^2} &= \frac{k}{\omega^2} \quad \text{per } 0 < \alpha < \frac{\alpha_s}{2} \\ \frac{d^2y}{d\alpha^2} &= -\frac{k}{\omega^2} \quad \text{per } \frac{\alpha_s}{2} < \alpha < \alpha_s\end{aligned} \quad (7.2)$$

Inoltre le eq. 7.1 vengono sostituite dalle seguenti

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\alpha} &= 0 \quad \text{per } \alpha = 0 \\ \frac{dy}{d\alpha} &= 0 \quad \text{per } \alpha = \alpha_s\end{aligned}$$

Integrando una volta l'equazione 7.2 lungo il tratto di accelerazione si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\alpha} &= \int_0^\alpha \frac{d^2y}{d\alpha^2} d\alpha = \int_0^\alpha \frac{k}{\omega^2} d\alpha = \\ &= \frac{k}{\omega^2} \alpha + c_1\end{aligned}$$

Dove c_1 è una costante da determinare. Dato che $\frac{dy}{d\alpha} = 0$ per $\alpha = 0$ si deduce che $c_1 = 0$. Integrando nuovamente si ottiene

$$\begin{aligned}
 y(\alpha) &= \int_0^{\alpha} \frac{dy}{d\alpha} d\alpha = \int_0^{\alpha} \frac{k}{\omega^2} \alpha d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{k}{\omega^2} \alpha^2
 \end{aligned}$$

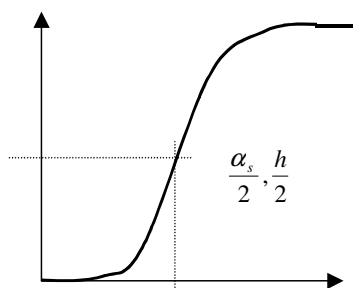
Come ci sia aspettava, il tratto di accelerazione costante ha andamento parabolico. Dato che dopo un angolo pari a metà dell'angolo di salita deve essere stata raggiunta la posizione y pari ad $h/2$, si riesce a calcolare il valore della costante k .

$$\begin{aligned}
 y(\alpha_s/2) &= h/2 \\
 \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} \frac{k}{\omega^2} \left(\frac{\alpha_s}{2}\right)^2 &= \frac{h}{2} \Rightarrow k = 4h \left(\frac{\omega}{\alpha_s}\right)^2
 \end{aligned}$$

In conclusione l'andamento del primo tratto di salita è

$$y(\alpha) = 2h \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 \quad \text{per } 0 < \alpha < \frac{\alpha_s}{2}$$

Il tratto di decelerazione sarà simmetrico al tratto di accelerazione rispetto al punto $\frac{\alpha_s}{2}, \frac{h}{2}$



per cui non vengono ripetuti i calcoli.

2) Pianificazione del tratto di salita con una curva cubica

Questo secondo metodo consiste nel determinare l'andamento della salita, cioè raccordare il tratto di riposo al tratto di arresto attraverso una curva cubica i cui coefficienti sono da determinare. Esprimiamo la salita come

$$y(\alpha) = a_1 + a_2 \alpha + a_3 \alpha^2 + a_4 \alpha^3 \quad (7.3)$$

Le condizioni al contorno di questa curva sono

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0 \\
 y(\alpha_s) &= h \\
 \frac{dy}{d\alpha}(0) &= 0 \\
 \frac{dy}{d\alpha}(\alpha_s) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

Le prime due condizioni tengono conto del punto di partenza e della quota h che deve essere raggiunta alla fine del tratto di salita. Le ultime due condizioni tengono conto del fatto che all'inizio ed alla fine del tratto di salita la velocità deve essere nulla per non avere discontinuità.

Confrontando la 7.3 con le 7.4 si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 \\
 a_1 + a_2 \alpha_s + a_3 \alpha_s^2 + a_4 \alpha_s^3 &= h \\
 a_2 &= 0 \\
 a_2 + 2 a_3 \alpha_s + 3 a_4 \alpha_s^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

le cui soluzioni sono $a_1 = a_2 = 0$; $a_3 = \frac{3h}{\alpha_s^2}$; $a_4 = -\frac{2h}{\alpha_s^3}$. In conclusione il tratto di salita è così dato dalla equazione

$$y(\alpha) = \left(\frac{3h}{\alpha_s^2} - \frac{2h}{\alpha_s^3} \alpha \right) \alpha^2$$

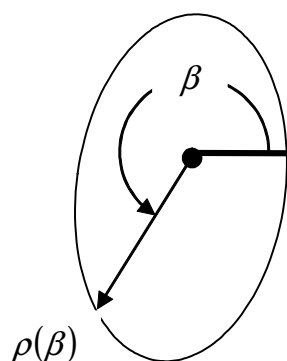
Con lo stesso procedimento si riesce a ricavare il tratto di discesa.

7.3 Sintesi delle camme

La sintesi delle camme prevede l'individuazione del profilo della camma a partire dalla legge oraria del cedente $y(\alpha)$.

7.3.1 Camma a punteria centrata

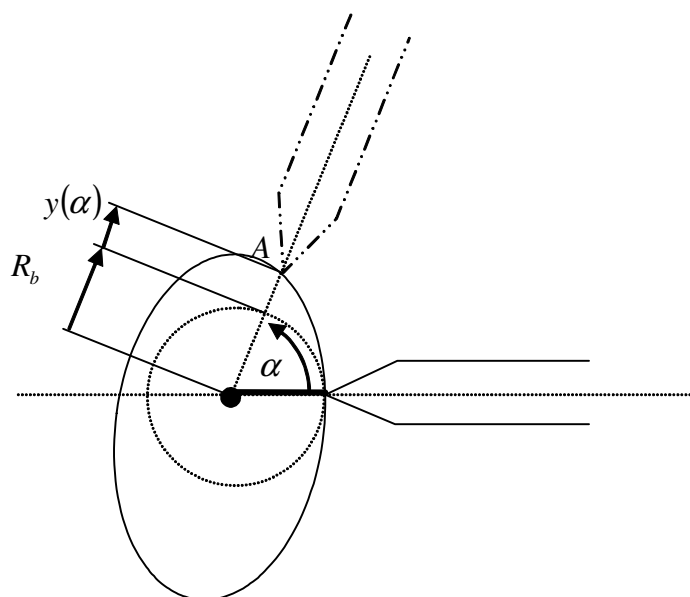
La geometria della camma è definita da un profilo. Fissiamo un sistema di riferimento assoluto ed uno locale associato alla camma. Un punto qualsiasi della camma può essere definito in coordinate polari rispetto al sistema di riferimento locale: ρ e β . Indichiamo con la funzione ρ la distanza del profilo della camma dal centro di rotazione. ρ varia al variare dell'angolo β rispetto al riferimento sulla camma. $\rho = \rho(\beta)$ definisce il profilo della camma e rappresenta la funzione da determinare. Questa funzione fornisce le coordinate polari di un punto del profilo in funzione dell'angolo β a partire dal riferimento associato alla camma.



Nella figura sopra, il riferimento è disposto orizzontalmente. Ipotizziamo che la camma ruoti in senso antiorario. Poiché la camma ruota, indichiamo con α la posizione angolare della camma.

Fissiamo il raggio di base della camma R_b cioè la distanza minima del profilo dal centro di rotazione della camma. Partiamo a costruire il profilo della camma dall'istante in cui inizia il tratto di salita. Perciò, quando $\alpha = 0$, l'alzata del cedente deve essere nulla: $y(\alpha) = 0$. In quell'istante la distanza tra la punteria ed il centro di camma è pari ad R_b . La posizione iniziale della camma

è rappresentata nella figura seguente dalla camma a linea continua.



Supponiamo che la camma ruoti di un angolo α in senso orario. Ciò equivale, dal punto di vista cinematico, a tener ferma la camma ed a far ruotare il cedente in senso antiorario dello stesso angolo α . In figura è rappresentata questa

situazione. In questa nuova configurazione, la distanza della punteria dal centro deve quindi essere data da

$$\rho(\alpha) = R_b + y(\alpha) \quad (7.6)$$

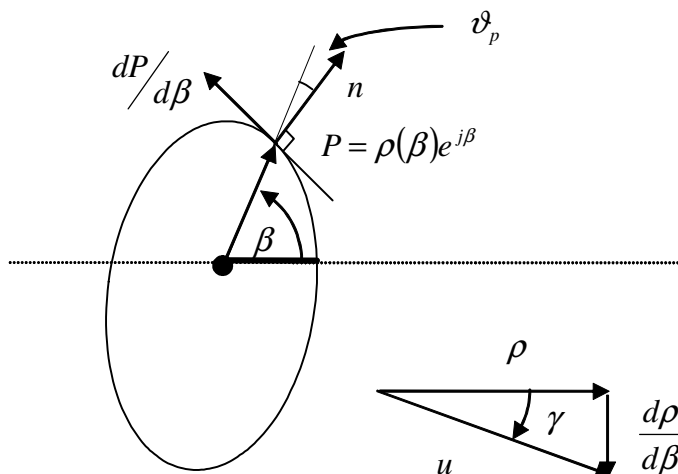
Questa relazione esprime la distanza del punto del profilo della camma in funzione dell'angolo di rotazione della camma stessa. In altre parole, fornisce il profilo della camma in coordinate polari.

7.3.2 Calcolo dell'angolo di pressione in funzione del profilo di camma fornito in coordinate polari.

In questo tipo di camma, l'angolo di pressione è dato dall'angolo che la normale alla superficie forma con la direzione di traslazione della punteria. Supponiamo di avere già individuato il profilo della camma in coordinate polari $\rho(\beta)$. In coordinate complesse, un punto del profilo della camma è pari a

$$\vec{P} = \rho(\beta) e^{j\beta}$$

ed è rappresentato nella seguente figura.



Un vettore tangente al profilo nel punto P si ricava derivando il punto stesso

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{d\beta} &= \frac{d\rho}{d\beta} e^{j\beta} + \rho j e^{j\beta} = \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\beta} + \rho j \right) e^{j\beta} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Se si ruota di 90° il vettore $\frac{d\vec{P}}{d\beta}$ in senso orario, si ottiene il vettore n che è perpendicolare al profilo della camma

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{d\vec{P}}{d\beta} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{d\vec{P}}{d\beta} (-j) = \\ &= \left(\rho - j \frac{d\rho}{d\beta} \right) e^{j\beta}\end{aligned}\quad (7.8)$$

Trasformiamo il vettore $\left(\rho - j \frac{d\rho}{d\beta} \right)$ che è rappresentato nella figura in basso a destra. Il modulo del vettore è $u = \sqrt{\frac{d\rho^2}{d\beta^2} + \rho^2}$, mentre l'angolo che il vettore forma con l'asse reale è $\gamma = -\arctan\left(\frac{\frac{d\rho}{d\beta}}{\rho}\right)$. Applicando queste considerazioni all'eq. 7.8 si ottiene

$$\vec{n} = \left(\rho - j \frac{d\rho}{d\beta} \right) e^{j\beta} = u e^{j\gamma} e^{j\beta} = u e^{j(\gamma+\beta)}$$

La direzione di traslazione della punteria è sempre radiale rispetto al centro della camma, perciò, lungo il profilo, la direzione di traslazione della punteria è data dal vettore \vec{P} . L'angolo di pressione, come si vede dalla figura, è l'angolo formato dal vettore \vec{n} e dal vettore P . Il primo ha un angolo $\gamma + \beta$ rispetto all'orizzontale; il secondo un angolo β . Perciò, l'angolo tra i due vettori, che corrisponde all'angolo di pressione è

$$\|\vartheta_p\| = \|\gamma\| = \arctan\left(\frac{\frac{d\rho}{d\beta}}{\rho}\right)\quad (7.9)$$

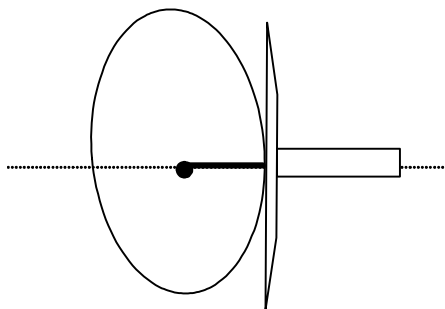
Si considera il modulo, poiché solitamente l'angolo di pressione viene limitato in modulo, nel senso che quando l'angolo di pressione è troppo elevato, si producono delle forze di reazione pericolosamente elevate tra camma e punteria, indipendentemente dal segno dell'angolo di pressione. E' possibile esprimere l'angolo di pressione in funzione del raggio di base. Sostituendo l'eq. ?? nella 7.9 e considerando il fatto che $\beta = -\alpha$, si ottiene

$$\begin{aligned}\|\vartheta_p\| &= \left\| \arctan\left(\frac{\frac{d\rho}{d\beta}}{\rho}\right) \right\| = \\ &= \left\| \arctan\left(\frac{d(R_b + y(\beta))}{d\beta} \frac{1}{R_b + y(\beta)}\right) \right\| = \\ &= \left\| \arctan\left(\frac{dy}{d\beta} \frac{1}{R_b + y(\beta)}\right) \right\|\end{aligned}$$

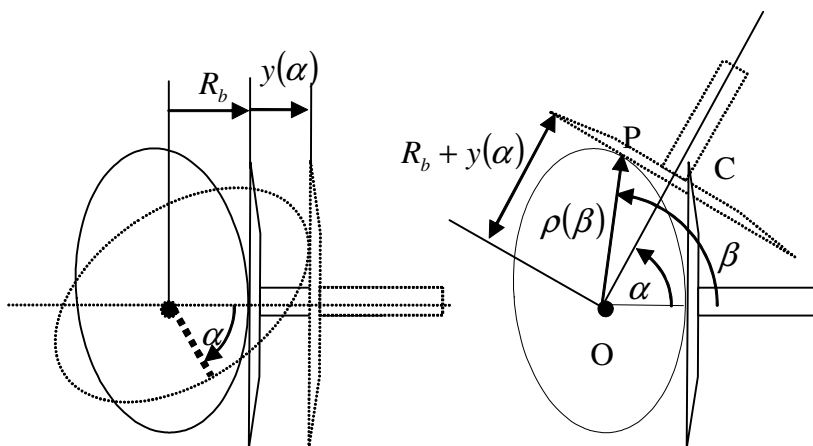
L'angolo di pressione è stato messo in funzione della traiettoria del cedente e del raggio di base. Come si può notare all'aumentare del raggio di base, diminuisce l'angolo di pressione. Perciò quando si progetta una camma, a parità di traiettoria del cedente, il raggio di base viene scelto in maniera tale da ottenere un compromesso tra piccoli ingombri (R_b piccolo) e bassi valori dell'angolo di pressione (R_b elevato).

7.3.3 Camma a punteria con piattello

La configurazione iniziale della camma è quella rappresentata nella figura seguente, dove il piattello è appoggiato al profilo della camma. Si suppone che all'istante iniziale il piattello stia per affrontare il tratto di salita, per cui la distanza del piattello dal centro della camma è minima ed è data dal raggio di base R_b .



Supponiamo che la camma ruoti in senso orario (la teoria è equivalente ipotizzando che ruoti in senso antiorario). Dal punto di vista della determinazione del profilo, considerare che la camma ruoti di un angolo in senso orario (figura sottostante a sinistra) è equivalente a tener ferma la camma e ruotare l'asse di traslazione del piattello di un angolo in senso antiorario (figura seguente di destra). In altre parole ponendoci nel sistema di riferimento della camma, si osserverà il piattello ruotare in senso antiorario.



Il punto O è l'origine del sistema di riferimento. Il punto C è dato dall'intersezione dell'asse di scorrimento del piattello con il piattello stesso; il punto P è il punto di contatto tra piattello e profilo della camma. La distanza del piattello dal centro della camma è data da $OC = R_b + y(\alpha)$ e come si vede è in

funzione dell'angolo di rotazione della camma, che, per quanto visto, rispetto ad un sistema di riferimento associato alla camma, è equivalente all'angolo di rotazione del piattello. Si ricorda che la funzione $y(\alpha)$ è un dato del problema.

Come primo passo, determiniamo il segmento CP .

Il punto \vec{P} è dato da

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{OC} + \vec{CP} = \\ &= (R_b + y(\alpha)) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + CP \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.10)$$

Poiché il punto \vec{P} descrive il profilo della camma, la sua derivata rispetto ad α darà origine ad un vettore tangente al profilo stesso

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{d\alpha} &= \frac{dy}{d\alpha} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + (R_b + y(\alpha)) \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \\ &\frac{dCP}{d\alpha} \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} + CP \begin{Bmatrix} -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

La direzione dell'asse di scorrimento, data dal versore $\{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$, rappresenta un versore perpendicolare al profilo nel punto \vec{P} . Per cui il prodotto scalare tra $\frac{d\vec{P}}{d\alpha}$ (tangente al profilo) ed $\{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$ (perpendicolare al profilo) deve essere nullo.

$$\begin{aligned}0 &= \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \frac{d\vec{P}}{d\alpha} = \\ &= \frac{dy}{d\alpha} \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + (R_b + y(\alpha)) \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \\ &+ \frac{dCP}{d\alpha} \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} \\ &+ CP \{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} \\ &= \frac{dy}{d\alpha} + \frac{dCP}{d\alpha} \left(\cos(\alpha) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) + \\ &+ CP \left(\sin(\alpha) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{dy}{d\alpha} + \frac{dCP}{d\alpha} \cos\left(\alpha - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + CP \sin\left(\alpha - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{dy}{d\alpha} - CP\end{aligned}$$

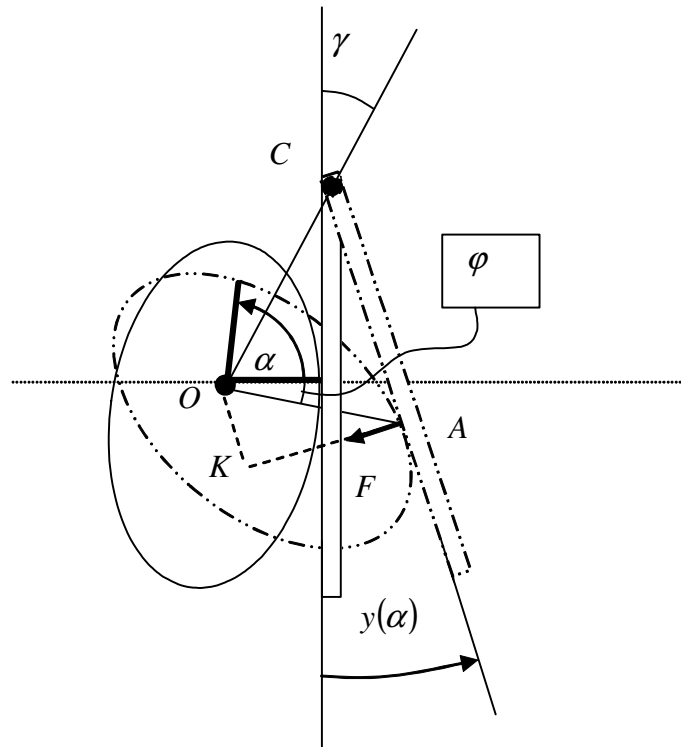
Per cui $CP = -\frac{dy}{d\alpha}$. Sostituendo nell'eq. 7.10 si ottiene l'equazione del profilo

$$\vec{P} = (R_b + y(\alpha)) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + \frac{dy}{d\alpha} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{Bmatrix}$$

Notare che il profilo della camma in questo caso non è espresso in coordinate polari, bensì in coordinate cartesiane; cioè le componenti lungo x e lungo y del punto \vec{P} come funzione del parametro α .

7.3.4 Camma a bilanciere con piattello

Disponiamo il cedente verticalmente come in figura



La camma ruota in senso antiorario. All'istante iniziale la distanza del cedente dal centro di camma è data dal valore del raggio di base R_b . La configurazione iniziale in figura è rappresentata dalla camma e piattello con linea continua. Si vede che il cedente è verticale. R_b è la distanza minima del profilo della camma dal centro di rotazione della stessa. Perciò all'istante iniziale il punto di contatto appartiene alla retta orizzontale passante per il centro della camma. Fissiamo un riferimento sulla camma. Il riferimento è disposto orizzontalmente all'istante iniziale. Quando la camma avrà ruotato di un angolo α significa che il riferimento avrà ruotato di un angolo α (la sua rotazione è rappresentata in figura). Nel frattempo il punto di contatto tra cedente e piattello si sarà spostato lungo il cedente. Nella figura il punto di contatto è il

punto A, mentre C è il punto di rotazione del cedente. La distanza del punto C dal centro della camma OC è un dato del problema come pure l'angolo γ che definisce la posizione angolare di OC. La posizione angolare del vettore che definisce la posizione di A è φ . In questo tipo di camma, la funzione $y(\alpha)$ che rappresenta un dato conosciuto per il problema di sintesi, esprime un angolo.

Per prima cosa individuamo la distanza CA al variare della rotazione di camma α . Per fare questo, invece della consueta notazione vettoriale, introduciamo il seguente concetto. Cedente e camma si scambiano una forza di contatto F che è perpendicolare sia alla camma che al cedente. In figura è rappresentata la forza che il cedente esercita sulla camma. Questa forza che si oppone al moto della camma genera una coppia nella camma. La coppia moltiplicata per la velocità di rotazione esprime la potenza che la camma perde per azionare il cedente. Essa vale in modulo

$$P_1 = F OK \dot{\alpha}$$

dove il segmento $OK = AC - OC \cos(\widehat{OCA}) = AC - OC \cos(\gamma + y(\alpha))$

La potenza trasmessa al cedente è data dalla coppia prodotta dalla forza F sul cedente (forza uguale e contraria a quella in figura) per la velocità angolare del cedente, cioè, (in modulo)

$$P_2 = F AC \frac{dy}{d\alpha} \dot{\alpha}$$

Il modulo delle due potenze deve essere uguale, per cui

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ \Rightarrow \\ AC &= \frac{OC \cos(\gamma + y(\alpha))}{1 - \frac{dy}{d\alpha}} \end{aligned}$$

Da questa grandezza si riesce a ricavare le coordinate polari del profilo. Nota che, quando $\frac{dy}{d\alpha} = 1$, il valore di AC tende all'infinito. Perciò, affinché sia realizzabile questo tipo di camma, deve essere soddisfatta la condizione $\frac{dy}{d\alpha} < 1$ per ogni α compreso tra 0 e 2π .

Il punto A, rispetto ad un sistema di riferimento nel centro di camma vale

$$A = OC \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \end{array} \right\} + AC \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + y(\alpha)\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + y(\alpha)\right) \end{array} \right\}$$

Il modulo e la posizione angolare del punto di contatto dal centro di camma è perciò

$$\rho(\alpha) = \|A - O\| = \|A\|$$

$$\varphi = \arctan 2(y_A, x_A)$$

Rispetto al sistema di riferimento associato alla camma (che ruota quindi con la camma), la posizione angolare del punto di contatto è

$$\beta = 2\pi - \alpha + \varphi$$

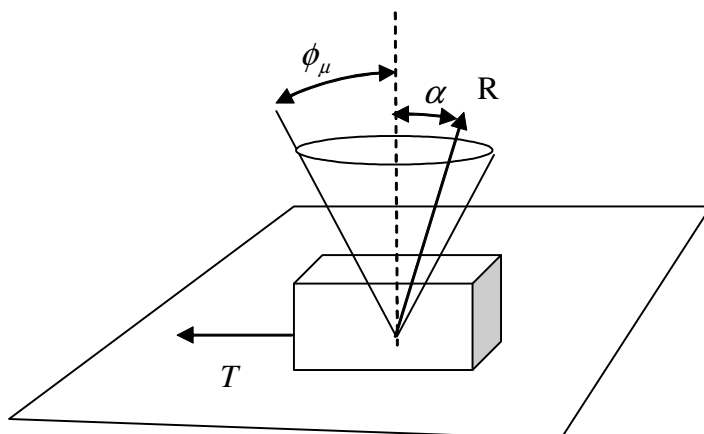
Concludendo, il profilo è definito dalle coordinate polari $\rho(\alpha)$ ed $\beta(\alpha)$.

Capitolo 8

Cuscinetti e guide lineari

8.1 Attrito

Elementi costruttivi come cuscinetti e guide lineari hanno la funzione di diminuire le azioni delle forze d'attrito che nascono quando due corpi strisciano uno sull'altro. Prima di procedere con lo studio degli elementi costruttivi in esame, si riassumeranno brevemente le proprietà del coefficiente d'attrito.



Consideriamo un blocchetto disposto su di un piano. Il blocchetto è premuto perpendicolarmente al piano con una forza N . Tra blocchetto e piano sono presenti delle azioni d'attrito. Per le proprietà del *cono di attrito*, la reazione R tra blocchetto e superficie di contatto è determinata da un qualsiasi vettore all'interno del cono di attrito caratterizzato dall'angolo ϕ_μ , detto *angolo di attrito*. Se non si applica nessuna forza di trazione al blocco, R si dispone verticalmente in quanto equilibra solamente la forza N . Nel caso in cui si applichi una forza di trazione T , R si inclina in maniera tale che la sua componente orizzontale vada ad equilibrare la forza di trazione

$$T = R \sin(\alpha)$$

Perciò $F_a = R \sin(\alpha)$ rappresenta la forza di attrito. Il blocchetto rimane fermo in quanto le forze orizzontali sono perfettamente equilibrate. La componente verticale di R rimane costante ed uguale alla forza N , perciò $R \cos(\alpha) = N$. Se si aumenta la forza di trazione T , aumenta anche l'inclinazione della reazione R e di conseguenza anche la forza di attrito $F_a = R \sin(\alpha)$. Però l'angolo α dovrà essere sempre inferiore a ϕ_μ . Nel momento in cui arriviamo a tirare il blocchetto in maniera tale che $\alpha = \phi_\mu$, significa che la forza di attrito non è più in grado di equilibrare la forza di trazione T .

Tale condizione è espressa dicendo che il meccanismo è in condizione di *moto incipiente*.

Il rapporto tra la componente orizzontale e verticale di R , nella condizione di moto incipiente in cui $F_a = F_{a \max}$, è detto *coefficiente d'attrito* μ .

$$\mu = \frac{R \sin(\phi_\mu)}{R \cos(\phi_\mu)} = \frac{F_{a \max}}{N}$$

In generale, al di fuori della condizione di moto incipiente, si ha

$$F_a \leq \mu N$$

Il legame tra il coefficiente d'attrito e l'angolo d'attrito è dato da

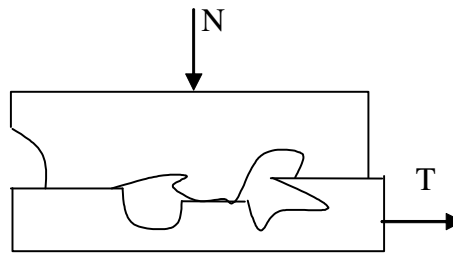
$$\mu = \frac{R \sin(\phi_\mu)}{R \cos(\phi_\mu)} = \tan(\phi_\mu)$$

Da che cosa è provocata la forza di attrito F_a ?

Vi sono diversi fattori concomitanti tra di loro:

- *Rottura delle microgiunzioni:*

Quando due corpi vengono a contatto, la forza normale N causa la microgiunzione di alcune superfici a contatto.



Quando viene applicata la forza di trazione T , le giunzioni si oppongono al moto. E' intuitivo pensare che la forza d'attrito provocata dalle microgiunzioni sarà tanto più elevata quanto più estesa sarà l'area totale delle microgiunzioni. Inoltre l'area totale è tanto maggiore quanto più elevata sarà la forza

perpendicolare alla superficie N . Questo è il motivo per cui la forza di attrito è proporzionale alla forza N ,

$$F_a = \mu N$$

- *Deformazione non elastica delle asperità:*

Tra due corpi a contatto sono sempre presenti delle asperità micrometriche. Quando, durante il moto, tali asperità vengono a contatto tra di loro esse si deformano plasticamente assorbendo energia senza renderla. Durante il processo, generano delle forze che si oppongono alla deformazione e quindi al moto.

- *Rottura delle asperità:*

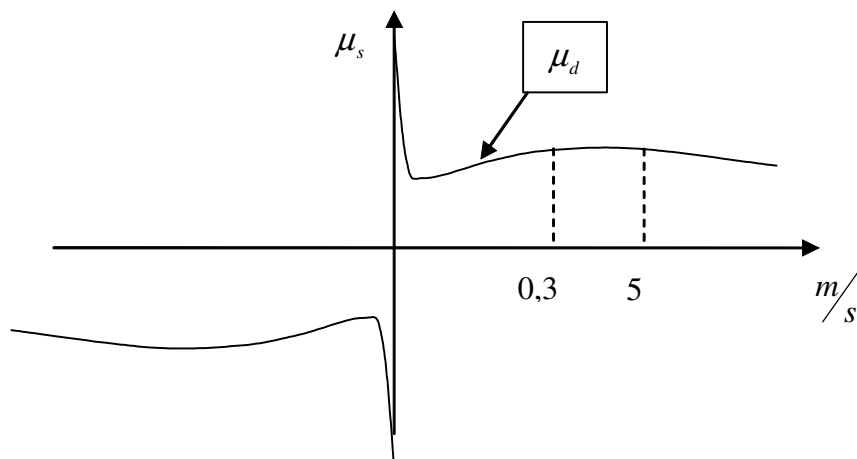
Questo fenomeno è simile al precedente con la differenza che, in questo caso, le asperità vengono staccate dal corpo originale. Tale fenomeno dà anche una spiegazione del fenomeno dell'usura associato all'attrito.

- *Solcatura:*

Questo meccanismo si instaura soprattutto in corpi a contatto di cui uno dei due è più tenero dell'altro. La solcatura avviene in maniera plastica (l'energia assorbita non viene ritornata)

8.1.1 Parametri che influenzano il coefficiente d'attrito

Il coefficiente d'attrito tende a variare con la *velocità*. Il caso di superfici non lubrificate è molto diverso dal caso di superfici lubrificate. Nel primo caso, l'andamento del coefficiente d'attrito ha un andamento qualitativo come in figura



Il coefficiente d'attrito corrispondente alla velocità nulla è chiamato *coefficiente d'attrito statico* μ_s . Quando il corpo è in condizione di strisciamento si parla di *coefficiente d'attrito dinamico* μ_d .

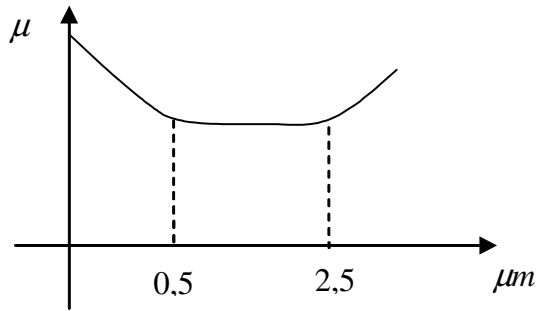
Il coefficiente d'attrito statico è più elevato del coefficiente d'attrito dinamico. Questo fenomeno è spiegabile ricorrendo al modello della rottura delle

microgiunzioni. Quando il corpo inizia a strisciare (nell'istante in cui vengono rotte le microgiunzioni) è difficile che se ne creino delle altre durante il moto. Per cui il contributo dato dalla rottura delle microgiunzioni alla forza di attrito, viene a mancare.

Dopo una brusca diminuzione, passando da velocità nulla a velocità piccolissime (dell'ordine di 0,001 m/s), il coefficiente d'attrito dinamico subisce poi un sensibile aumento al crescere della velocità fino a valori di circa 0,3 m/s. Nel seguente range di velocità fino a circa 5 m/s, il coefficiente d'attrito si mantiene pressochè costante. Oltre quella velocità tende a decrescere.

L'attrito è in funzione della rugosità.

Si ricorda che la rugosità media è definita come $R_a = \frac{\int_0^l |y| ds}{l}$, cioè come la media del modulo degli scostamenti y della superficie da un valore medio rispetto ad una lunghezza l .

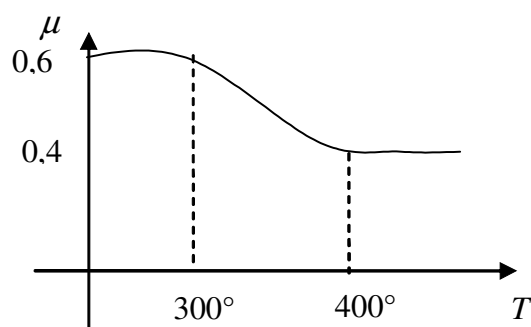


Si possono contraddistinguere tre tratti. Per rugosità molto basse il coefficiente d'attrito aumenta dato che l'area delle microgiunzioni tende ad aumentare. Poi è presente un tratto costante. Infine, sopra un determinato valore, il coefficiente d'attrito tende ad aumentare a causa del prevalere dei fenomeni di rottura delle asperità, deformazione delle asperità e solcatura.

La *temperatura* è un parametro piuttosto importante.

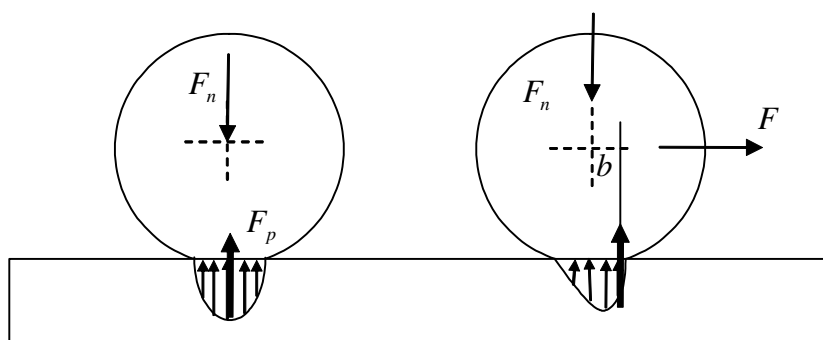
Il coefficiente d'attrito non manifesta grosse variazioni rispetto alla variazione della temperatura ambiente. Ma in tutte quelle applicazioni in cui, a causa dello sfregamento tra le superfici, si genera del calore e quindi aumenti localizzati di temperatura (si pensi ai freni) il coefficiente può diminuire bruscamente all'aumentare della temperatura. Il motivo risiede nel fatto che le microgiunzioni diventano meno resistenti. Questo fenomeno è particolarmente dannoso nei freni.

In figura è rappresentato il coefficiente d'attrito riferito all'interfaccia di contatto tra ceppo e disco per velocità pari a 3,5 m/s.



8.1.2 Attrito volvente

L'attrito volvente si manifesta tra un corpo che rotola su di una superficie. Per fissare le idee pensiamo ad un cilindro. A causa dell'elasticità dei due corpi a contatto il contatto non avviene lungo una linea, ma lungo un'area più o meno spessa a seconda dell'elasticità. Supponiamo che il cilindro sia molto più elastico del piano di appoggio. La situazione è la seguente (figura di sinistra)



Nel caso in cui il cilindro sia fermo, la pressione esercitata dal piano di contatto sul cilindro non è costante lungo l'area di contatto, ma ha una distribuzione simmetrica rispetto alla linea diametrale del cilindro. L'azione complessiva delle pressioni è

$$F_p = \int_A p \, dA$$

Nel momento in cui viene applicata una forza F al centro del rullo in direzione orizzontale ed il rullo si mette in movimento, le pressioni non hanno più una distribuzione simmetrica. Il motivo è dovuto alla viscoelasticità del materiale. Ossia, il materiale che sta a destra della linea di simmetria che viene ad essere compresso tende ad opporsi alla deformazione. Il materiale a sinistra della linea di simmetria, una volta compresso, non si estende istantaneamente e quindi non

restituisce l'energia accumulata nella compressione. Il risultato è che la forza perpendicolare $F_p = \int_A p \, dA$ risulta essere spostata verso destra.

Impostando l'equilibrio verticale e l'equilibrio ai momenti (con polo il punto di contatto), si ottiene

$$\begin{aligned} F_p &= F_n \\ F_p b &= r F \end{aligned}$$

dove b è il braccio della forza F_p ed r è il raggio del rullo, da cui si deduce che la forza necessaria per muovere il cilindro è

$$F = F_n \frac{b}{r}$$

Il *coefficiente d'attrito di rotolamento* μ_v viene definito come il rapporto tra la coppia resistiva massima $M_{r_{\max}} = F_p b$ e la forza normale F_n (nelle condizioni di moto incipiente)

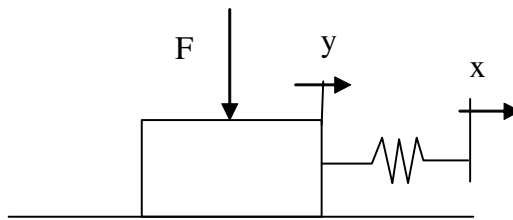
$$\mu_v = \frac{M_{r_{\max}}}{F_n}$$

Come avviene nel caso di attrito radente, la coppia resistiva che si oppone al moto può assumere i valori

$$M_r \leq \mu_v F_n$$

8.1.3 Fenomeno dello stick-slip

Il fenomeno dello stick-slip, che si manifesta attraverso un ruome stridente, è causato dall'elasticità del materiale e dalla dipendenza del coefficiente d'attrito dalla velocità



Schematizziamo il problema introducendo alcune semplificazioni. Supponiamo un blocco premuto contro una superficie con una forza F . Supponiamo che il coefficiente d'attrito statico sia μ_s e che quello dinamico μ_d sia costante al variare della velocità ma inferiore a μ_s .

La forza di attrito assumerà quindi due valori estremi a seconda che il corpo sia in movimento o fermo.

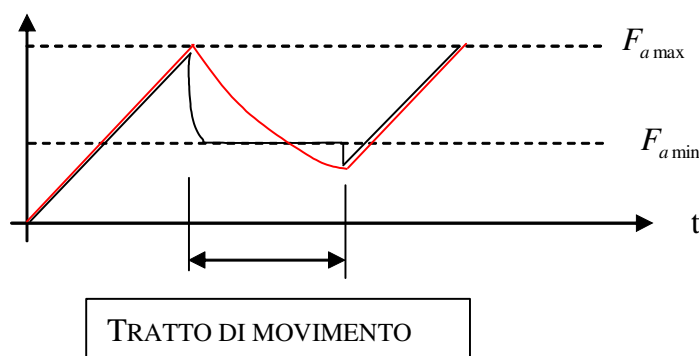
$$F_{a \max} = \mu_s F \quad (v = 0)$$

$$F_{a \min} = \mu_d F \quad (v \neq 0)$$

Partiamo da una configurazione in cui il blocco è fermo e la molla non è estesa ($x = y = 0$). Supponiamo che la coordinata x si sposti a velocità costante v . La forza elastica aumenta linearmente secondo la legge

$$\begin{aligned} F_{el} &= k(x - y) = \\ &= kx = \\ &= kv t \end{aligned}$$

La forza di attrito F_a equilibra la forza elastica, per cui, anche la forza d'attrito ha andamento $F_a = kv t$. Grafichiamo l'andamento delle due forze rispetto al tempo. In rosso è graficato l'andamento della forza elastica, mentre in nero l'andamento della forza d'attrito.



Quando la forza d'attrito raggiunge il suo valore massimo $F_{a \max}$ non è più in grado di contrastare la forza elastica e quindi il blocco si mette in movimento. Dato che il corpo si muove, il coefficiente d'attrito cambia istantaneamente da coefficiente d'attrito statico a coefficiente d'attrito dinamico, per cui la forza di attrito passa da $F_{a \max}$ ad $F_{a \min}$. Da quando il corpo inizia a muoversi il corpo è soggetto ad una accelerazione improvvisa dovuta alla forza totale $F_{el} - F_{a \min}$.

Questa forza, mano a mano che y si avvicina ad x , tende a diminuire, finché non arriva ad eguagliare la forza minima di attrito. A questo punto il blocco viene decelerato, in quanto la forza di attrito ha il sopravvento sulla forza elastica e ben presto il blocco si ferma.

Da questo istante la forza di attrito tende ad equilibrare la forza elastica, perciò si ripete il ciclo.

8.2 Cuscinetti volventi

I cuscinetti volventi hanno la funzione di sostituire la condizione di moto radente con moto volvente. L'attrito volvente come è noto è molto minore dell'attrito

radente. I cuscinetti sono generalmente costituiti da due anelli all'interno dei quali scorrono gli elementi volventi. Questi possono essere sfere, rulli o rullini. La scelta dei cuscinetti dipende dall'entità del carico che devono sopportare, dal tipo di carico (assiale, radiale o combinato), dalla precisione richiesta, dal disallineamento tollerabile e dagli ingombri. In ogni caso possono subentrare altri fattori che orientano la scelta, per cui non esiste una linea guida fissa e generale.

8.2.1 Classificazione dei cuscinetti

I cuscinetti possono essere classificati a seconda della loro tipologia. Nella seguente figura sono rappresentate in sezione le principali tipologie di cuscinetti.

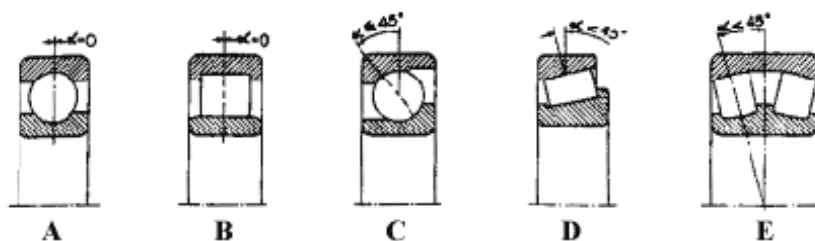


Figure 6

I *cuscinetti radiali a sfere* (A) sono i più diffusi tra i cuscinetti. Resistono bene sia a carichi assiali che radiali. Possono operare ad elevate velocità. Come si vede dalla figura non sono disassemblabili. Esistono versioni autolubrificanti che richiedono poca manutenzione.

I *cuscinetti a rulli cilindrici* (B) vengono utilizzati quando sono presenti forti carichi radiali dato che il contatto tra anello e rullo avviene lungo una linea anziché essere puntiforme. Non resistono per nulla a carichi assiali. Infatti possono anche essere disassemblati sfilando l'anello internamente.

I *cuscinetti obliqui a sfere* (C) come pure i *cuscinetti a rulli conici* (D) vengono solitamente montati in coppia, come sarà chiarito in seguito. Come si vede dalla figura resistono al carico assiale solamente in una direzione.

I *cuscinetti orientabili a rulli* (E) hanno la caratteristica di funzionare bene anche quando l'asse di rotazione dell'anello interno è disassato rispetto all'asse dell'anello esterno. Si usano in tutte quelle applicazioni in cui non è possibile allineare perfettamente la sede del cuscinetto e l'albero.

Nella figura seguente sono rappresentati cuscinetti in grado di resistere prevalentemente a carichi assiali: *cuscinetti a rulli conici* (A), in cui l'angolo di contatto α è maggiore di 45° in maniera tale da resistere prevalentemente a sforzo assiale; *cuscinetti obliqui a sfere* (B), in cui l'angolo di contatto α è maggiore di 45° , *cuscinetti assiali a sfere* (C) e *cuscinetti assiali a rulli cilindrici* (D).

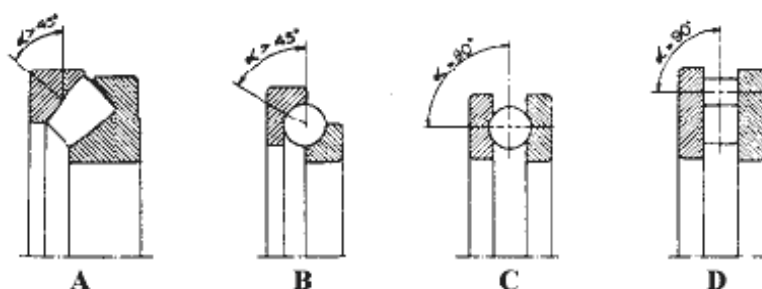
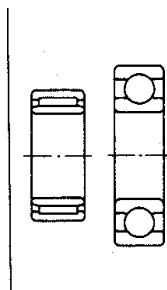


Figure 7

Quando gli ingombri sono una variabile critica di progettazione si ricorre a *cuscinetti a rullini* che a parità di anello interno riescono a limitare l'ingombro dell'anello esterno come mostrato nella figura seguente.



8.2.2 Scelta dei cuscinetti

Nella scelta del cuscinetto, si procede nel seguente modo. Individuata la tipologia che più si presta al tipo di applicazione e stimati i carichi a cui deve essere sottoposto il cuscinetto, si passa alla verifica dimensionale. A seconda del tipo di carico cui è soggetto il cuscinetto si intraprendono due strade diverse:

- 1) Cuscinetto che ruota a velocità medio-alta;
- 2) Cuscinetto che ruota a basse velocità o, malgrado ruoti a velocità medio-alte, sia soggetto a carichi d'urto elevati.

Nel primo caso il cuscinetto si rompe per fatica, mentre nel secondo caso, il cuscinetto si rompe per deformazione permanente provocata dal carico in corrispondenza dei contatti tra pista e corpi volventi.

Perciò, a seconda dei casi bisogna verificare il cuscinetto secondo uno dei due metodi. Se la verifica porta ad un esito negativo, è necessario scegliere un altro cuscinetto (generalmente di dimensioni più elevate) e ripetere la verifica.

Formula di durata - carico puramente radiale o puramente assiale.

La formula di durata si utilizza quando il cuscinetto ruota a velocità medio-alte e non sono presenti carichi d'urto elevati. In questo caso il cuscinetto ha una

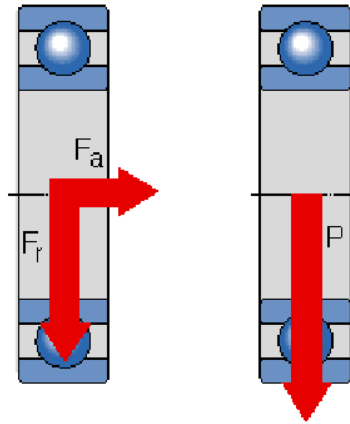
vita limitata che può essere stimata in numero di giri od equivalentemente in ore di funzionamento.

Introduciamo alcune definizioni utili.

Asse del cuscinetto = asse di rotazione del cuscinetto.

$F_r = \text{Carico radiale}$ = forza (misurata in N) cui è soggetto il cuscinetto perpendicolarmente all'asse del cuscinetto. E' un valore che si calcola solitamente attraverso la soluzione di un problema di cinetostatica. Dipende infatti dalle forze inerziali e dai carichi della macchina.

$F_a = \text{Carico assiale}$ = forza (misurata in N) cui è soggetto il cuscinetto l'ungo l'asse del cuscinetto.



Un cuscinetto radiale è realizzato per sopportare prevalentemente carichi radiali, mentre uno assiale per sopportare prevalentemente carichi assiali. In questi due casi estremi, il modo più semplice per calcolare la durata del cuscinetto consiste nell'impiegare la formula di durata

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P} \right)^p \quad (8.1)$$

dove

$C = \text{coefficiente di carico dinamico}$. Si misura in N ed è un dato che si legge direttamente dal catalogo dei cuscinetti.

Il coefficiente di carico dinamico C deve essere diminuito nel caso in cui il cuscinetto lavori ad alte temperature. Deve essere moltiplicato per un fattore di temperatura che si ottiene dalla seguente tabella

Temperatura ($^{\circ}C$)	150	200	250	300
Fattore di temperatura	1	0,9	0,75	0,6

$p = \begin{cases} 3 & \text{per cuscinetti a sfere} \\ \frac{10}{3} & \text{per cuscinetti a rulli} \end{cases}$ L'esponente p tiene conto della tipologia del cuscinetto.

$P = \text{carico dinamico equivalente}$. Nel caso di un cuscinetto radiale soggetto ad un carico puramente radiale, si considera $P = F_r$. Nel caso di un cuscinetto assiale soggetto ad un carico puramente assiale, si considera $P = F_a$.

$L_{10} = \text{durata di base}$. Rappresenta la durata del cuscinetto in milioni di giri. La vita del cuscinetto non è calcolabile esattamente. Statisticamente, il 90 % dei cuscinetti riesce a resistere per un tempo pari alla durata di base che è fornita dalla formula di durata.

Si usa comunemente esprimere la durata in di base in ore di funzionamento utilizzando, al posto dell'eq. 8.1, la seguente

$$L_{10h} = \frac{1000000}{60 n} \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

dove

$n = \text{velocità di rotazione dell'albero}$ (dove il cuscinetto è calettato) misurata in numero di giri al minuto.

Una volta calcolato il valore della durata di base ci si può chiedere se questo valore è accettabile o meno. La risposta dipende dal tipo di applicazione. Nel caso non si riesca ad avere dei valori precisi, la seguente tabella di riferimento fornisce dei valori indicativi.

Tipologia di macchina	ore di funzionamento
Apparecchiature medio-piccole	da 300 a 3000
Elettrodomestici	da 300 a 3000
Macchine con funzionamento intermittente	da 3000 a 8000
Ascensori, montacarichi	da 8000 a 12000
Macchine funzionanti 8 ore al giorno	da 10000 a 30000
Macchine funzionanti 24 ore al giorno	da 40000 a 50000

Formula della verifica statica - carico puramente radiale o puramente assiale.

La verifica dei cuscinetti mediante verifica statica si utilizza quando il cuscinetto ruota a basse velocità, oppure ruota a velocità medie, ma è soggetto ad urti o forze elevate intermittenti. In luogo della formula di durata 8.1, si utilizza

$$s_0 = \frac{C_0}{P_0} \quad (8.2)$$

dove

$C_0 = \text{coefficiente di carico statico}$. Si misura in N ed è un dato che si legge direttamente dal catalogo dei cuscinetti.

$P_0 = \text{carico statico equivalente}$. Nel caso di un cuscinetto radiale soggetto ad un carico puramente radiale, si considera $P_0 = F_r$. Nel caso di un cuscinetto assiale soggetto ad un carico puramente assiale, si considera $P_0 = F_a$.

$s_0 = \text{coefficiente di sicurezza relativo al carico statico}$. Questo coefficiente, che si ricava dalla eq. 8.2, deve essere superiore ad un determinato valore che dipende dal tipo di applicazione e dalla tipologia del cuscinetto. Valori

indicativi vengono forniti da tabelle di catalogo. Riportiamo di seguito dei valori di esempio

Tipo di funzionamento	cuscinetti rotanti		cuscinetti non rotanti	
	sfere	rulli	sfere	rulli
Senza vibrazioni	0,5 ÷ 1	1,5	0,4	0,8
Normale	0,5 ÷ 1	1,5	0,5	1
Con carichi d'urto	≥1,5	≥3	≥1	≥2

Compresenza di carico assiale e carico radiale - carichi costanti nel tempo.

Nella maggior parte delle applicazioni il carico che agisce sul cuscinetto ha sia una componente radiale che assiale. Quando i carichi assiali e radiali sono costanti nel tempo si opera come di seguito

Un cuscinetto radiale sopporta molto bene carichi radiali. In ogni caso è in grado di sopportare anche dei carichi assiali di modesta entità. Quando perciò è presente anche un carico assiale se ne tiene conto calcolando un carico equivalentemente. Le formule eq. ?? ed 8.2 sono ancora valide.

In questo caso il carico dinamico equivalente ed il carico statico equivalente si calcolano nel seguente modo

$$P = X F_r + Y F_a$$

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a$$

dove

X = *fattore relativo al carico dinamico radiale sul cuscinetto.* Questo valore, che dipende dalla tipologia dei cuscinetto è fornito dal manuale.

Y = *fattore relativo al carico dinamico assiale sul cuscinetto.*

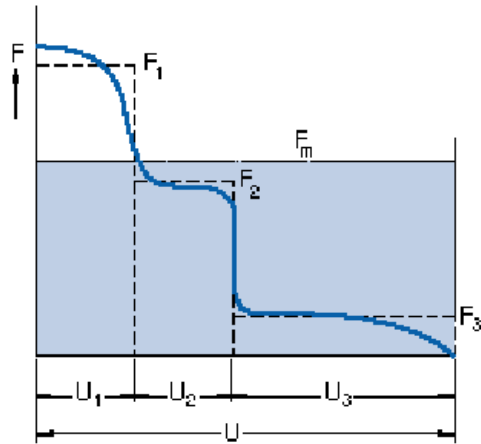
X_0 = *fattore relativo al carico statico radiale sul cuscinetto.*

Y_0 = *fattore relativo al carico statico assiale sul cuscinetto.*

Carichi variabili nel tempo.

Nel caso in cui il carico che agisce sul cuscinetto non sia costante nel tempo, si calcola una media di carico assiale F_{ma} e radiale F_{mr} secondo vari metodi. Vengono presentati i due più comuni.

1) Questo primo metodo si usa quando il carico si mantiene circa costante per intervalli di tempo regolari, come in figura.

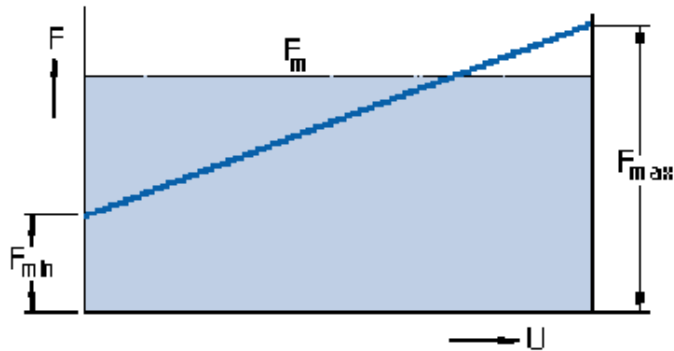


La media del carico (che si riferisce a seconda dei casi al carico assiale o radiale) è

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 U_1 + \dots + F_n^3 U_n}{U_1 + \dots + U_n}}$$

dove U_i sono la durata misurata in numeri di giri durante la quale agisce F_i .

2) Il secondo metodo si usa quando il carico varia gradualmente tra un valore minimo F_{\min} ed un massimo F_{\max} come in figura



La media del carico (che si riferisce a seconda dei casi al carico assiale o radiale) è

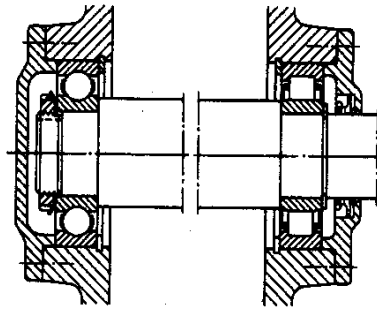
$$F_m = \frac{F_{\min} + 2 F_{\max}}{3}$$

Una volta calcolate le medie, il carico dinamico equivalente si ottiene attraverso la consueta combinazione dei carichi

$$P = X F_{mr} + Y F_{ma}$$

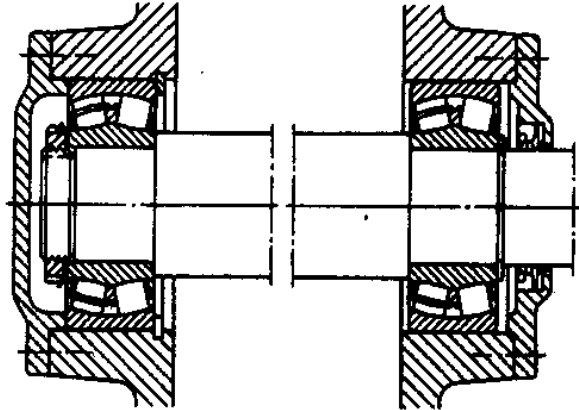
8.2.3 Configurazione di montaggio dei cuscinetti

Un albero rotante di una macchina è generalmente supportato in due punti in condizioni isostatiche. L'albero deve essere vincolato sia assialmente che radialmente. Uno dei due cuscinetti è vincolato sia assialmente che radialmente, mentre l'altro cuscinetto è vincolato solo radialmente come nella configurazione seguente.



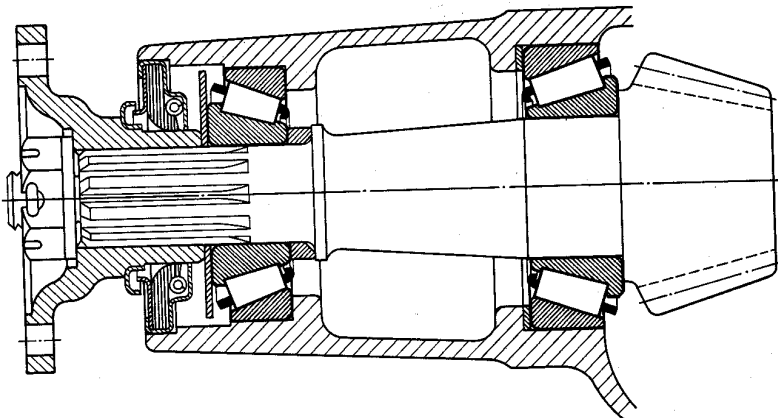
Il cuscinetto a sfere di sinistra ha l'anello esterno che va in battuta a sinistra su di un anello di spallamento. A destra è vincolato dal coperchio. Tutto lo sforzo assiale agente sull'albero viene assorbito da questo cuscinetto. L'anello interno del cuscinetto a destra va in battuta sullo spallamento ricavato sull'albero. A sinistra è chiuso da una ghiera avvitata sull'albero. In questo modo l'albero non può avere alcun movimento assiale. Se vi sono delle variazioni termiche che allungano od accorciano l'albero, l'estremità di destra dell'albero si sposta. Questo è il motivo per cui una estremità dell'albero viene lasciata libera di scorrere. Infatti a destra è presente un cuscinetto radiale a rulli cilindrici. L'anello esterno è vincolato assialmente, come pure l'anello interno, ma, come si può notare dalla figura, i rulli possono scorrere assialmente lungo l'anello interno. Questo tipo di montaggio compensa anche gli errori costruttivi nella realizzazione degli alloggiamenti dei due cuscinetti.

Un altro esempio è fornito dalla seguente figura



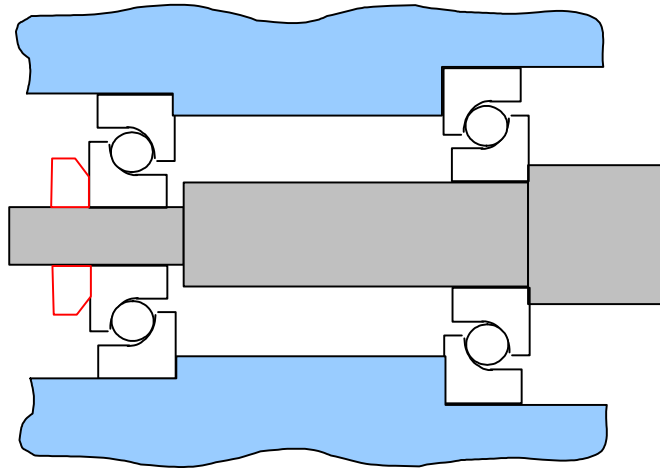
Il cuscinetto di sinistra supporta il carico assiale ed è quindi tenuto fermo. L'anello esterno del cuscinetto orientabile a rulli di destra può scorrere all'interno della sede assialmente.

Ci sono applicazioni in cui è richiesta una elevata rigidità del sistema. Un esempio è dato dal cuscinettamento dei mandrini delle macchine utensili. L'aumentata rigidità può essere ottenuta accoppiando due cuscinetti obliqui a sfere od a rulli rulli conici come in figura.



Il dado di sinistra, avvitandosi, va a premere sull'anello interno del cuscinetto di sinistra. In questo modo i due cuscinetti vengono compressi a pacco. Più si

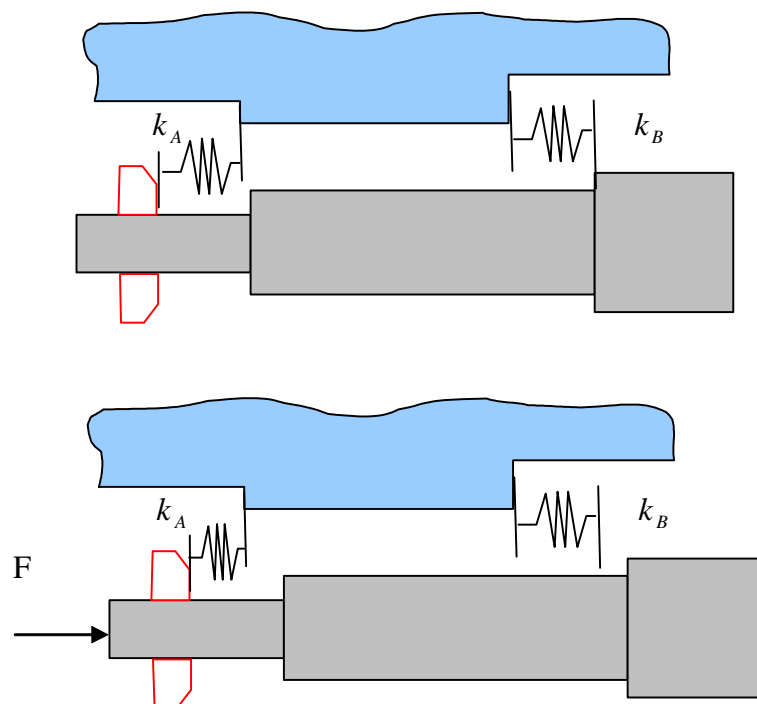
stringe, più è elevata la forza assiale che tiene assieme i due cuscinetti. Questa forza è detta *forza di precarico*.



Nella figura sopra i cuscinetti impiegati sono cuscinetti obliqui a sfere. Si vede come la ghiera (in rosso) avvitandosi al filetto, tenda a comprimere l'anello del cuscinetto di sinistra. Gli effetti principali del precarico sono:

- eliminazione del gioco;
- aumento della rigidezza;

Per mettere in evidenza i benefici del precarico, analizziamo l'accoppiamento senza precarico e con precarico. Il cuscinetto non è un corpo rigido, ma ha una certa elasticità che può essere schematizzata con una rigidezza di costante elastica k . Perciò l'accoppiamento di due cuscinetti può essere schematizzato nelle seguenti figure. Partiamo dal caso in cui non sia presente il precarico. In questo caso la ghiera non stringe. I due cuscinetti hanno rigidezza k_A e k_B . Se non vi è precarico le molle sono a riposo. Nota che la figura rappresenta solo metà del telaio dove vanno in battuta i cuscinetti per semplicità.



Applichiamo una forza F assiale all'albero da sinistra. La forza si scarica tutta sul cuscinetto A attraverso la ghiera, mentre il cuscinetto B si stacca. L'albero si è spostato assialmente di una quantità pari a

$$\Delta x = \frac{F}{k_A} \quad (8.3)$$

Perciò la rigidità assiale complessiva dell'accoppiamento è data dalla rigidità assiale k_A del solo cuscinetto A.

Nel momento in cui la forza viene a mancare l'albero si riporta nella configurazione iniziale ed il cuscinetto B ritorna in contatto. Questo fenomeno è indesiderato perché è la manifestazione del gioco assiale.

Consideriamo adesso il caso con presenza di precarico. Come già detto il precarico viene effettuato attraverso il serraggio della ghiera. Per il momento nessuna forza assiale viene applicata all'albero. La ghiera viene avvitata sull'albero per un tratto di avanzamento pari a Δx_g . Vedi la seguente figura (caso 1)). In questo modo le molle non sono più a riposo. Risultano essere compresse rispettivamente della quantità Δx_A e Δx_B . Queste due quantità sono diverse perché nel caso generale i cuscinetti impiegati sono diversi e quindi hanno diverse rigidità. Dato che sono compresse, le due molle agiscono come in figura generando la forza F_p di precarico sull'albero. Le forze sono uguali poiché deve esserci equilibrio assiale dell'albero. Perciò deve valere

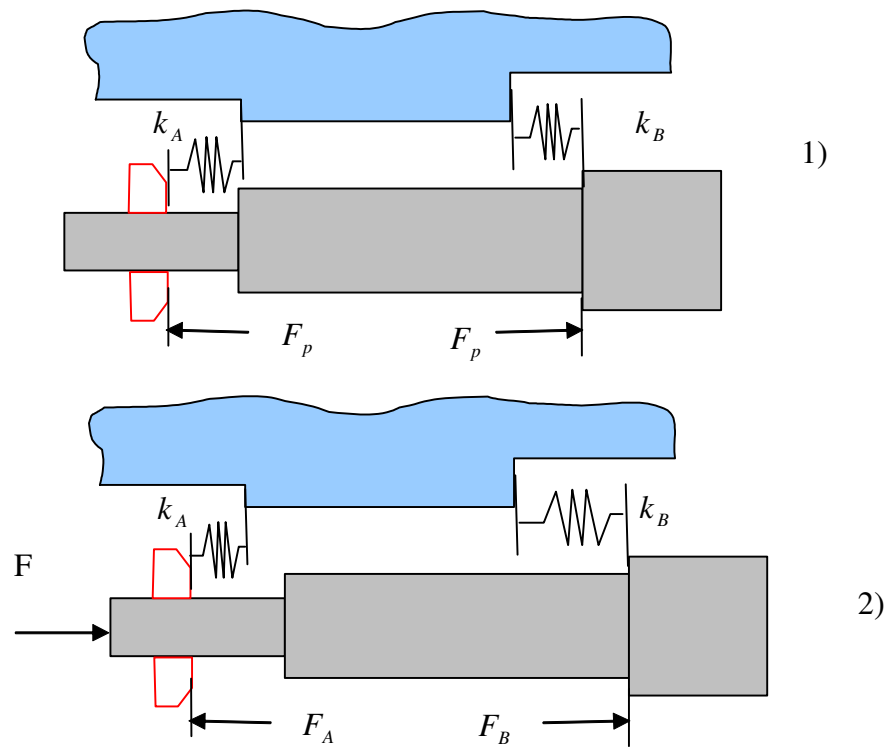
$$F_p = k_A \Delta x_A$$

$$F_p = k_B \Delta x_B$$

La somma delle compressioni delle due molle deve essere uguale al tratto di cui è stata avvitata la ghiera, perciò

$$\Delta x_A + \Delta x_B = \Delta x_g$$

In queste condizioni applichiamo una forza assiale F all'albero di uguale entità a quella applicata al caso senza precarico (vedi nella seguente figura il caso 2)).



L'albero, a causa della forza F si sposta di una quantità Δx . A causa di questo spostamento la molla A si comprime ulteriormente, mentre la molla B tende a scaricarsi. Perciò le forze che le molle producono sull'albero sono

$$F_A = k_A (\Delta x_A + \Delta x) \quad (8.4)$$

$$F_B = k_B (\Delta x_B - \Delta x)$$

Eseguendo l'equilibrio delle forze agenti assialmente sull'albero, si ottiene

$$\begin{aligned}
 F &= F_A - F_B = & (8.5) \\
 &= k_A (\Delta x_A + \Delta x) - k_B (\Delta x_B - \Delta x) = \\
 &= (k_A + k_B) \Delta x \\
 &\Rightarrow \\
 \Delta x &= \frac{F}{(k_A + k_B)}
 \end{aligned}$$

Confrontando l'eq. 8.5 con 8.3, si nota subito come a parità di forza assiale applicata all'albero, nel caso con precarico lo spostamento assiale che subisce l'albero è minore del caso senza precarico. Significa che la rigidità dell'accoppiamento è aumentata ed è data dalla somma delle rigidità dei due cuscinetti.

Notare inoltre che, nel caso di precarico, il cuscinetto B non si distacca assialmente dall'albero. Questo avviene fintantochè la molla B rimane compressa. Aumentando ulteriormente il valore della forza F , dato che la forza tende a scaricare la molla B, potrebbe capitare che la molla si scarichi completamente. Matematicamente la condizione perché questo non avvenga è $F_B > 0$, cioè (per l'eq. 8.4)

$$\Delta x_B - \Delta x > 0$$

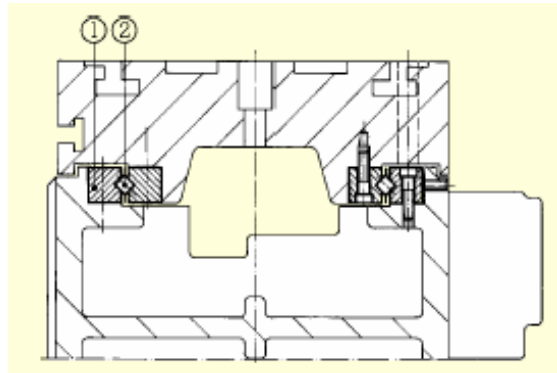
Dato che $F_p = k_B \Delta x_B$ e che $\Delta x = \frac{F}{(k_A + k_B)}$ la condizione si trasforma in

$$F_p > \frac{k_B}{(k_A + k_B)} F$$

Nei casi pratici è proprio questa la formula utilizzata per determinare il valore del precarico, dove F è la stima di quanto potrebbe essere il carico assiale.

8.3 Guide lineari

Le guide lineari servono per realizzare coppie prismatiche ad elevata precisione. Molto usate nelle macchine automatiche e nei robot sono le guide lineari realizzate con sfere o rulli. Entrambe sono costituite da due elementi di accoppiamento: la guida vera e propria lunga tanto quanto la corsa utile di movimento di traslazione ed il pattino. Tra il pattino e la guida sono interposti i corpi volventi per diminuire l'attrito. Nelle applicazioni con carichi modesti vengono impiegate delle sfere come corpi volventi, mentre nel caso di carichi elevati si impiegano dei rulli. Nella seguente figura è rappresentata una sezione di una guida a rulli.



Il corpo indicato con il numero 1 rappresenta la guida che è fissata al telaio attraverso delle viti verticali. Sulla slitta è vincolata un'altra guida. Tra le due guide sono presenti dei rulli cilindrici (indicati col numero 2). A destra la configurazione si ripete. Notare che sul telaio è presente un grano (in realtà vi è una serie di grani lungo tutta la guida fissa al telaio) che ha la funzione di precaricare le guide. Infatti, avvitando il grano si va a premere sulla guida fissa a telaio che va a stringere a pacco i corpi volventi e le altre guide.

Grazie alla precisione con cui vengono realizzate, possono raggiungere velocità ($\simeq 4 \text{ m/s}$) ed accelerazioni ($\simeq 50 \text{ m/s}^2$) di traslazione molto elevate.

8.3.1 Tipologia di montaggio

Forniamo alcune definizioni utili:

Guide vincolate: sono guide sollecitabili da forze e momenti di qualsiasi direzione;

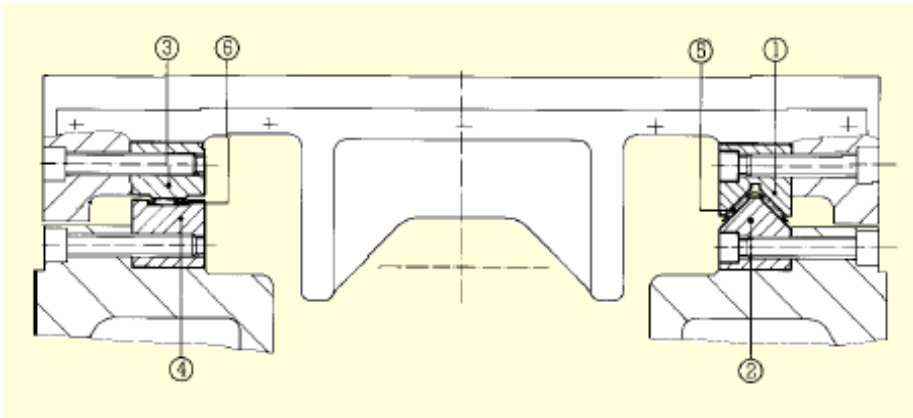
Guide a montaggio orizzontale: vengono denominate in questo modo le applicazioni in cui il pattino ha un movimento orizzontale;

Guide a montaggio verticale: vengono denominate in questo modo le applicazioni in cui il pattino ha un movimento verticale;

Guide a ricircolo di sfere o rullini: in queste guide i corpi volventi rientrano nel pattino. Sono quindi compatti e più economici.

Guide a gravità: Con questa tipologia di montaggio le guide mantengono l'accoppiamento grazie alla forza di gravità del corpo che trasla;

Un esempio è dato dalla seguente configurazione



In questo caso i corpi volventi sono rappresentati da rullini (in genere i rullini vengono impiegati quando si hanno problemi di ingombro). Si nota come rispetto alla rappresentazione in sezione, il movimento orizzontale è impedito dalla guida di destra, mentre la guida di sinistra ha la sola funzione di fornire una appoggio alla slitta. Questo tipo di configurazione permette di compensare le dilazioni termiche. L'accoppiamento è garantito dalla forza di gravità, infatti è il peso della slitta ad impedire il distacco.

8.4 Dimensionamento dei pattini

Come avviene nei cuscinetti a rotolamento, anche in questo caso si ricorre ad una formula di durata

Introduciamo il *fattore di carico* C . Esso rappresenta il carico dal quale risulta una durata nominale di 100000 m di spostamento, a condizione che il carico sia costante e che la linea di applicazione del carico sia verticale rispetto all'unità di rotolamento. Il fattore di carico viene fornito dal catalogo.

La durata nominale rappresenta la durata fino alla quale il 90% delle guide riescono a resistere. La durata (in) è fornita dalla seguente formula

$$L = a \left(\frac{C_{eff}}{P} \right)^{10/3} 10^5 [m] \text{ per rulli e rullini}$$

$$L = a \left(\frac{C_{eff}}{P} \right)^3 10^5 [m] \text{ per sfere}$$

dove a è un coefficiente che legato alla probabilità. Se si vuole trovare la durata raggiunta statisticamente dal 90% delle guide $a = 1$; se si vuole ottenere la durata alla quale arrivano una percentuale maggiore di guide, il fattore a diminuisce. Si utilizza la seguente tabella

%	90	95	96
a	1	0,62	0,53

Poiché fattori esterni possono ridurre la capacità di carico, si introduce un *fattore di carico effettivo* C_{eff} che è legato al fattore di carico dalla seguente formula

$$C_{eff} = f_H f_T C$$

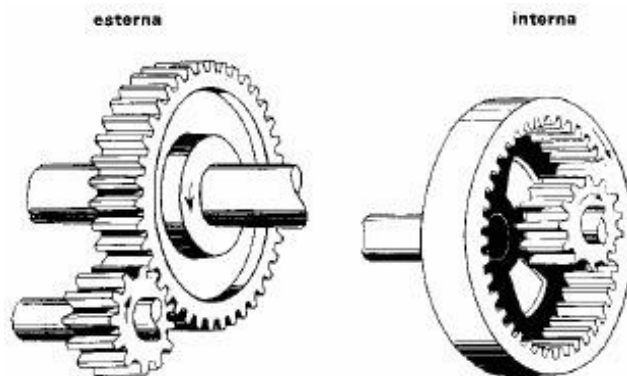
dove f_H è il *fattore di durezza* e dipende dalla durezza della pista su cui rotola il corpo volvente. f_T è il *fattore di temperatura* e dipende dalla temperatura di funzionamento.

P rappresenta il carico effettivo che va ad agire sul singolo elemento di rotolamento. Tale carico va valutato in maniera cautelativa, ipotizzando il numero minimo di corpi volventi sui quali andrà a scaricarsi il carico complessivo.

Capitolo 9

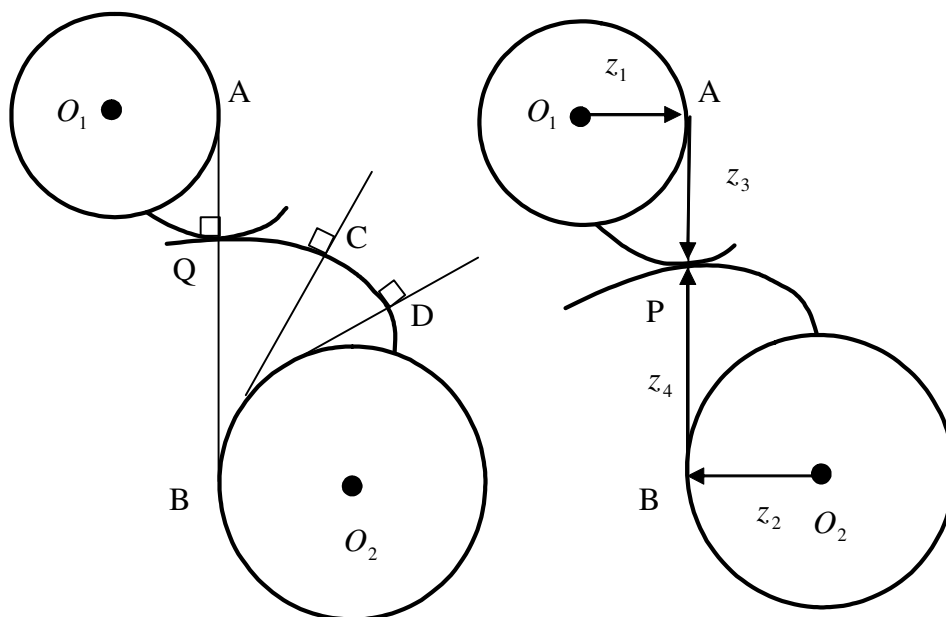
Ingranaggi

Un ingranaggio è un elemento di trasmissione a rapporto di trasmissione costante costituito da due ruote dentate.



Le ruote dentate più utilizzate sono quelle con il profilo del dente detto ad *evolvente di cerchio*.

Vediamo come si costruiscono i profili dei denti di due ruote dentate a denti dritti e quali siano le proprietà cinematiche che le contraddistinguono. Consideriamo due ruote piane disposte come in figura (figura di sinistra)



Le ruote hanno raggi diversi e sono vincolate attraverso due coppie rotoidali ai punti O_1 ed O_2 . Pensiamo di collegare alle ruote un filo inestensibile ai punti A ed B e di disporre le ruote in maniera tale che il filo sia verticale. Il filo risulta quindi essere tangente alle due ruote. I cerchi che definiscono il contorno delle due ruote sono detti *cerchi di base*. Teniamo ferme le ruote. Scegliamo un punto qualsiasi lungo il tratto AB, ad esempio il punto Q. Tagliamo il filo in quel punto ed attacchiamo due pennarelli alle due estremità del filo tagliato. Avvolgendo il tratto BQ attorno alla seconda circonferenza di base il pennarello disegna la curva QCD detta *profilo ad evolvente*. Per come è stato costruito, si può notare che il profilo è sempre perpendicolare al tratto di filo, come nei punti C e D. E poiché il tratto di filo è sempre tangente alla circonferenza di base, si conclude che il profilo è sempre perpendicolare alla tangente alla circonferenza di base. Lo stesso procedimento viene ripetuto con il tratto di filo AQ attorno alla prima circonferenza di base. Le due curve così generate rappresentano il profilo di due denti coniugati, uno appartenente alla prima ruota ed uno alla seconda ruota.

Questo è il procedimento per costruire i profili di dente. Ovviamente, per comporre un dente completo, è necessario creare un altro profilo simmetrico al primo. Si potevano adottare altri metodi, come ad esempio denti a profilo cicloidale. In realtà i denti a con profilo ad evolvente di cerchio sono i maggiormente impiegati nell'industria.

Come mai questi profili sono così importanti? Il motivo è che con questi profili, come verrà mostrato in seguito, il rapporto di trasmissione rimane costante per piccole variazioni della distanza degli assi di rotazione delle due ruote.

Proseguiamo con l'analisi cinematica.

Non consideriamo più i due tratti di filo e concentriamoci sui profili che formano un corpo unico con i cerchi di base. Ruotiamo la seconda circonferenza di base in senso antiorario di una piccola quantità angolare (vedi figura di sinistra). Anche il dente ruoterà ed il suo profilo rimarrà sempre perpendicolare al tratto verticale AB . Infatti il tratto AB rappresenta una tangente alla seconda circonferenza di base, e per quanto detto sopra, il profilo è sempre perpendicolare a qualsiasi tangente. Ruotiamo la prima circonferenza di base in senso orario fino a che il profilo di dente che ad essa è vincolato non vada in contatto con il dente della seconda circonferenza. Il punto di contatto è indicato con P . Poiché i due profili sono perpendicolari alla stessa retta tangente in P , si deduce che sono tangenti tra di loro. Se si ruotasse in senso antiorario la seconda ruota di un altro po', i denti andrebbero in contatto in un altro punto lungo il tratto AB . Perciò il punto di contatto tra due denti cambia in continuazione, ma si mantiene sempre lungo la linea di tangente delle due circonferenze di base.

La linea AB è detta *linea di ingranamento*.

Vediamo ora come mai il rapporto di trasmissione si mantiene costante ed è funzione solamente del rapporto tra i raggi dei cerchi di base.

Consideriamo la quota y del punto P di contatto. Il punto può essere pensato come appartenente all'una od all'altra ruota, perciò, adottando una notazione vettoriale, si può scrivere

$$y_P = y_{O_1} + z_1 \sin(\vartheta_1) + z_3 \sin\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.1)$$

dove in questo caso y_P rappresenta la coordinata y del punto P pensato come appartenente alla prima ruota. Nota che z_3 rappresenta la lunghezza del tratto AP vincolato rigidamente alla prima circonferenza. In quanto tale, il suo valore rimane costante e la sua posizione angolare è la stessa del vettore z_1 a meno di una costante. Ripetendo lo stesso ragionamento pensando P appartenente alla seconda ruota, si ottiene

$$y_P = y_{O_2} + z_2 \sin(\vartheta_2) + z_4 \sin\left(\vartheta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.2)$$

Uguagliando le eq. 9.1 e 9.2, e derivando, si ottiene

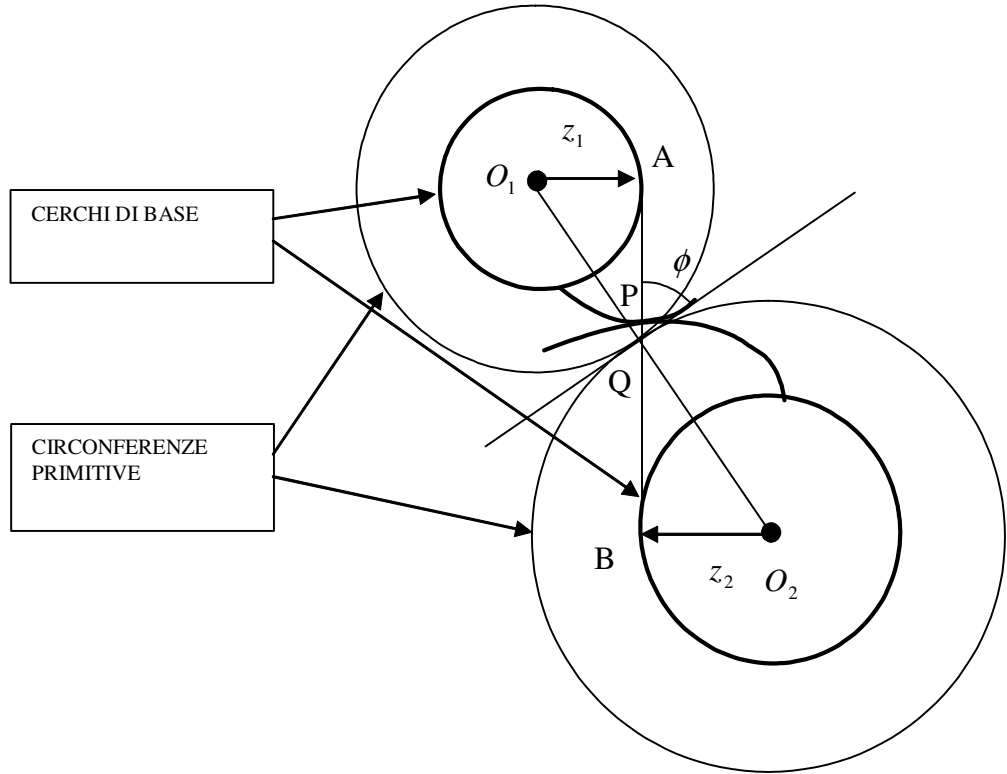
$$z_1 \cos(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 + z_3 \cos\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) \dot{\vartheta}_1 = z_2 \cos(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 + z_4 \cos\left(\vartheta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \dot{\vartheta}_2$$

E, poiché $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$, si ottiene

$$z_1 \dot{\vartheta}_1 = -z_2 \dot{\vartheta}_2 \implies \tau = \frac{\dot{\vartheta}_2}{\dot{\vartheta}_1} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}} \quad (9.3)$$

ossia il rapporto di trasmissione dell'ingranaggio è funzione del rapporto tra i raggi delle due circonferenze di base. Perciò è costante poiché $z_1 = R_{b1}$ e $z_2 = R_{b2}$ sono i raggi delle circonferenze di base e sono quindi costanti. Se si fosse ripetuto il ragionamento considerando un altro punto di contatto lungo la linea di ingranamento, si sarebbe ottenuto lo stesso risultato, dato che sarebbero

cambiate solamente le quantità z_3 e z_4 . z_3 e z_4 infatti, non intervengono nella formula che definisce il rapporto di trasmissione data dall'eq. 9.3.



Si tracci la retta che congiunge i centri delle circonferenze di base. Essa interseca la linea d'ingranamento nel punto Q . Le circonferenze che hanno raggi O_1Q ed O_2Q vengono dette *circonferenze primitive*.

L'angolo ϕ che la linea di ingranamento forma con la tangente comune alle circonferenze primitive è detto *angolo di pressione* delle due ruote dentate in accoppiamento. Solitamente l'*angolo di pressione* ha valori standard: $\phi = 15^\circ$, $\phi = 20^\circ$..., $\phi = 25^\circ$.

Notare che solo in istanti particolari il punto di contatto coincide con il punto Q . Per similitudine dei triangoli rettangoli si deduce che

$$\tau = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{O_1Q}{O_2Q}$$

Perciò il rapporto di trasmissione può essere espresso anche come rapporto dei raggi delle circonferenze primitive.

Immaginiamo ora due ruote lisce che ruotano senza strisciare tra di loro, aventi gli stessi raggi delle due circonferenze primitive. Nel punto di contatto la velocità periferica delle due ruote è la stessa, perciò

$$\dot{\vartheta}_1 O_1 Q = -\dot{\vartheta}_2 O_2 Q$$

da cui si deduce che il loro rapporto di trasmissione è $\tau = -\frac{O_1 Q}{O_2 Q}$. Di conseguenza, cinematicamente parlando, un ingranaggio è equivalente a due ruote lisce aventi gli stessi raggi delle circonferenze primitive che rotolano senza strisciare.

Si definisce *modulo* m della dentatura il rapporto tra il diametro primitivo D ed il numero di denti della ruota

$$m = \frac{D}{Z}$$

Si definisce *passo circonferenziale* p la distanza tra due profili di dente lungo la circonferenza primitiva

$$p = \frac{\pi D}{Z} = \pi m$$

Un dente si ripete lungo la circonferenza primitiva ogni lunghezza di passo. Perciò, quando due ruote dentate ingranano, esse devono avere lo stesso passo (e quindi stesso modulo), altrimenti i denti si compenetrerebbero.

Si può dimostrare che il passo circonferenziale è anche metà della lunghezza del dente lungo la circonferenza primitiva. Ruote dentate che possono ingranare tra di loro hanno uguale lunghezza di dente lungo la circonferenza primitiva.

Conoscendo l'angolo di pressione è possibile trovare la relazione tra il raggio di base della ruota dentata ed il modulo. Sempre osservando la precedente figura, si ottiene

$$\frac{O_2 B}{O_2 P} = \cos(\phi)$$

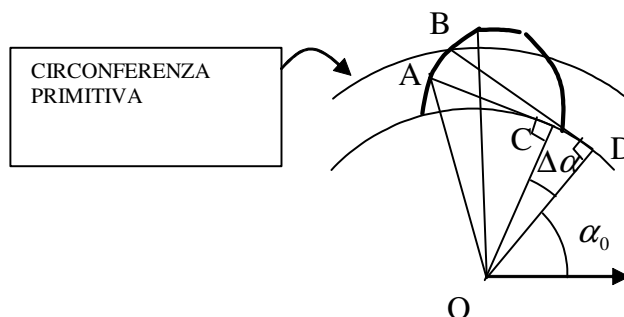
Sapendo che $O_2 B$ è il raggio di base R_{b2} della seconda ruota dentata e che $O_2 P$ è il raggio primitivo della seconda ruota dentata, sostituendo

$$\begin{aligned} R_{b2} &= \cos(\phi) \frac{D_2}{2} = \\ &= \cos(\phi) \frac{m Z_2}{2} \end{aligned}$$

dove Z_2 è il numero di denti della seconda ruota. Per la prima ruota vale la stessa relazione $R_{b1} \cos(\phi) \frac{m Z_1}{2}$

9.1 Come tracciare il profilo del dente

Consideriamo la seguente figura.



L'obiettivo di questo paragrafo consiste nel fornire le coordinate dei punti del profilo di un dente della ruota dentata rispetto ad un sistema di riferimento. Poniamo l'origine del sistema di riferimento nel punto O . Nella figura il punto B appartiene alla circonferenza primitiva, mentre i punti D e C appartengono alla circonferenza di base. Per le proprietà della circonferenza primitiva, il tratto DB vale

$$\begin{aligned} DB &= \sqrt{OB^2 - OD^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{D_p}{2}\right)^2 - R_b^2} \end{aligned}$$

dove D_p è il diametro primitivo ed R_b è il raggio di base. Se si fissa una posizione angolare α_0 ad arbitrio (quest'ultimo angolo definisce la posizione angolare del dente attorno alla circonferenza), il punto B nel sistema di riferimento scelto ha coordinate

$$\begin{aligned} B &= OD \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) \end{Bmatrix} + DB \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} = \\ &= R_b \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_0) \\ \sin(\alpha_0) \end{Bmatrix} + DB \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dove DB è stato precedentemente calcolato. Consideriamo un altro punto A appartenente allo stesso profilo del dente. Ripetendo lo stesso ragionamento, si ottiene

$$A = OC \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \\ \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{Bmatrix} + CA \begin{Bmatrix} \cos\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

Utilizzando le proprietà del profilo secondo cui il profilo è generato dall'avvolgimento di un filo di lunghezza DB attorno alla circonferenza di base, si deduce che il segmento DB è la somma del segmento CA e dell'arco \widehat{CD}

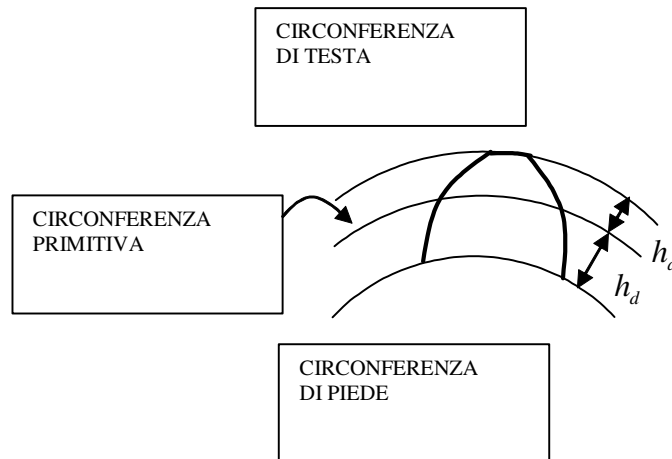
$$DB = CA + \widehat{CD} = CA + R_b \Delta\alpha$$

Sostituendo nella 9.4 si conclude

$$B = R_b \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \\ \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \end{array} \right\} + (DB - R_b \Delta\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha_0 + \Delta\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\}$$

Perciò, per tracciare il profilo del dente, è sufficiente incrementare o decrementare il valore $\Delta\alpha$.

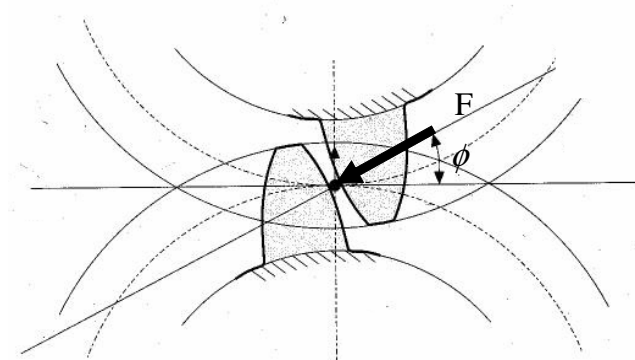
I limiti estremi del dente sono delimitati da due circonferenze dette *circonferenza di testa* e *circonferenza di piede*.



I valori di addendum del dente h_a e dedendum del dente h_d sono standardizzati e solitamente sono legati al valore del modulo.

9.2 Forze trasmesse

Consideriamo la seguente figura. Supponiamo che la ruota conduttrice sia quella sovrastante. Il punto di contatto giace lungo la linea di ingranamento che risulta essere sempre perpendicolare al profilo del dente. La forza che le due ruote dentate si scambiano, che è tangente ai profili dei denti, risulta avere come linea d'azione la linea di ingranamento. In figura è rappresentata la forza che il dente della ruota sovrastante esercita sul dente della ruota sottostante.



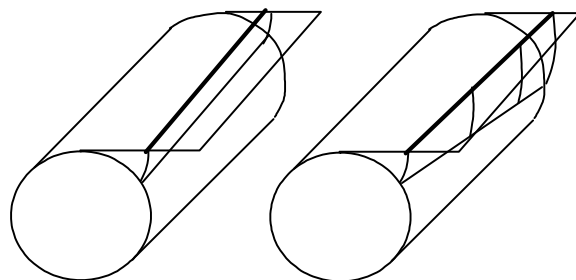
Questa forza può essere scomposta in una componente tangenziale $F_t = F \cos(\varphi)$ ed una componente radiale $F_r = F \sin(\varphi)$. La componente tangenziale genera una coppia utile sulla ruota condotta, mentre la forza radiale va a scaricarsi sul supporto della ruota condotta. Anche la ruota conduttrice, per il principio di azione e reazione, è soggetta alle stesse forze radiali e tangenziali (forze opposte per il principio di reazione).

9.3 Ruote dentate cilindriche a denti elicoidali

Trasmettono il moto fra assi di rotazione paralleli o sghembi.



Presentano rispetto alle precedenti un funzionamento più regolare, minore entità di urti e minore rumorosità. Infatti in esse il contatto fra due denti inizia e cessa gradualmente e non in modo discontinuo come nelle ruote a denti dritti. Il profilo del dente può essere pensato realizzato nel seguente modo.



Il disegno di sinistra rappresenta la generazione del profilo di dente ad evolvente di cerchio per le ruote dentate a denti dritti. Il profilo è generato dalla linea appartenente alla superficie che viene avvolta attorno al cilindro di base.

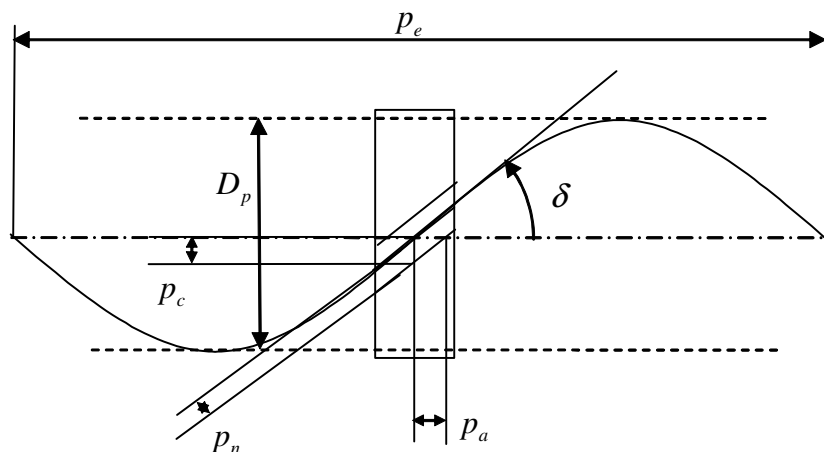
Il disegno di destra rappresenta la generazione del profilo di dente ad evolvente di cerchio per le ruote dentate a denti elicoidali. Il profilo è generato dalla linea appartenente alla superficie che viene avvolta attorno al cilindro di base. La linea di partenza è inclinata rispetto alla linea del disegno di sinistra. La linea inclinata disegna un'elica sulla circonferenza di base.

Geometricamente, le ruote dentate a denti elicoidali, si possono pensare generate da una ruota a denti dritti facendo ruotare ogni sezione normale all'asse di una quantità proporzionale alla sua distanza da una sezione estrema.

Questo tipo di ruote trasmettono una forza obliqua rispetto agli assi e la componente parallela ad essi deve essere convenientemente equilibrata dai cuscinetti degli alberi.

Nei riguardi della costruzione le ruote cilindriche a denti elicoidali non presentano maggiori difficoltà delle ruote a denti dritti.

Una coppia di ruote di questo tipo può essere impiegato per rapporti di trasmissione compresi fra 0,1 e 10.



Nella figura sono rappresentati gli elementi geometrici che caratterizzano una ruota dentata cilindrica a denti elicoidali.

Si è detto che una ruota a denti elicoidali si ricava da una ruota a denti dritti facendo ruotare le sezioni linearmente formando un'elica. Perciò l'inclinazione dell'elica è definita dall'angolo δ : *angolo di inclinazione dell'elica*. Formalmente è definito in questo modo: tracciamo la linea di intersezione tra il cilindro primitivo ed un profilo del dente come in figura. Proiettiamo l'elica ottenuta nel piano della figura. L'angolo d'elica è l'angolo formato dalla tangente all'elica e l'asse della ruota nel punto in cui l'elica interseca l'asse (vedi figura).

Viene definito un passo d'elica.

$p_e = \text{passo d'elica}$; è la distanza lungo l'asse di rotazione dovuta ad un periodo completo dell'elica. Il suo valore si ricava dalla relazione (basta pensare allo sviluppo dell'elica sul piano)

$$\frac{\pi D_p}{p_e} = \tan(\delta)$$

Se indichiamo con Z il numero di denti, si definisce il *modulo circonferenziale* come

$$m_c = \frac{D_p}{Z}$$

Un altro parametro utile è $p_c = \text{passo circonferenziale}$; è la distanza tra due profili di due denti successivi misurata lungo il piano perpendicolare all'asse di rotazione. Da questa definizione si ottiene che il passo circonferenziale è legato al modulo circonferenziale

$$p_c = \frac{\pi D_p}{Z} = \pi m_c \quad (9.5)$$

Si possono definire altri due passi.

$p_n = \text{passo normale}$; è la distanza tra due profili di due denti successivi misurata lungo il piano normale al profilo del dente;

$p_a = \text{passo assiale}$; è la distanza tra due profili di due denti successivi misurata lungo un piano passante per l'asse di rotazione;

Tutte le misure a cui ci si riferisce sono misure effettuate sulla circonferenza primitiva.

Associati ai passi vi sono i moduli:

$m_n = \text{modulo normale}$;

$m_a = \text{modulo assiale}$;

Similmente a quanto visto per il modulo circonferenziale si ha $p_n = \pi m_n$ ed $p_a = \pi m_a$

Osservando la figura si può ricavare le seguenti relazioni

$$\frac{p_c}{p_a} = \tan(\delta)$$

$$\frac{p_n}{p_c} = \cos(\delta)$$

$$\frac{p_n}{p_a} = \sin(\delta)$$

Le stesse relazioni valgono anche per i moduli.

Due ruote dentate a denti elicoidali possono ingranare solamente quando hanno uguale modulo normale m_n .

Il rapporto di trasmissione è dato dal rapporto tra i denti delle due rispettive ruote, non dal rapporto tra i diametri primitivi. Infatti vale

$$\tau = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Per l'eq. 9.5 il rapporto è pari a

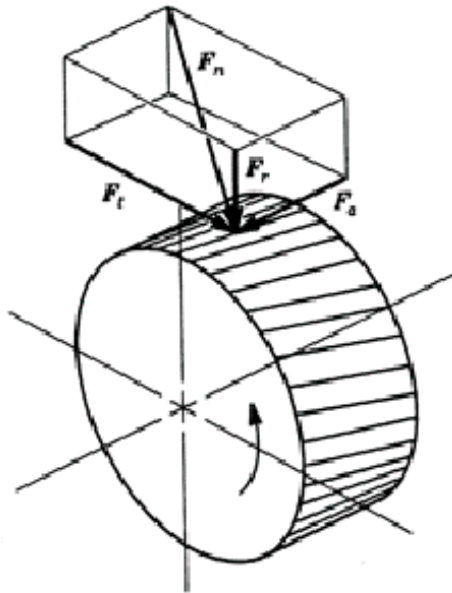
$$\tau = -\frac{D_{p2} p_{c1}}{D_{p1} p_{c2}}$$

I passi circolari non sono uguali. Possono essere messi in funzione dei passi normali che invece sono uguali (poiché legati ai moduli normali che sono uguali), perciò

$$\tau = -\frac{D_{p2} p_{c1}}{D_{p1} p_{c2}} = -\frac{D_{p2} \cos(\delta_2) p_{n1}}{D_{p1} \cos(\delta_1) p_{n2}} = -\frac{D_{p2} \cos(\delta_2)}{D_{p1} \cos(\delta_1)}$$

9.3.1 Forze trasmesse

La ruota conduttrice non è rappresentata in figura. E' visualizzata solamente la forza che essa trasmette perpendicolarmente al profilo del dente. Questa forza genera tre componenti sulla ruota condotta.



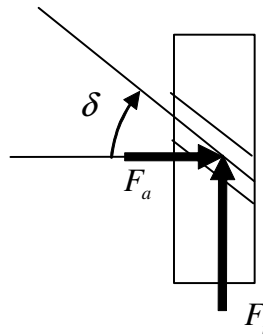
Come avviene nelle ruote dentate a denti dritti, l'angolo di pressione ϕ è costante durante l'ingranamento. L'angolo di pressione è l'angolo formato tra la forza normale alla superficie del dente ed il piano tangente ai cilindri primitivi. Esso lega le seguenti due forze

$$\frac{F_p}{F_n} = \cos(\phi)$$

dove F_n è la forza perpendicolare al profilo del dente, ossia la forza complessiva che dente e dente si scambiano. F_p è la sua componente sul piano tangente ai cilindri di base. Il suo valore è dato dal contributo della forza radiale ed assiale

$$F_p = \sqrt{F_r^2 + F_a^2}$$

Inoltre, data l'inclinazione dell'elica, si riesce a trovare il legame tra le componenti tangenziale ed assiale.



cioè

$$\frac{F_a}{F_t} = \tan(\delta)$$

$$F_a = F_t \tan(\delta)$$

$$F_t = F_a \cot(\delta)$$

La coppia trasmessa alla ruota condotta ha valore $C = F_t \frac{D}{2}$. Per cui le forze assiali e radiali in funzione della coppia prodotta, sono

$$F_r = \tan(\phi) F_p = 2 \frac{\tan(\phi) C}{\cos(\delta) D}$$

$$F_a = \tan(\delta) F_t = 2 \tan(\delta) \frac{C}{D}$$

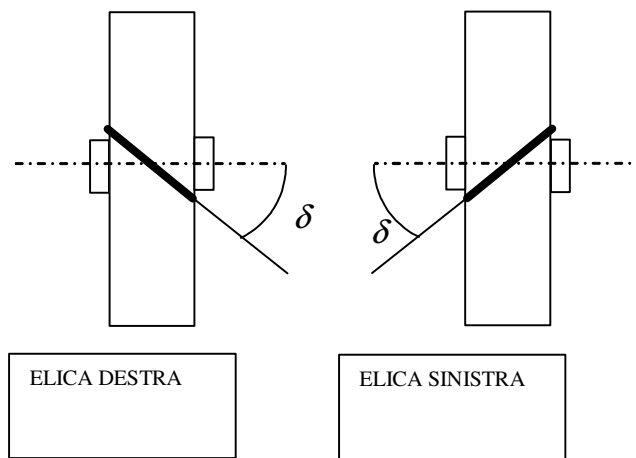
Da qui si vede il difetto principale di questo tipo di ruote. Oltre a trasmettere una coppia, trasmettono anche una forza radiale ed una assiale che vanno a scaricarsi sui supporti.

9.3.2 Accoppiamento di ruote elicoidali

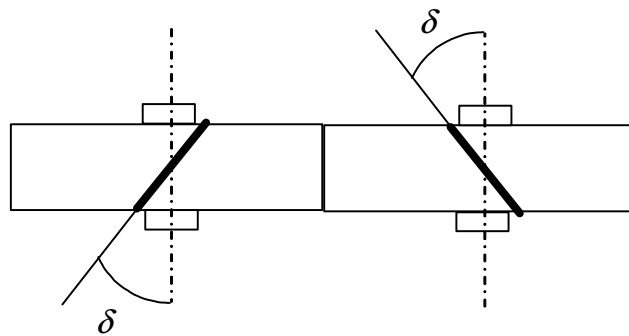
Il rapporto di trasmissione tra due ruote elicoidali è dato dal rapporto dei numeri di denti

$$\tau = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

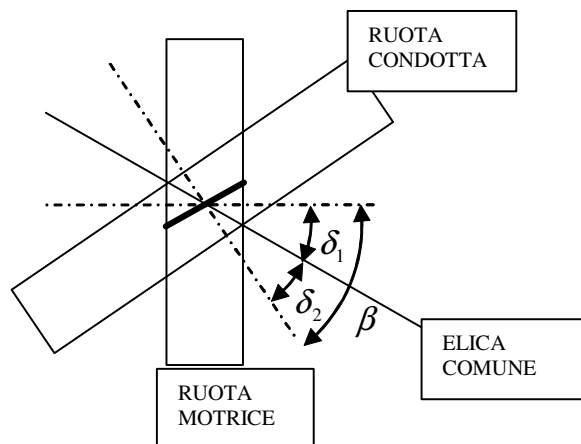
A seconda dell'inclinazione dell'elica di una ruota dentata si definiscono due tipi di ruote. Una ruota elicoidale è ad elica destra se, guardandola di profilo, con l'asse orizzontale, i denti si abbassano verso destra; è ad elica sinistra se i denti si abbassano verso sinistra



Nelle ruote cilindriche a denti elicoidali con assi paralleli le due ruote in presa hanno eliche inclinate dello stesso angolo, ma una è ad elica destra, mentre l'altra è ad elica sinistra.



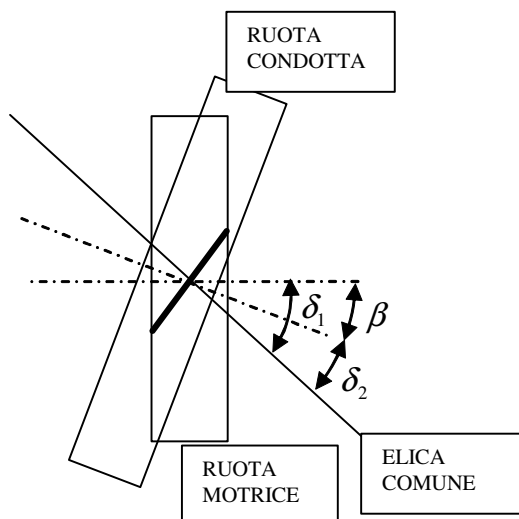
Per quanto riguarda assi non paralleli, si possono accoppiare ruote con angoli di elica diversi tra loro come in figura seguente.



Gli assi formano un angolo β tra di loro. L'asse orizzontale è l'asse della ruota motrice. Il segmento con linea più spessa rappresenta l'elica della ruota motrice (l'elica in vista). L'elica non in vista della ruota motrice ha in clinazione opposta alla linea più spessa ed è allineata con la linea elica comune. La linea elica comune rappresenta la linea dove le eliche delle due ruote ingranano. La condizione affinché le due ruote ingranino è che la somma degli angoli di elica sia pari all'angolo tra gli assi

$$\beta = \delta_1 + \delta_2$$

Questa condizione è valida solamente quando gli angoli di elica sono entrambi minori degli angoli degli assi. Nel caso in cui l'angolo degli assi sia minore di uno dei due angoli di elica siamo nella seguente situazione



Si vede geometricamente che, in questo caso, la condizione da rispettare è

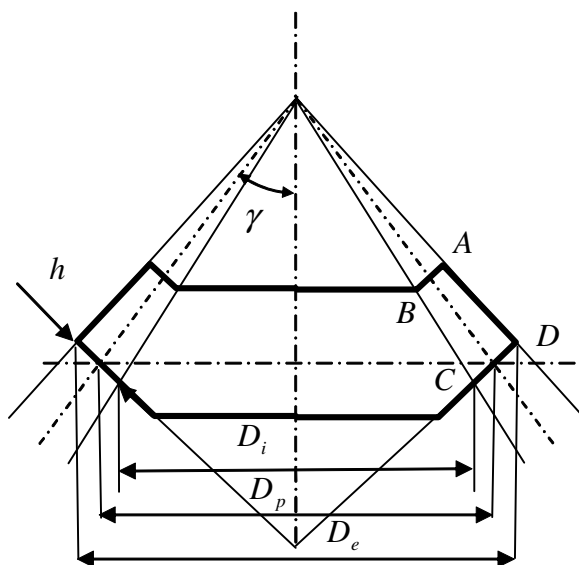
$$\beta = \delta_1 - \delta_2$$

9.4 Coppie coniche

Sono utilizzate per trasmettere il movimento tra due assi di rotazione concorrenti. Le più comuni sono a denti dritti, ma sono altrettanto diffuse le versioni a dentatura elicoidale.



L'angolo degli assi può avere qualsiasi valore (90° è una configurazione comune). In questi tipi di ingranaggi la superficie primitiva è un cono; nella sezione il cono primitivo è rappresentato dai tratti punto-tratteggio. Il semiangolo del cono primitivo è γ . La ruota conica è delimitata da un'altro cono opposto al primo. Questo cono che definisce la parte terminale del dente ha la caratteristica di avere la superficie perpendicolare alle generatrici del cono primitivo. Il dente ha un profilo che è delimitato da due coni di testa e di piede. La sezione del dente in figura è data dai tratti ABCD.

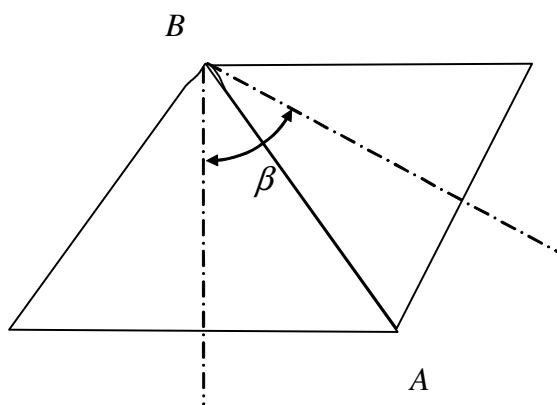


Per riportarsi alla teoria delle ruote cilindriche a denti dritti, viene definita una circonferenza primitiva come l'intersezione tra il cono primitivo ed il cono retrostante. Essa ha diametro D_p . Il modulo ed il passo vengono definiti rispetto a questo diametro

$$m = \frac{D_p}{Z}$$

$$p = \pi m$$

Allo stesso modo vengono definiti i diametri D_e (diametro esterno) e D_i (diametro interno). h è l'altezza del dente.



Nella figura soprastante sono rappresentati solamente i cono primitivi e gli assi di due coppie coniche che ingranano tra di loro. Gli assi formano un angolo pari a β . Per ingranare i due cono devono avere uguale modulo m .

Inoltre, osservando la figura, si ottiene $\frac{D_{p1}}{2} = AB \sin(\gamma_1)$ ed equivalentemente $\frac{D_{p2}}{2} = AB \sin(\gamma_2)$. Confrontando le due relazioni si ottiene

$$\frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2)} = \frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

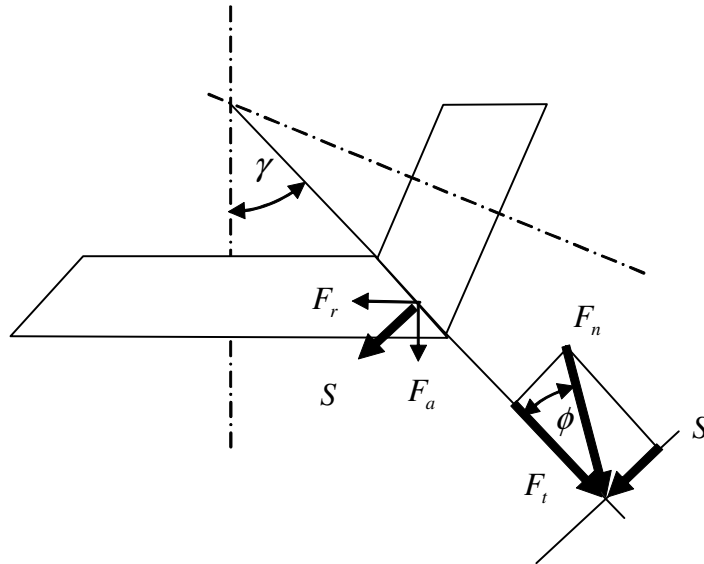
Perciò, oltre ad avere stesso modulo, i semiangoli dei due coni primitivi devono essere legati al rapporto tra i denti.

Anche in questi tipi di ingranaggi il rapporto di trasmissione è dato da

$$\tau = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Valutiamo come vengono trasmesse le forze.

La ruota motrice esercita sulla ruota condotta una forza F_n perpendicolare al profilo del dente. Osserviamo la seguente figura. In basso a destra è visualizzata una rappresentazione della forza che la ruota motrice esercita sulla condotta. Tale forza agisce localmente sul piano perpendicolare alla generatrice comune dei due coni primitivi. Dato che il dente è a profilo ad evolvente di cerchio, la forza di contatto si scompone in due componenti: una forza tangente $F_t = F_n \cos(\phi)$ ed una forza normale $S = F_n \sin(\phi)$ dove ϕ è l'angolo di pressione. Nella parte della figura dove sono rappresentate le due ruote coniche, la forza tangente non è rappresentata, poiché è data da un vettore uscente dal piano di disegno. Invece la forza S viene scomposta ulteriormente in due componenti: una forza radiale $F_r = S \cos(\gamma)$ ed una forza assiale $F_a = S \sin(\gamma)$



SPIEGARE MEGLIO L'ORIGINE DELLA FORZA s...

9.5 Riduttore armonico

Si tratta di un particolare tipo di riduttore molto compatto in grado di ottenere rapporti di riduzione fino a 200 ad 1 ed oltre. Come evidenziato dalla foto è composto di tre elementi: una corona dentata internamente che solitamente è fissa a telaio; un corona flessibile (elemento in centro detto anche flexpline); ed un generatore d'onda (elemento a sinistra).



Il flexspline è di diametro leggermente inferiore alla corona rigida ed ha solitamente due denti in meno sulla circonferenza esterna. Essendo elastico può deformarsi. E' tenuto in forma ellittica dal generatore d'onda e i suoi denti ingranano sui denti della corona rigida lungo l'asse maggiore dell'ellisse (figura in basso a destra). Appena il generatore d'onda inizia a girare in senso orario, la zona d'ingranamento dei denti si muove insieme all'asse maggiore dell'ellisse. Quando il generatore d'onda ha girato di 180 gradi in senso orario, il flexspline è rimasto indietro di un dente rispetto alla corona dentata. Ogni giro completo del generatore d'onda muove il flexspline indietro di due denti rispetto al Circular Spline. Perciò il movente è il generatore d'onda, mentre il cedente è il flexspline. Nota che per diminuire l'attrito il generatore d'onda è munito di sfere che si interpongono tra il generatore d'onda (rigido) ed il flexspline (elastico).



I vantaggi offerti da questo tipo di riduttore sono:

- elevata capacità di coppia; dal momento che la potenza è trasmessa per mezzo di un ingranamento multi-dente, i riduttori Harmonic Drive offrono una capacità di coppia uguale a dispositivi che sono il doppio di taglia e che pesano tre volte tanto.

- gioco zero
- apporto di riduzione elevato in un singolo-stadio

Il rapporto di riduzione in un singolo-stadio va da 50:1 a 320:1 con tre soli componenti.

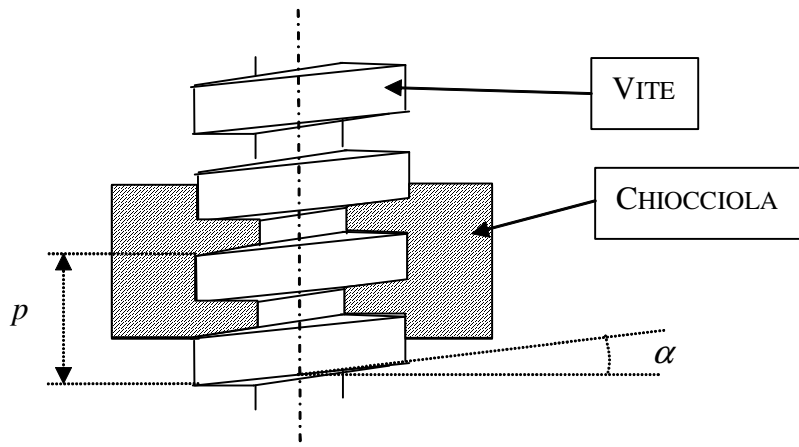
Il rapporto di trasmissione è dato da

$$\tau = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2}$$

dove Z_1 e Z_2 sono rispettivamente il numero di denti del flexpline e della corona rigida esterna.

9.6 Accoppiamento vite madrevite

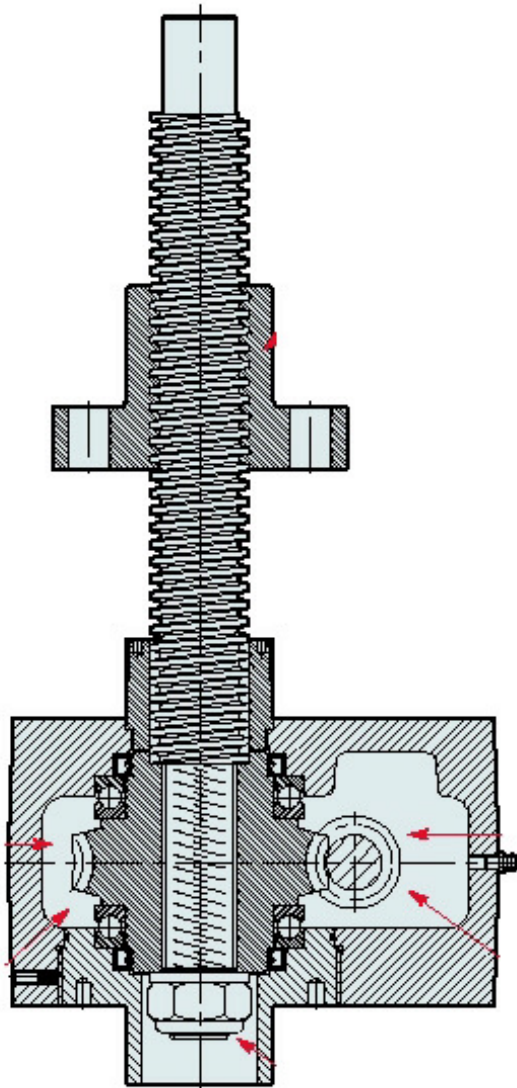
Questo tipo di accoppiamento meccanico ha vari scopi. A tutti è nota la capacità di fissare più elementi a mezzo di viti e dadi. Inoltre il meccanismo vite-chiocciola è ideale quando si voglia trasformare un movimento rotatorio in un movimento di traslazione.



Nella figura è rappresentata una vite con filetto a *sezione rettangolare*. Questi tipi di vite sono impiegati per impianti di sollevamento (*martinetti*) e sistemi di posizionamento. Esistono due modalità operative:

- 1) La rotazione della chiocciola viene bloccata ed attraverso la rotazione della vite la chiocciola può avanzare;
- 2) La vite è vincolata rigidamente al telaio, mentre la chiocciola, ruotando, si sposta assialmente.

Nella seguente figura è mostrato un esempio del primo tipo.



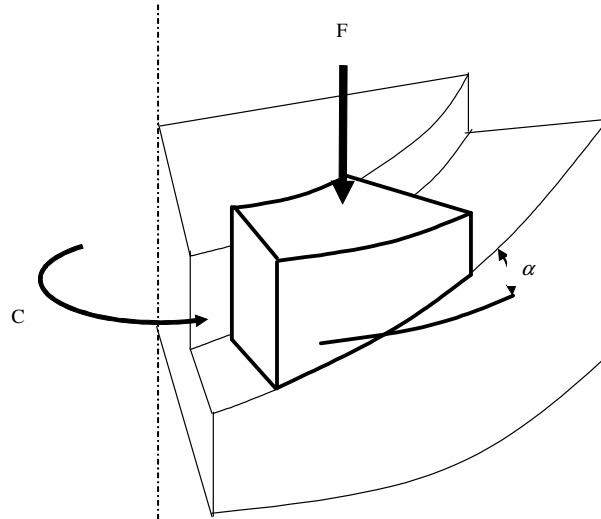
Il filetto della vite si avvolge ad elica attorno all'asse della vite. Il passo dell'elica del filetto p viene definito *passo della vite*, mentre α è l'*angolo d'elica* del filetto. L'angolo d'elica è l'angolo che l'elica forma con un piano perpendicolare all'asse della vite.

Supponiamo che la vite sia ferma e che la chiocciola ruoti. Il legame tra la posizione x della chiocciola lungo l'asse di rotazione e la posizione angolare ϑ della chiocciola è

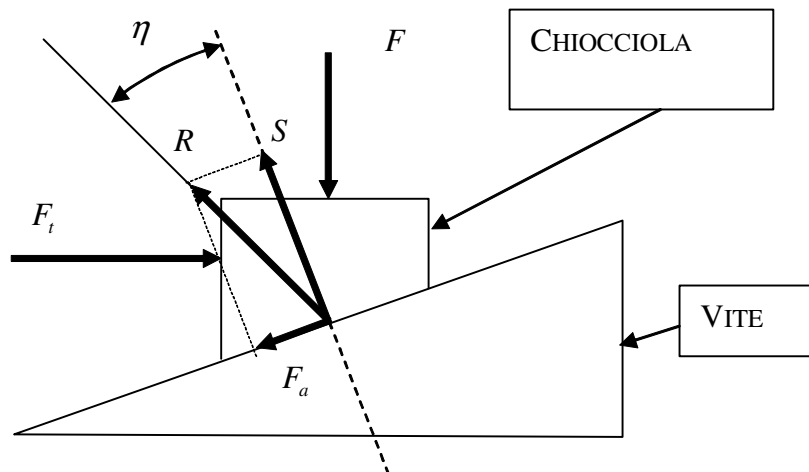
$$x = \vartheta r \tan(\alpha)$$

9.6.1 Calcolo della coppia di azionamento del martinetto

Per fissare le idee si consideri il caso di un martinetto in cui la vite è vincolata al telaio e la chiocciola possa ruotare.



In figura è rappresentato solamente un settore della chiocciola. F è la forza applicata assialmente alla chiocciola, ossia il carico resistivo. C è la coppia che viene applicata alla chiocciola. Affinché la chiocciola avanzi, tale coppia deve vincere il carico F e le forze di attrito. Il meccanismo vite-chiocciola è assimilabile ad un cono disposto sopra un piano inclinato



In questo meccanismo equivalente, la coppia C genera una forza sul cono pari a

$$F_t = \frac{C}{r} \quad (9.6)$$

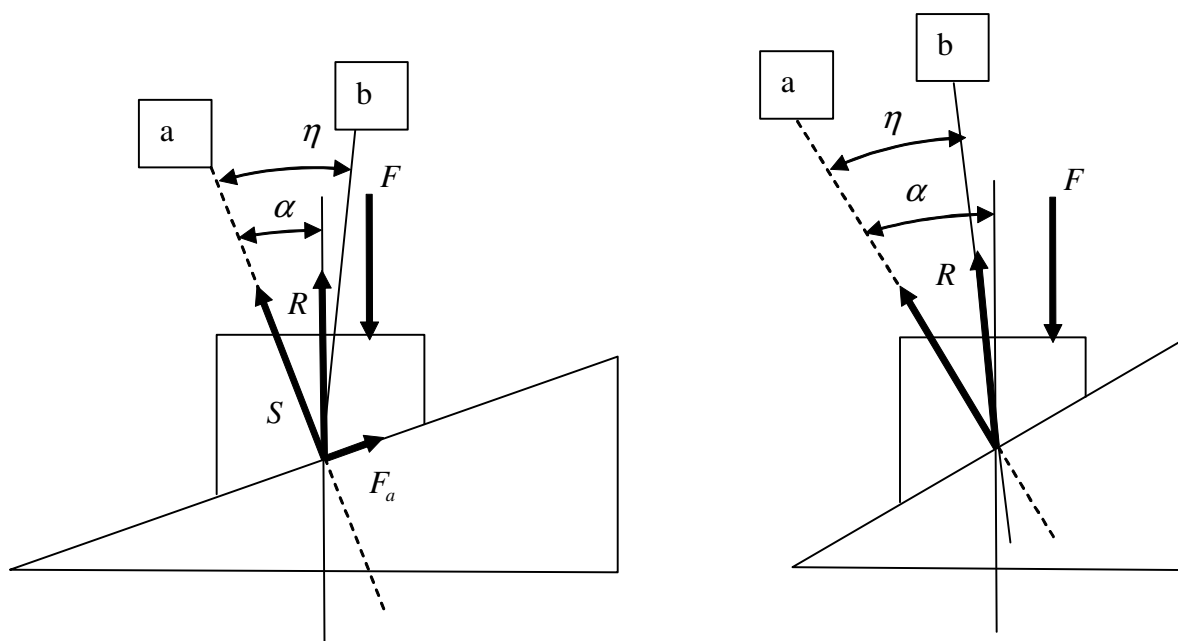
dove r è il raggio della vite. S è la forza di contatto tra la vite e ed il filetto perpendicolare alla superficie stessa. F_a è la forza di attrito che si oppone al moto di salita del cuneo. η è l'angolo di attrito, per cui vale la relazione $\frac{F_a}{S} = \tan(\eta)$. La somma vettoriale della forza di contatto S e della forza di attrito F_a fornisce la forza di reazione R che la vite esercita sulla chiocciola. R forma un angolo η con la perpendicolare al filetto ed un angolo pari a $\eta + \alpha$ con la verticale. L'equilibrio delle forze agenti sulla chiocciola lungo la direzione orizzontale e verticale fornisce

$$\begin{aligned} F_t - R \sin(\alpha + \eta) &= 0 \\ -F + R \cos(\alpha + \eta) &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando la reazione R ed utilizzando l'eq. 9.6 si ottiene il valore della coppia che determina l'avanzamento della chiocciola soggetta ad un carico resistivo pari ad F .

$$C = r \tan(\alpha + \eta) F \quad (9.7)$$

In molti sistemi di sollevamento il carico F è dato dalla forza peso della struttura da sollevare. In questi casi, nel momento in cui la coppia C viene a mancare, è necessario che la chiocciola non si metta in movimento spontaneamente causando la discesa incontrollata della chiocciola stessa. Riferendoci alla figura seguente (figura di sinistra), si vede che, nel caso di moto incipiente di discesa, la forza di attrito si oppone al moto di discesa della chiocciola.



La somma vettoriale della forza di attrito e della reazione di contatto perpendicolare al filetto è rappresentata dal vettore R . R è disposto verticalmente, in quanto deve equilibrare il carico F . In questo caso il meccanismo è detto irreversibile, in quanto la chiocciola spontaneamente non scivola sul piano inclinato. Se però l'angolo di filetto aumenta, o l'angolo di attrito diminuisce, si ottiene la configurazione rappresentata dalla figura di destra. In questo caso, per le proprietà del cono d'attrito, R deve sempre essere all'interno di un angolo compreso tra le semirette a e b . Nel tentativo di equilibrare la forza F , il vettore R al più si dispone lungo la semiretta b . In questo caso la componente verticale di R effettivamente equilibra la forza F

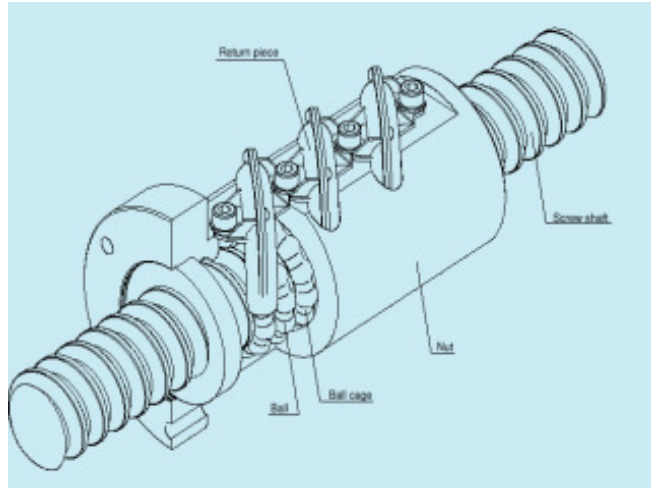
$$R \cos(\alpha - \eta) = F$$

Però nasce anche una componente orizzontale $R \sin(\alpha - \eta)$ che non viene equilibrata da alcuna forza esterna e che causa la discesa spontanea della chiocciola. In questo caso il meccanismo è detto reversibile. Riassumendo, le condizioni di reversibilità sono

meccanismo reversibile	$\alpha > \eta$
meccanismo irreversibile	$\alpha < \eta$

L'ottenere la condizione di reversibilità o meno dipende dal tipo di applicazione. Ad esempio, se il martinetto viene impiegato per sollevare carichi in maniera sicura ed è disposto verticalmente, è richiesta la condizione di irreversibilità. Al contrario se la trasmissione vite chiocciola è disposta orizzontalmente, in molte applicazioni automatiche è richiesto avere un'alta efficienza

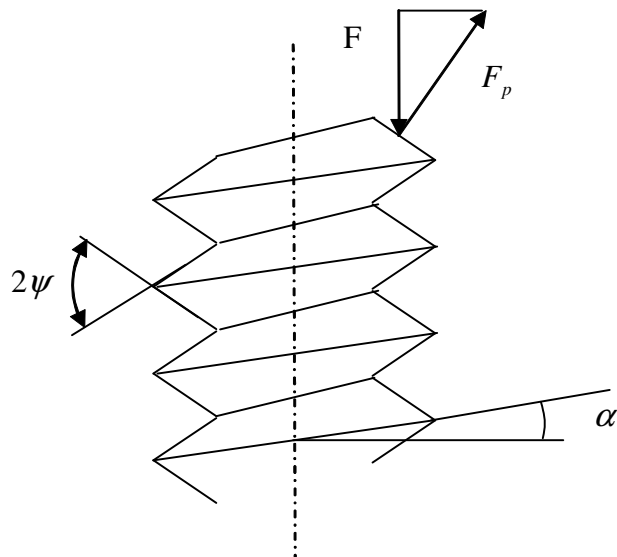
e quindi un basso attrito. Perciò la trasmissione diventa reversibile. In questi casi, per ridurre l'attrito, si utilizzano viti a ricircolo di sfere



Tra il filetto della vite e quello della chiocciola sono inserite delle sfere che rotolano all'interno delle proprie sedi.

9.6.2 Viti con filetto trapezoidale

Lo schema di questa vite è rappresentato nella seguente figura.



Si riconosce l'angolo d'elica del filetto α . ψ è il semiangolo di apertura dell'angolo che definisce la forma del filetto. Questo tipo di viti vengono utilizzate

come elementi di serraggio, accoppiandosi a dadi od avvitandosi direttamente a fori filettati. Il motivo è facilmente intuibile. L'elemento su cui è avvitata la vite genera una forza F lungo l'asse della vite. Tale forza è globalmente equilibrata dalla forza perpendicolare alla superficie di contatto

$$F_p = \frac{F}{\cos(\psi)}$$

Perciò, più ψ aumenta, più la forza perpendicolare alla superficie del filetto aumenta. Inoltre, maggiore è F_p , maggiore è la forza d'attrito (dato che è direttamente legata alla forza perpendicolare alla superficie) che causa un ottimo serraggio della vite stessa. Questo serraggio è meno efficace nel caso in cui $\psi = 0$, che corrisponde al caso di viti con filetto a sezione rettangolare.

Formalmente si può dimostrare che una vite trapezia, dal punto di vista delle forze in gioco, equivale ad una vite rettangolare avente un angolo di attrito che rispetta la relazione

$$\tan(\eta_f) = \frac{\tan(\eta)}{\cos(\psi)}$$

Si noti come l'angolo di attrito η_f , detto *angolo di attrito fittizio*, aumenti all'aumentare dell'angolo ψ .

Con questa equivalenza si possono utilizzare tutte le formule ricavate per le viti rettangolari. In particolar modo, per ruotare un dado soggetto alla forza assiale F è necessaria una coppia (vedi formula 9.7)

$$C = r \tan(\alpha + \eta_f) F$$

Le condizioni di irreversibilità diventa in questo caso $\eta_f > \alpha$.

9.7 Rotismi

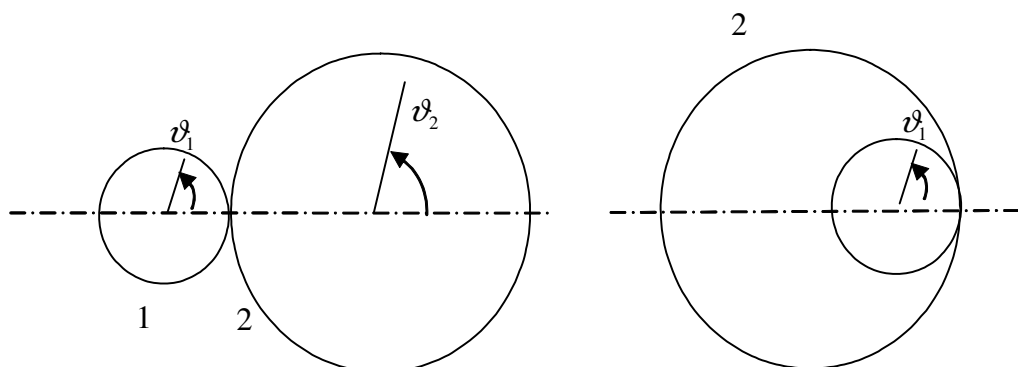
Prende il nome di *rotismo* un sistema di ruote dentate ingranate l'una sull'altra. Il rotismo è detto *ordinario* se gli assi delle ruote sono fissi a telaio; è detto *epicicloidale* se alcuni degli assi sono mobili.

9.7.1 Rotismo ordinario

E' noto che quando due ruote ingranano esternamente (figura sottostante a destra) il loro rapporto di trasmissione è

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

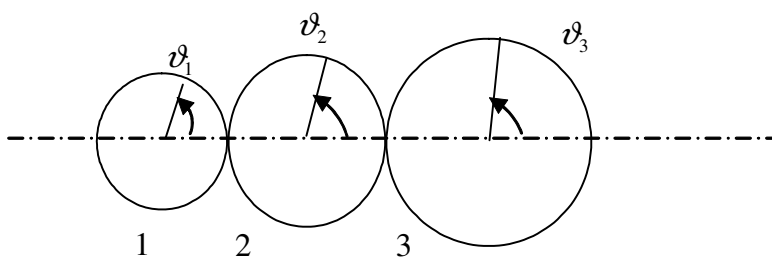
dove $\omega = \dot{\vartheta}$ ed R rappresenta il raggio primitivo della ruota.



Nel caso della figura di destra si può notare che quando la ruota 1 ruota in senso antiorario (la ruota 1 ingrana internamente alla ruota 3) anche la ruota 3 ruota nello stesso verso. Perciò il rapporto di trasmissione è in questo caso

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Facciamo riferimento alla seguente figura dove sono rappresentate le primitive di tre ruote dentate con assi di rotazione fissi a telaio



La ruota motrice è la ruota 1, mentre la ruota condotta è la ruota 3. Cerchiamo il rapporto di trasmissione tra la ruota 3 e la ruota 1. Per definizione esso vale $\tau_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Moltiplicando e dividendo per ω_2 si ottiene $\tau_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Dato che $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è il rapporto di trasmissione della ruota 2 rispetto alla ruota 1 e che $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ è il rapporto di trasmissione tra la ruota 3 e la ruota 2 si conclude che

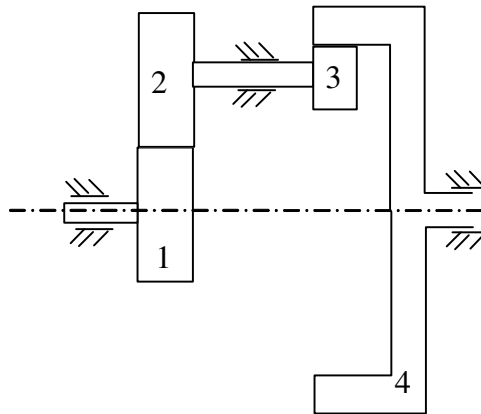
$$\tau_{31} = \tau_{32} \tau_{21}$$

ossia, il rapporto di trasmissione tra la ruota condotta e la ruota motrice in un rotismo ordinario è dato dal prodotto dei singoli rapporti di trasmissione tra tutte le ruote che costituiscono il rotismo.

Espandendo la formula si ottiene

$$\tau_{31} = \tau_{32} \tau_{21} = \left(-\frac{R_2}{R_3}\right) \left(-\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{R_1}{R_3}$$

Applichiamo la formula al seguente esempio



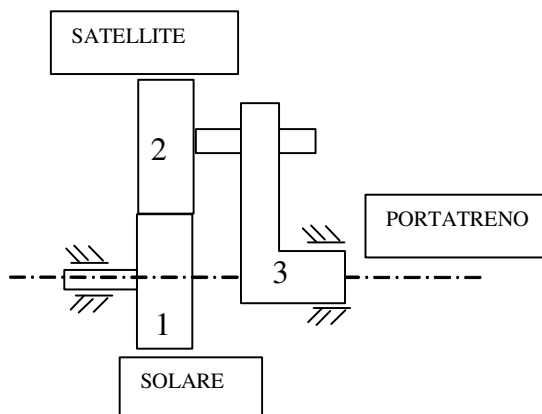
La ruota motrice è la ruota 1; la ruota condotta la ruota 4. La ruota 3 ingrana internamente con la ruota 4. Il rapporto di trasmissione, per quanto visto è

$$\tau_{41} = \tau_{43} \tau_{32} \tau_{21} = \left(\frac{R_3}{R_4}\right) \times 1 \times \left(-\frac{R_1}{R_2}\right) = -\frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}$$

L'angolo della prima ruota è legato all'angolo della seconda ruota.

9.7.2 Rotismi epicicloidali

Nei rotismi epicicloidali uno o più assi di alcune ruote dentate possono essere non fissi a telaio. In genere sono vincolati ad una struttura che ha asse di rotazione fisso a telaio. Le ruote con assi non fissi a telaio vengono dette *satelliti*. La struttura a cui sono vincolati gli assi dei satelliti è detta *portatreno*. I satelliti solitamente ruotano attorno ad una ruota con asse fisso a telaio. Tale ruota è detta *solare*. Un esempio di rotismo epicicloidale è dato dalla seguente figura



Nei rotismi epicicloidali, a differenza dei rotismi ordinari, il calcolo dei rapporti di trasmissione non è così semplice. Per ottenerli bisogna ricorrere alle velocità relative. Concentriamoci sull'esempio. Supponiamo di voler calcolare il rapporto di trasmissione del portatreno (ruota 3) rispetto al satellite (ruota 2) quando il solare è fermo (ruota 1). Per farlo bisogna porsi nel sistema di riferimento del portatreno. Se ci si mette a cavalcioni del portatreno si vedranno le ruote girare con la velocità relativa al portatreno. In altre parole, osservare rispetto al portatreno, equivale a fissare il portatreno ed a far girare le ruote con le velocità relative. Dato che il meccanismo che si ottiene fissando il portatreno è un rotismo ordinario, si può calcolare il rapporto tra le velocità (relativa al portatreno) della ruota condotta e la velocità (relativa al portatreno) della motrice utilizzando le regole che si applicano ad un rotismo ordinario. Quanto detto vale solo per le velocità relative. In altre parole, un rotismo epicicloidale può essere pensato come un rotismo ordinario se si fissa il portatreno e si lavora con le velocità relative delle ruote. Seguendo l'esempio si ottiene

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} = -\frac{R_1}{R_2}$$

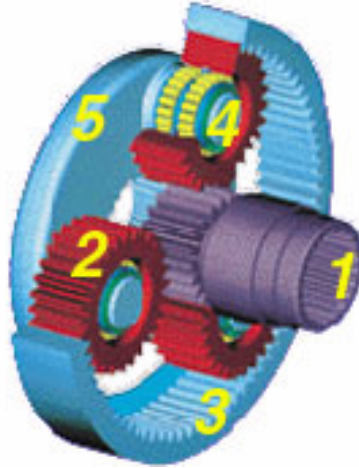
dove ω_{23} ed ω_{13} sono le velocità del satellite e del solare rispetto al portatreno. Notare che $-\frac{R_1}{R_2}$ è il rapporto di trasmissione tra le due ruote pensato come se il rotismo fosse ordinario (portatreno fisso). Ponendo le velocità relative in funzione delle velocità assolute si ottiene

$$\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = -\frac{R_1}{R_2} \quad (9.8)$$

Questa formula è detta *formula di Willis*; essa mette in relazione le velocità assolute delle ruote compreso il portatreno. Poiché il solare è fermo la sua velocità assoluta è nulla $\omega_1 = 0$. Dall'eq. 12.4 si ottiene il rapporto di trasmissione cercato

$$\tau_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_2 + R_1}$$

Una tipica applicazione dei rotismi epicicloidali è il riduttore epicicloidale schematizzato nella figura sottostante.



Il solare (ruota 1) è l'elemento motore. Attorno al solare ingranano i tre satelliti (ruote 2 e 4). Il meccanismo funzionerebbe lo stesso dal punto di vista cinematico con un solo satellite. I tre satelliti vengono utilizzati per distribuire gli sforzi realizzati. I satelliti hanno gli assi solidali al portatreno (ruota 5) che rappresenta la ruota condotta. I satelliti inoltre ingranano internamente con la corona fissa a telaio (ruota 3). Essendo questo rotismo un riduttore è richiesto di calcolare il rapporto di trasmissione del portatreno rispetto al solare cioè il valore $\tau_{51} = \frac{\omega_5}{\omega_1}$. Come al solito consideriamo le velocità relative al portatreno. I rapporti di velocità delle velocità relative sono gli stessi delle velocità assolute di un rotismo ordinario ottenuto da quello originario fissando il portatreno. Per cui si può scrivere

$$\frac{\omega_{35}}{\omega_{15}} = \frac{R_2}{R_3} \left(-\frac{R_1}{R_2} \right)$$

dove ω_{35} ed ω_{15} sono le velocità della corona e del solare rispetto al portatreno (è quindi un rapporto di velocità relative). Il termine di destra rappresenta il rapporto di trasmissione della ruota 3 rispetto alla ruota 1. E' dato quindi dal prodotto dei 2 rapporti di trasmissione rispettivamente tra la ruota 3 e la ruota 2 e tra la ruota 2 e la ruota 1. Gli stessi ragionamenti si potevano riproporre uguali considerando la ruota 4 in luogo della ruota 2. Esplicitano le velocità relative, si ottiene

$$\frac{\omega_3 - \omega_5}{\omega_1 - \omega_5} = \frac{R_4}{R_3} \left(-\frac{R_1}{R_4} \right)$$

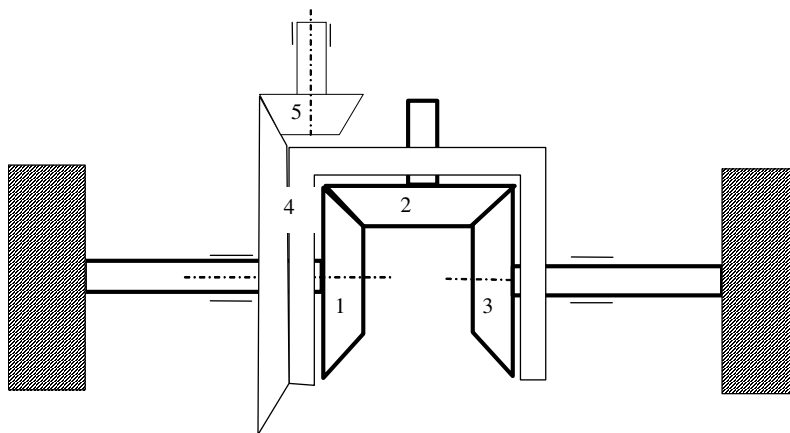
Poiché la velocità assoluta della corona è nulla ($\omega_3 = 0$), si ottiene il rapporto cercato

$$\tau_{51} = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Questo tipo di riduttori spesso vengono utilizzati in cascata a più stadi per ottenere riduzioni spinte.

9.7.3 Differenziale

Nella figura seguente è rappresentato un particolare rotismo epicicloidale detto differenziale. Il differenziale viene utilizzato nelle automobili per differenziare le velocità delle ruote motrici (proprietà richiesta in curva).



Le ruote sono direttamente calettate alle due ruote coniche 1 e 3. Una ruota conica 2 ingrana sulle ruote 1 e 3, però il suo asse di rotazione è vincolato al portatreno. Il portatreno, che forma un tuttuno con la ruota conica 4 può ruotare anch'esso attorno all'asse delle ruote 1 e 3. Il portatreno è azionato dalla ruota conica 5 che rappresenta la ruota motrice. Nel seguito troveremo la relazione tra la velocità del portatreno e le velocità delle due ruote 1 e 3.

Utilizzando la formula di Willis, si ottiene che le velocità relative al portatreno delle due ruote 1 e 3 rispettano il seguente rapporto

$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = -1$$

In questo calcolo si è ipotizzato che le ruote 1 2 e 3 siano uguali. Esplicitano le velocità relative, si ottiene

$$\frac{\omega_3 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = -1$$

da cui

$$\omega_4 = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2}$$

Capitolo 10

Cinghie, catene e funi

10.1 Cinghie non sincrone

Un sistema minimo di trasmissione a cinghia è costituito da due pulegge ed un elemento flessibile (cinghia) avvolto attorno alle due pulegge. Una puleggia è conduttrice, mentre l'altra riceve il moto attraverso la cinghia.

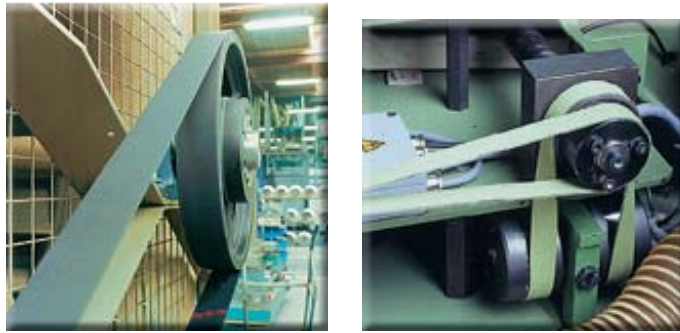
Il termine non sincrono, in questa sede, sta ad indicare il fatto che tra la puleggia condotta e quella motrice può avvenire uno scorrimento, a causa di un possibile strisciamento tra puleggia e cinghia. In altre parole, data una posizione angolare assunta dalla puleggia motrice, la posizione angolare della puleggia condotta è nota solo approssimativamente.

Questo tipo di cinghie possono essere classificate in funzione della forma della sezione di cinghia:

- *cinghie piane*;

Le cinghie piane, di cui sotto vengono dati alcuni esempi di utilizzo, hanno una sezione rettangolare. Sono solitamente costituite da nylon. Vengono impiegate per la trasmissione di potenze elevate. Per fare in modo che la cinghia non fuoriesca dalla puleggia, la superficie delle pulegge in contatto con la cinghia è leggermente bombata.





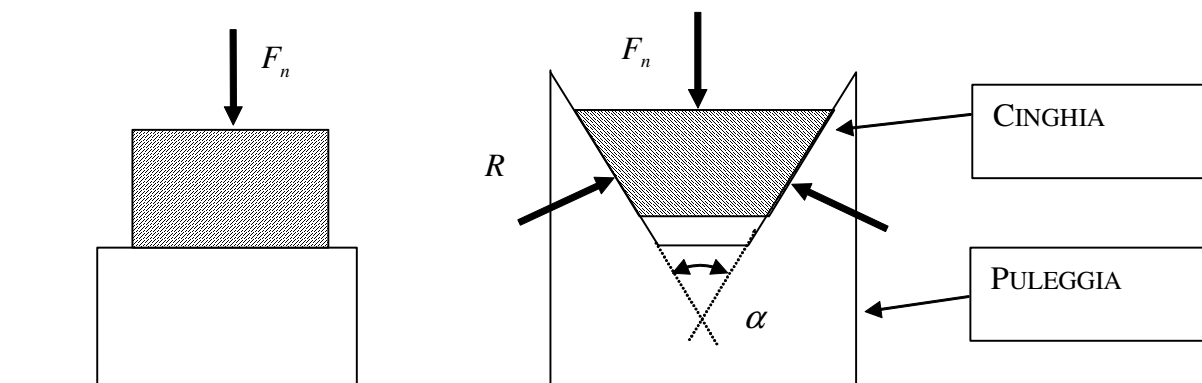
La lunghezza richiesta della cinghia viene ottenuta saldando una estremità con l'altra attraverso delle giunzioni incollate. Nella figura seguente vengono rappresentati due tipi di giunzioni

-cinghie a V;

Questo tipo di cinghie sono largamente impiegate. Si vede dalla figura che la resistenza della cinghia è garantita da inserti resistenti (cavi di acciaio) affogati all'interno di una matrice di gomma.



La forma a V viene impiegata per aumentare l'aderenza tra la cinghia e la puleggia. Consideriamo la seguente figura che rappresenta la sezione di una cinghia a V inserita nella sede della propria puleggia



Lo schema a destra rappresenta la sezione di una cinghia piana. Consideriamo prima il caso della cinghia piana. Una trasmissione a cinghia è possibile poichè tra cinghia e puleggia è presente un attrito elevato. Infatti è l'attrito che permette alla puleggia conduttrice di generare una forza tangenziale sulla cinghia lungo tutto l'arco per cui è avvolta la cinghia. La forza di attrito è tanto maggiore tanto maggiormente è premuta la cinghia contro la gola della puleggia. Se in un punto qualsiasi della cinghia viene applicata una forza normale alla cinghia F_n , in direzione radiale rispetto alla puleggia, la forza d'attrito che nasce in direzione tangenziale alla puleggia è F_t . Il coefficiente d'attrito, che dipende dai materiali a contatto, è dato dal rapporto

$$\mu = \frac{F_t}{F_n}$$

Consideriamo ora una cinghia a V (figura di destra). In questo caso la forza F_n è equilibrata radialmente da due forze di contatto R . Il valore di R si ottiene dall'equazione di equilibrio radiale

$$F_n = 2 R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

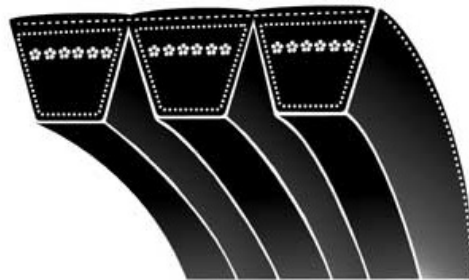
La forza complessiva di attrito che si viene a creare in questo caso è data da

$$\begin{aligned} F_{t_eq} &= 2 R \mu = \\ &= \frac{\mu}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} F_n \end{aligned}$$

Chiamiamo *coefficiente d'attrito equivalente*, il rapporto tra la forza normale F_n applicata sulla cinghia e la forza tangenziale prodotta F_{t_eq}

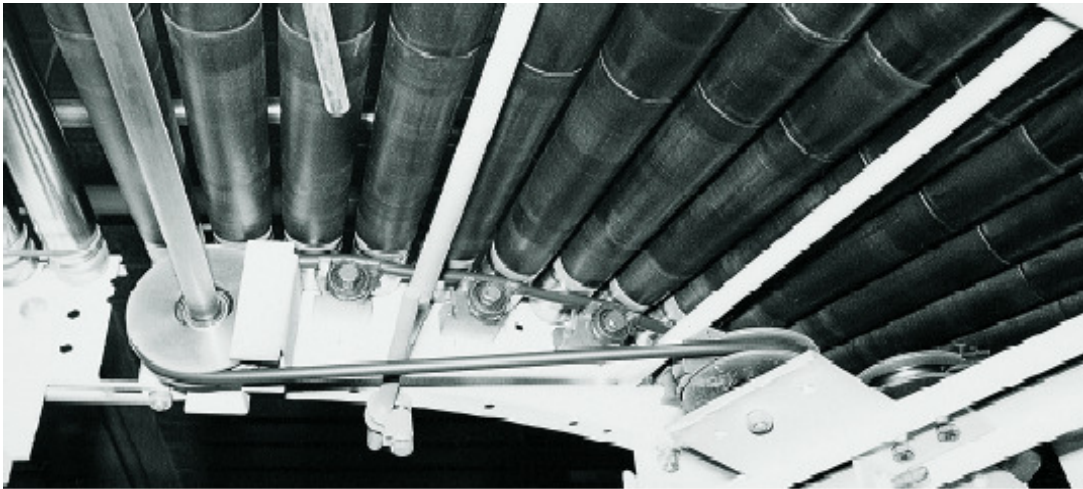
$$\mu_{eq} = \frac{F_{t_eq}}{F_n} = \frac{\mu}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Perciò una cinghia a V è equivalente ad una cinghia piana avente un coefficiente d'attrito equivalente μ_{eq} superiore al coefficiente d'attrito caratteristico del materiale a contatto μ . Per aumentare la potenza trasmissibile, utilizzando lo stesso principio, vengono impiegate le *cinghie a costole* caratterizzate da una sezione con diversi cunei.

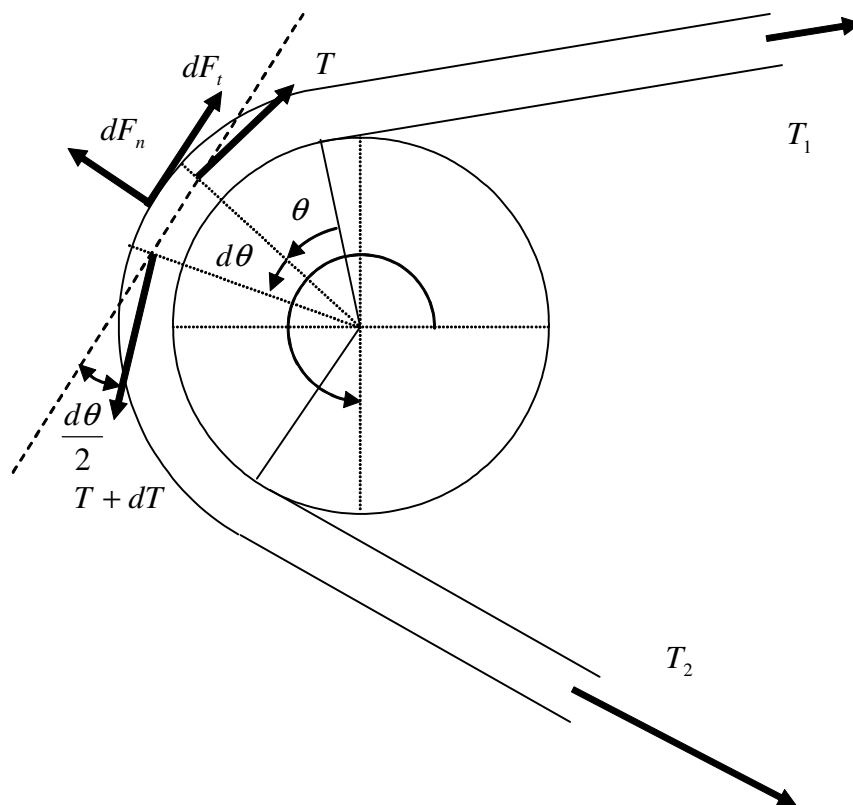


- *cinghie a sezione circolare*;

Vengono impiegate per trasmettere basse potenze. Sono particolarmente efficaci nel caso in cui la cinghia vada ad azionare molte pulegge con assi sghembi come nel caso rappresentato dalla figura sottostante.



Nelle trasmissioni a cinghia, un lato della cinghia risulta maggiormente tensionato rispetto all'altro lato. Nella seguente figura è rappresentata una puleggia condotta che ruota in senso antiorario.



Il tratto di cinghia in basso è tensionato maggiormente del lato superiore dato che deve trascinare la puleggia, perciò

$$T_2 > T_1$$

La tensione della cinghia varia in maniera continua dal valore T_1 al valore T_2 lungo l'arco di avvolgimento, cioè l'arco per cui è avvolta la puleggia. In figura è rappresentato un elementino infinitesimo di cinghia soggetto alle seguenti forze esterne:

- dF_n : forza di contatto che la puleggia esercita sull'elementino delimitato dall'arco $ds = r d\vartheta$. r è il raggio della puleggia. L'angolo ϑ che definisce un punto sull'arco della puleggia è misurato a partire dal punto in cui la cinghia inizia ad avvolgersi attorno alla puleggia.

- T : tensione che il ramo di cinghia meno tensionato esercita sull'elementino infinitesimo di cinghia. Tale tensione è diretta tangenzialmente alla puleggia. Tale tensione aumenta lungo l'arco di avvolgimento, perciò, dopo un incremento di angolo infinitesimo $d\vartheta$ la nuova tensione è $T + dT$.

- dF_t : forza d'attrito che l'arco di cinghia ds esercita sul tratto infinitesimo di cinghia. Dato che si sta considerando la puleggia condotta, dF_t tende ad opporsi al moto della cinghia.

Non sono state considerate nè le forze centrifughe, nè le forze gravitazionali.

L'equilibrio delle forze lungo la linea tangente alla puleggia (linea tratteggiata in figura) e lungo la sua perpendicolare comporta

$$\begin{aligned} T \cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) + dF_t - (T + dT) \cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) &= 0 \\ dF_n - T \sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) - (T + dT) \sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

Introducendo le approssimazioni $\cos\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) \simeq 1$ ed $\sin\left(\frac{d\vartheta}{2}\right) \simeq \frac{d\vartheta}{2}$, e trascurando i prodotti di infinitesimi $dT d\vartheta$, si ottiene

$$\begin{aligned} dF_t - dT &= 0 \\ dF_n - T d\vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

Per facilitare i calcoli si ipotizza che la cinghia stia lavorando in condizioni limite, cioè si ipotizza che la cinghia stia trasmettendo la coppia massima, al di sopra della quale si verificherebbe uno strisciamento tra cinghia e puleggia. In queste condizioni il legame tra forza di attrito e forza normale è dato da $dF_t = \eta_{eq} dF_n$. Senza tale ipotesi il legame tra forza di attrito e forza normale è dato da $dF_t < \eta_{eq} dF_n$. Eliminando dalle precedenti equazioni il termine dF_n si ottiene, si ottiene

$$\begin{aligned} \eta_{eq} T \, d\vartheta - dT &= 0 \\ \implies \\ \frac{dT}{d\vartheta} - \eta_{eq} T &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica della equazione differenziale $\dot{T} - \eta_{eq} T = 0$ è $\lambda - \eta_{eq} = 0$, per cui la soluzione ha struttura $T(\vartheta) = A e^{\eta_{eq} \vartheta}$, dove A è una costante da determinare. Quando $\vartheta = 0$, il valore della tensione sulla cinghia è dato dal valore della tensione sul lato meno teso T_1 . Perciò $T(0) = A e^{\eta_{eq} \cdot 0} = A = T_1$. La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$T(\vartheta) = T_1 e^{\eta_{eq} \vartheta}$$

La tensione nella cinghia aumenta lungo l'arco di avvolgimento con legge esponenziale. Il legame tra le due tensioni massima e minima è

$$T_2 = T_1 e^{\eta_{eq} \Delta\vartheta} \quad (10.3)$$

dove $\Delta\vartheta$ è l'arco di avvolgimento.

Le tensioni T_2 e T_1 determinano due coppie sulla puleggia condotta, una positiva e l'altra negativa (si oppone al moto). La coppia totale massima che la cinghia può trasmettere alla puleggia è

$$C_{\max} = r (T_2 - T_1) \quad (10.4)$$

Sostituendo l'eq. 10.3 nella 10.4, si ottiene

$$C_{\max} = r (e^{\eta_{eq} \Delta\vartheta} - 1) T_1$$

Da questa formulazione della coppia massima trasmissibile si deduce che

- la coppia massima aumenta all'aumentare del coefficiente d'attrito e dell'angolo di avvolgimento;
- è sempre necessaria una certa tensione sul lato lento della cinghia; questo è il motivo per cui le cinghie vengono sempre tensionate.

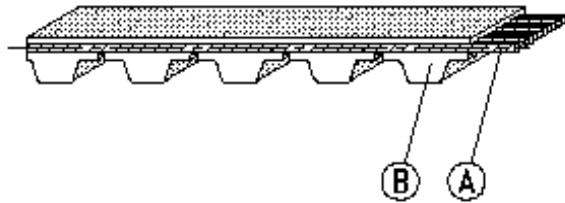
10.2 Cinghie sincrone

Nelle macchine automatiche le cinghie sincrone rappresentano una soluzione per la trasmissione di potenza molto efficaci ed a basso costo. Le cinghie dentate standard a profilo trapezoidale arrivano a potenze trasmissibili dell'ordine dei 150 kW.

La tipica configurazione di funzionamento prevede una cinghia dentata internamente che si avvolge attorno a due pulegge dentate esternamente. A differenza delle cinghie trapezoidali non vi è scorrimento tra la puleggia e cinghia. Il vantaggio è che, data la posizione angolare di una puleggia conduttrice, si conosce istante per istante la posizione angolare della puleggia condotta.

Gli elementi che compongono una cinghia sono sostanzialmente 3:

- 1) *Inserto resistente.* (A in figura sottostante) E' l'elemento che sopporta i carichi. E' costituito da materiale resistente a trazione, ma non a flessione. Perciò permette alla cinghia di flettersi, ma non di allungarsi. Molte volte è costituito da fili di acciaio.
- 2) *Corpo della cinghia.* (B in figura) Costituisce il corpo della cinghia ed i denti. Riveste l'inserto resistente.
- 3) *Rivestimento dei denti.* E' un tessuto a basso coefficiente d'attrito.



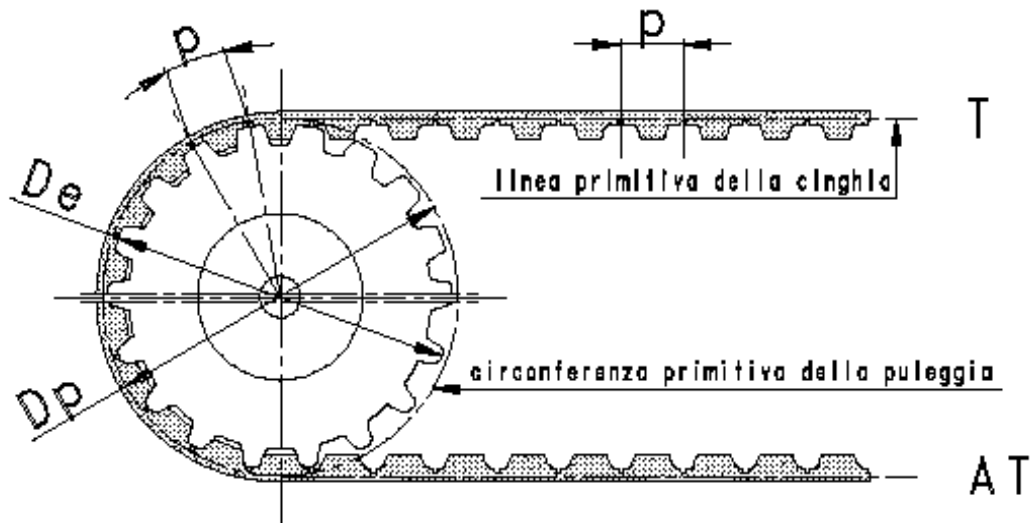
Le cinghie dentate, come gli ingranaggi sono in grado di trasmettere potenze molto elevate, ma hanno in più il vantaggio di essere silenziose e non richiedere lubrificazione o manutenzione. La cinghia può collegare anche più pulegge. Le cinghie possono essere dentate anche esternamente in maniera tale da avvolgersi intorno alle pulegge da ambo i lati.

10.2.1 Caratteristiche dimensionali di una trasmissione a cinghia

Una cinghia dentata è definita da tre elementi:

- 1) $L_P =$ *Lunghezza primitiva.* Rappresenta la lunghezza della cinghia sulla linea primitiva che corrisponde all'asse dell'inserto resistente.
- 2) *Tipo.* Col tipo della cinghia si identifica la forma del profilo del dente (trapezoidale, curvilineo, parabolico, ad archi di cerchio). Inoltre cinghie con lo stesso forma di dente hanno passi diversi (*passo* = distanza tra un dente e l'altro).
- 3) *Larghezza.* E' la larghezza della cinghia.

Introduciamo alcune definizioni utili rappresentate graficamente nella seguente immagine



$p = \text{Passo} =$ Distanza fra gli assi di due denti contigui misurata sulla linea primitiva. Il passo della puleggia e della cinghia devono essere uguali affinché l'ingranamento sia possibile.

$D_P =$ Diametro primitivo della puleggia. Definisce in linea teorica la posizione della circonferenza primitiva che è sempre maggiore del diametro esterno della puleggia. La relazione che lega il diametro primitivo al passo è

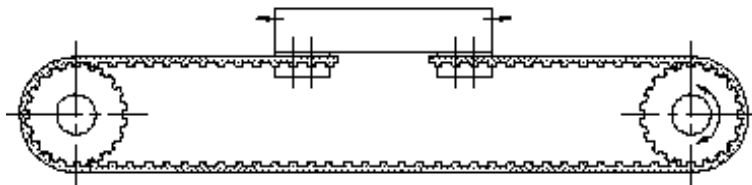
$$p Z = \pi D_P$$

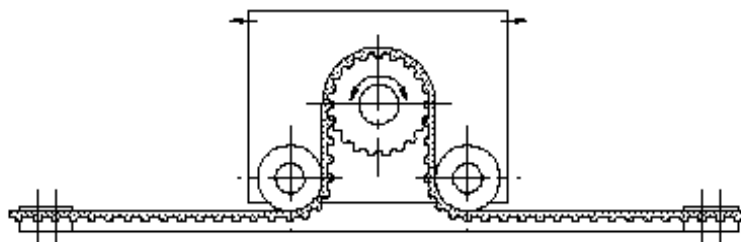
dove Z rappresenta il numero di denti della puleggia.

$L_C =$ Larghezza della cinghia. E' in genere determinata in funzione della potenza da trasmettere.

Una interessante applicazione in robotica consiste nell'utilizzare le cinghie dentate in combinazione con piastre di bloccaggio in maniera tale da permettere il moto di traslazione di una slitta.

Nella seguente figura vi sono due applicazioni. Nella prima la cinghia è in movimento, mentre nella seconda la cinghia è fissata ed il motore aziona la puleggia centrale.





10.2.2 Cinghie a profilo trapezoidale (Dimensionamento)

Sono largamente impiegate fino a potenze di 150 kW.

Sono divise in funzione del passo della cinghia secondo tabelle simili alla seguente (Questi valori sono fissati da normativa ISO)

Tipo	T2,5	T5	T10	T20
Passo[mm]	2,5	5	10	20

Essendoci moltissimi tipi di cinghia con diversi profili, esistono altre classificazioni; in ogni caso, all'interno di una tipologia, il passo è il parametro che contraddistingue la cinghia.

Vediamo ora come si dimensionano le cinghie. Il procedimento che qui verrà esposto, ricalca i procedimenti impiegati nel dimensionamento di cinghie con altri tipi di profilo.

I dati di progetto sono:

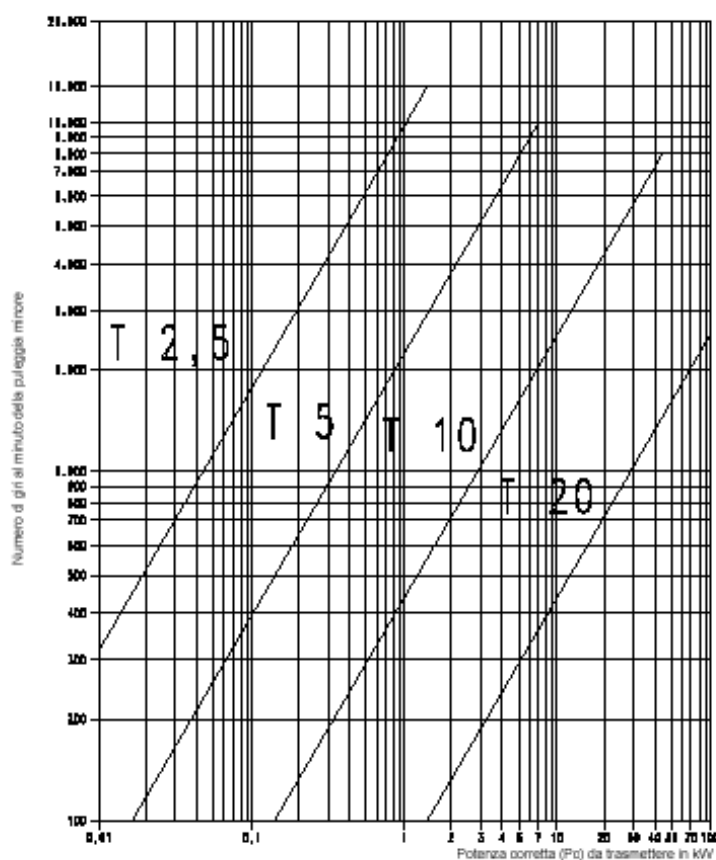
- potenza da trasmettere P ;
- velocità angolare (o numero di giri al minuto) dell'albero conduttore n_1 (puleggia di diametro minore);
- rapporto di trasmissione τ_{21} (della puleggia condotta rispetto alla conduttrice);

La cinghia dovrà trasmettere una determinata potenza P detta *potenza nominale*. Questa è data ad esempio dalla potenza che il motore scarica sulla puleggia conduttrice. Nel dimensionamento, la potenza a cui si fa riferimento (*potenza corretta*) è maggiore della nominale. Essa tiene conto di altri fattori. Essa vale

$$P_c = P k_c$$

dove k_c è un coefficiente (maggiore di 1) che dipende dal tipo di attuatore impiegato, dal tipo di macchina su cui verrà montata la cinghia, dal rapporto di riduzione e dalla frequenza di utilizzo giornaliero. k_c è ricavato da tabelle e solitamente è il prodotto di più coefficienti.

Il passo della cinghia viene scelto in funzione del numero di giri della puleggia più piccola e della potenza corretta da trasmettere P_c , utilizzando grafici tipo il seguente.



Le pulegge vanno scelte in maniera tale da realizzare il rapporto di trasmissione desiderato, perciò deve valere

$$\tau_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

La formula sopra permette di scegliere le coppie di pulegge che realizzano il rapporto di trasmissione di progetto. Notare che non è possibile trovare una coppia che realizzi esattamente il rapporto desiderato in quanto Z_1 e Z_2 sono numeri interi. Si fa in modo di avvicinarsi il più possibile. Inoltre ci sono più soluzioni. Scegliendo soluzioni con maggior numero di denti le dimensioni delle pulegge aumentano con relativi problemi di ingombro. Per contro le forze agenti sulla cinghia sono minori e quindi, a parità di potenza, basta una cinghia di larghezza minore.

Per concludere il dimensionamento della cinghia bisogna scegliere la larghezza della cinghia. Nei cataloghi si usano delle tabelle che sono di facile consultazione. In questa sede, si vuole solo far vedere a che parametri è legata la larghezza della cinghia.

La potenza trasmessa P_c è data da

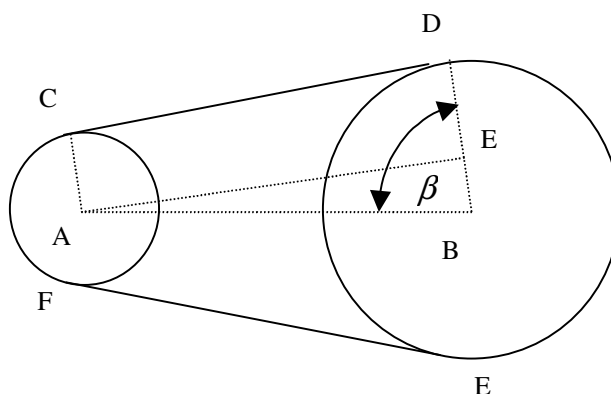
$$P_c = \omega_1 C_1$$

dove ω_1 e C_1 sono rispettivamente la velocità angolare e la coppia erogata dalla puleggia conduttrice. Introducendo la tensione sulla cinghia F , si ottiene

$$P_c = \omega_1 F \frac{D_P}{2}$$

Poiché è intuitivo pensare che la larghezza della cinghia sia proporzionale alla tensione F , dalla formula si deduce che la larghezza, a parità di potenza trasmessa, è inversamente proporzionale alla velocità di rotazione ed al diametro primitivo.

La lunghezza della cinghia L_t viene scelta in maniera tale da soddisfare le esigenze di ingombri. Per progettare l'alloggiamento delle pulegge è necessario calcolare l'interasse delle pulegge. Il legame tra la lunghezza e l'interasse delle pulegge si ricava nel seguente modo. Si faccia riferimento alla figura



L'interasse I_t è in figura la lunghezza del segmento AB. I segmenti AC ed BD sono perpendicolari al tratto di cinghia CD. Il tratto AE è parallelo a CD. L'angolo β vale perciò

$$\beta = \arccos \left(\frac{D_{P2} - D_{P1}}{2 I_t} \right)$$

dove D_{P2} e D_{P1} sono i diametri primitivi della puleggia più grande e della più piccola. Sommando tutti i tratti di cinghia rettilinea e le lunghezze degli archi di avvolgimento, si ottiene

$$\begin{aligned} L_t &= \overline{CD} + \overline{FE} + \widehat{CF} + \widehat{ED} = \\ &= 2 I_t \sin(\beta) + D_{P1} \beta + D_{P2} (\pi - \beta) \end{aligned}$$

Questa formula che lega interasse a lunghezza della cinghia non è lineare e non è quindi di facile soluzione. Solitamente si ha una lunghezza prefissata della cinghia (perché vi sono delle lunghezze standardizzate e perché la lunghezza totale è un multiplo del passo). Per cui capita spesso di dover calcolare l'interasse. Nei manuali sono presenti delle formule approssimate, ma quando si ha a che fare con una cinghia che passa attraverso più pulegge si devono fare delle considerazioni geometriche come sopra.

A volte si introducono dei meccanismi per far variare l'interasse in sede di assemblaggio, sia per facilitare l'assemblaggio, sia per tensionare la cinghia più facilmente. In questi casi non è necessario prevedere un interasse costruttivo esattamente uguale a quello teorico, in quanto viene registrato successivamente.

Ci sono dei valori massimi e minimi di tensione all'interno dei quali la tensione della cinghia deve rimanere per un buon funzionamento. Il tensionamento della cinghia può avvenire in diversi modi. Si è già detto che un modo consiste nell'allungare l'interasse. Un altro modo molto usato consiste nel prevedere un galoppino. Il galoppino è una ruota folle che va a premere sulla cinghia. Deve essere a fascia piana se disposto esternamente oppure dentato se disposto internamente.

Una volta noto il valore dell'interasse è facile calcolare il numero di denti in presa Z_P

$$Z_P = Z_1 \frac{\beta}{\pi}$$

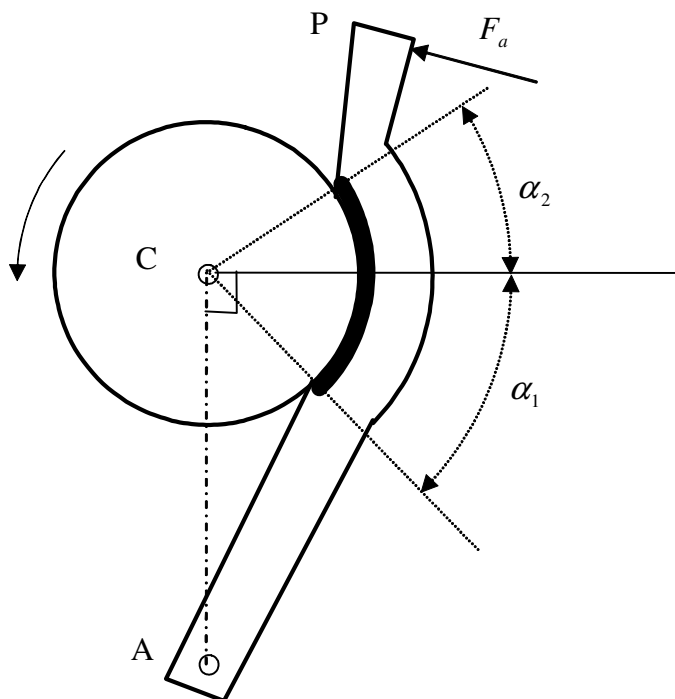
Ci deve essere sempre un numero minimo di denti in presa in grado di garantire una buona ridistribuzione dello sforzo. Perciò il valore calcolato deve essere superiore ai valori forniti dai cataloghi che dipendono dalla velocità e dal tipo di cinghia.

Capitolo 11

Freni

Freni a ganasce

Consideriamo un tamburo serrato da un ceppo esterno (detto ganaschia) come nella figura seguente



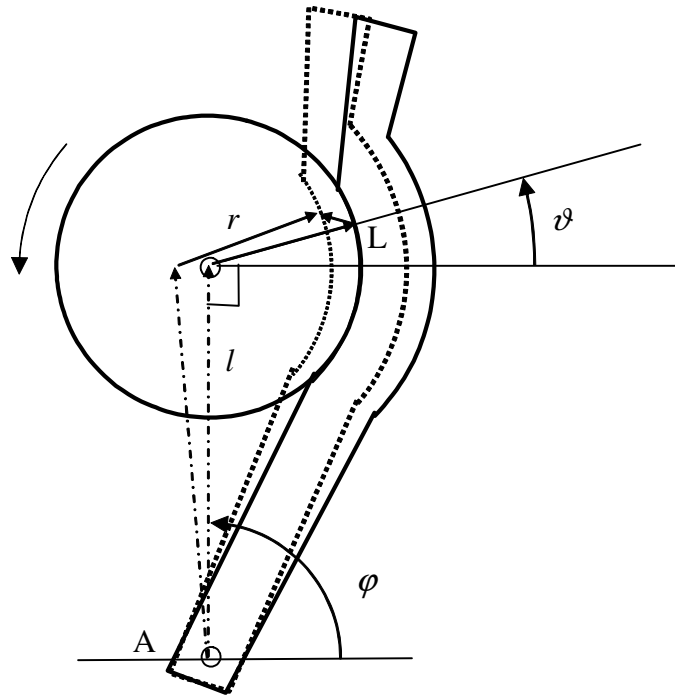
Il meccanismo è disposto in maniera tale che la congiungente il fulcro del ceppo (punto A) ed il centro del tamburo, sia disposta verticalmente.

La rotazione antioraria del tamburo viene frenata dall'applicazione di una forza F_a applicata nel punto P del ceppo. Il ceppo preme sul tamburo attraverso la guarnizione che si estende per gli angoli α_1 ed α_2 in figura. Il ceppo è fulcrato nel punto A . L'obiettivo dell'analisi che segue riguarda il calcolo della momento frenante causato dall'attrito della guarnizione sul tamburo in funzione della forza applicata F_a . Nell'effettuare questa trattazione, si introducono delle ipotesi semplificative. Innanzitutto si suppone che il coefficiente d'attrito μ tra la superficie della guarnizione ed il tamburo sia costante. In realtà il coefficiente d'attrito dipende da molti fattori primi fra tutti la temperatura e la velocità di strisciamento tra le superfici a contatto.

In secondo luogo si suppone che durante il normale funzionamento il tamburo non si usuri, mentre le guarnizioni si usurino. Questa ipotesi, che nella realtà trova riscontro in quanto le guarnizioni sono costituite da materiale che si usura e che quindi comporta la sostituzione delle guarnizioni stesse, è necessaria per calcolare la distribuzione delle pressioni di contatto tra tamburo e guarnizioni. Infatti, a differenza di quanto potrebbe sembrare, la pressione non è costante lungo la guarnizione. Per capire come essa si ripartisce, si sfrutta l'ipotesi di Reye che afferma:

il volume di materiale asportato (nell'unità di tempo) per usura da una superficie tenera che striscia su di una superficie dura, è proporzionale alla pressione scambiata localmente tra le due superfici. Per capire questa semplice ipotesi basta pensare ad una gomma da cancellare. Se si fa scorrere la gomma su di un tavolo, premendo maggiormente su di un lato, quel lato si consumerà maggiormente. Dunque, il lato soggetto ad una pressione maggiore va incontro ad una usura maggiore.

Riprendendo lo schema del freno, quando la guarnizione si usura, il ceppo si avvicina di poco al tamburo attraverso una piccola rotazione del ceppo attorno al punto A . Valutiamo come varia l'usura da punto a punto del ceppo.



Nella figura sopra, il ceppo in linea continua rappresenta la configurazione del ceppo all'inizio del funzionamento. Si ipotizza che dopo una unità di tempo prefissata δt il ceppo si sia usurato. Il ceppo usurato, rappresentato in figura dalla linea tratteggiata, ruota di un angolo $\delta\varphi$ attorno al fulcro del ceppo (punto A). Ovviamente, la figura rappresenta un grado di usura troppo elevato rispetto a quanto avviene in realtà; è stata scelta una rappresentazione del genere solamente per facilitare la comprensione. In realtà il valore di $\delta\varphi$ è da considerarsi piccolissimo. Il materiale asportato è rappresentato dall'area data dall'intersezione della figura del ceppo tratteggiata ed il cerchio rappresentante il tamburo. Il punto L rappresenta un punto qualsiasi sulla superficie della guarnizione prima dell'avvenuta usura. Le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento assoluto con origine in A sono

$$L = l \begin{Bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} \cos(\varphi - \frac{\pi}{2} + \vartheta) \\ \sin(\varphi - \frac{\pi}{2} + \vartheta) \end{Bmatrix} = l \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

dove l è la distanza tra il punto A ed il centro del tamburo; r è il raggio esterno del tamburo su cui va ad insistere la guarnizione; φ , che rappresenta la posizione angolare del ceppo, nella configurazione non usurata vale 90° ; ϑ è la posizione angolare del punto di contatto calcolata rispetto ad un riferimento angolare che è solidale al ceppo (deve essere $-\alpha_1 < \vartheta < \alpha_2$). Il secondo passaggio dell'eq. 11.1 è giustificato dal fatto che, in configurazione non usurata, $\varphi = 90^\circ$.

Se non vi fosse la presenza del tamburo, il punto L, a causa di una rotazione $\delta\varphi$ del ceppo, si sposterebbe di una quantità infinitesima pari a

$$\delta L = l \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} \delta\varphi + r \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi - \frac{\pi}{2} + \vartheta) \\ \cos(\varphi - \frac{\pi}{2} + \vartheta) \end{Bmatrix} \delta\varphi = \left[l \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{Bmatrix} \right] \delta\varphi$$

Poiché in realtà vi è la presenza del tamburo, la quantità δL rappresenta l'entità dell'usura a cui è andato soggetto la guarnizione nel punto L a seguito di una rotazione infinitesima del ceppo pari a $\delta\varphi$. Come si può vedere dalla figura, il vettore infinitesimo δL non rappresenta l'usura nella direzione perpendicolare alla superficie della guarnizione nel punto L. Per determinarla, è necessario calcolare il valore della proiezione del vettore δL sul versore radiale del tamburo che vale (se orientato dal punto L verso il punto C centro del tamburo) $v = -\begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \end{Bmatrix}^T$. Perciò, lo spessore usurato perpendicolare alla superficie della guarnizione nel punto L a causa di una rotazione del ceppo infinitesima $\delta\varphi$, è il prodotto scalare di δL per v e vale

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta L \cdot v = \delta L^T v = \\ &= -\left[l \begin{Bmatrix} -1 & 0 \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{Bmatrix} \delta\varphi = \\ &= l \cos(\vartheta) \delta\varphi \end{aligned}$$

Da questa formula si deduce che l'usura non è costante lungo la guarnizione. E' massima nel punto in cui $\vartheta = 0$, cioè orrizzontalmente. Se chiamiamo s lo spessore della guarnizione (dimensione della guarnizione lungo la direzione entrante del foglio), il volume di materiale usurato nell'unità di tempo, è pari a

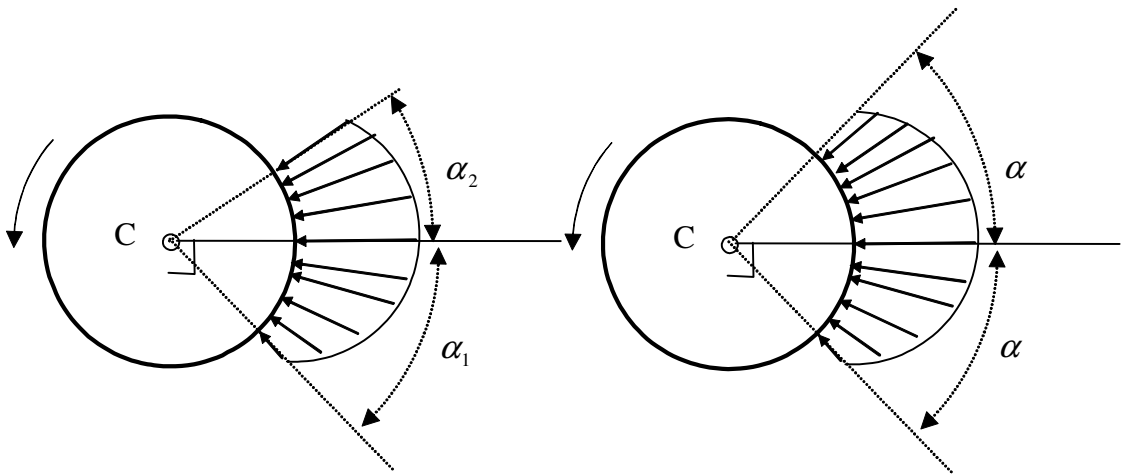
$$\delta V = \delta u s r \delta\vartheta = l \cos(\vartheta) \delta\varphi s r \delta\vartheta$$

(controllare l'ipotesi di Reye, tutti i singoli termini)

dove la quantità $r \delta\vartheta$ rappresenta una lunghezza infinitesima lungo la guarnizione. Secondo l'ipotesi di Reye, il volume usurato è proporzionale alla pressione scambiata tra le superfici a contatto. Usando come costante di proporzionalità k , si può scrivere $\delta V = k p \implies l \cos(\vartheta) \delta\varphi s r \delta\vartheta = k p$, dove p indica la pressione di contatto. Indicando $p_0 = \frac{l \delta\varphi s r \delta\vartheta}{k}$, si ha la distribuzione della pressione al variare dell'angolo ϑ

$$p = p_0 \cos(\vartheta)$$

Questa formula ci dice che la pressione è massima sull'orizzontale, o meglio, è massima nella direzione perpendicolare alla congiungente il fulcro del ceppo con il centro del mozzo. Questa direzione viene detta anche *linea di avanzamento*. Visivamente la pressione si distribuisce sul tamburo secondo la figura seguente (figura a sinistra)

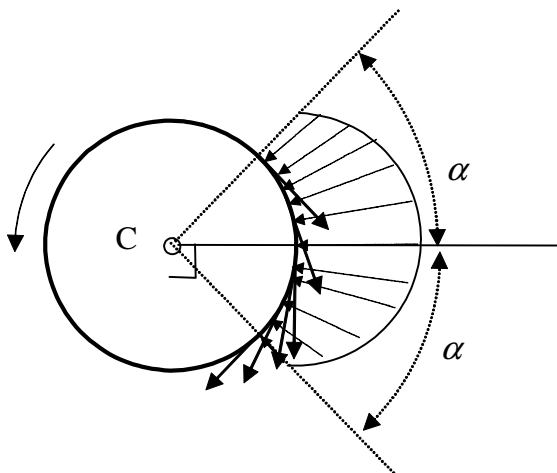


Si nota che più ci si allontana (inteso come angolo) dalla linea di avanzamento più diminuisce la pressione, quindi meno efficace è quella porzione di guarnizione. Per semplificare la trattazione si considera $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Data questa ultima semplificazione, la risultante di tutte le pressioni lungo l'asse verticale è nulla, in quanto le componenti y delle pressioni si eliminano a vicenda. Il modulo della forza risultante delle pressioni lungo l'asse x si trova integrando le componenti x della pressione

$$\begin{aligned}
 F_p &= \int_{-\alpha}^{\alpha} p s r \cos(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\alpha}^{\alpha} p_0 \cos^2(\vartheta) s r d\vartheta = & (11.2) \\
 &= p_0 s r \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2(\vartheta) d\vartheta =
 \end{aligned}$$

A causa della pressione esercitata e dell'attrito presente tra guarnizione e tamburo, è presente un campo di forze distribuite attorno alla circonferenza del tamburo, come in figura



Tale campo di forze d'attrito determina l'azione frenante sul tamburo.

Per simmetria, la risultante delle componenti di queste forze lungo l'asse x è nulla, mentre il modulo della risultante (che è diretta verso il basso) delle componenti lungo l'asse y vale

$$\begin{aligned}
 F_t &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu p s r \cos(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu p_0 \cos^2(\vartheta) s r d\vartheta = & (11.3) \\
 &= \mu p_0 s r \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2(\vartheta) d\vartheta =
 \end{aligned}$$

Mentre il momento frenante agente sul tamburo è pari a

$$\begin{aligned}
 M_t &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu p s r^2 d\vartheta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \mu p_0 \cos(\vartheta) s r^2 d\vartheta = \\
 &= \mu p_0 s r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\vartheta) d\vartheta =
 \end{aligned}$$

F_p fornisce alcun contributo al momento frenante, poiché passa per il centro del tamburo. Si è ricavato precedentemente quanto vale il modulo di F_t , ma non si conosce ancora dove è applicata. Per quanto ne sappiamo potrebbe essere lungo una qualsiasi retta parallela all'asse y. Per calcolare la distanza della retta di applicazione di F_t dal centro del tamburo, si ricorre alle seguenti considerazioni. Il momento prodotto da F_t (che è disposta verticalmente) deve essere lo stesso di M_t , perciò

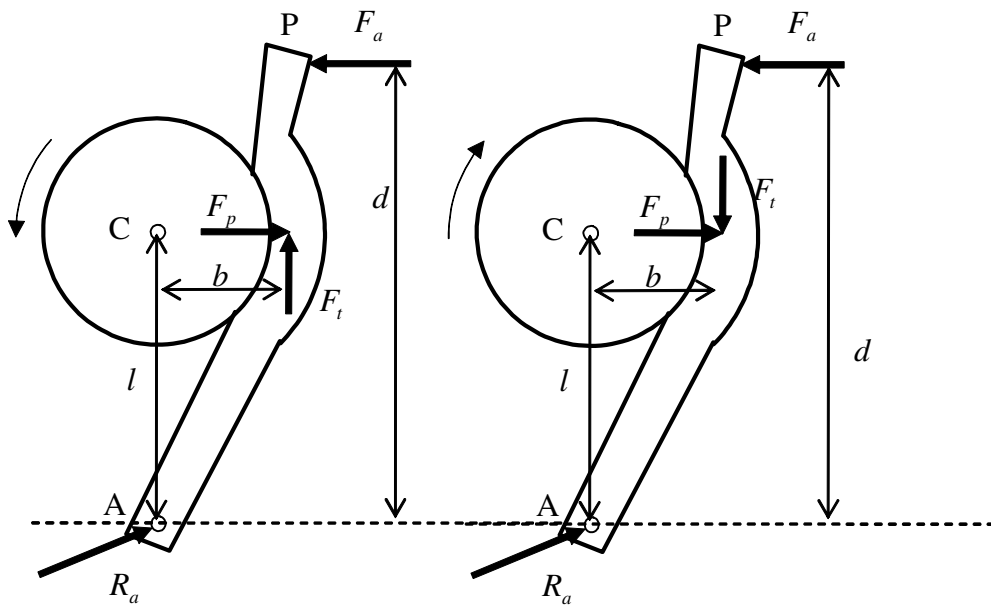
$$M_t = b F_t$$

dove b è il braccio della forza F_t rispetto al centro del tamburo. Dall'equivalenza dei momenti, sostituendo i valori dettagliati si ricava la distanza di F_t dal centro

$$b = \frac{M_t}{F_t} = r \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\vartheta) d\vartheta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2(\vartheta) d\vartheta}$$

Poiché $\cos^2(\vartheta) < \cos(\vartheta)$ si ottiene $b > r$. Confrontando le equazioni 11.2 ed 11.3 si deduce che $F_t = \mu F_p$.

Supponiamo di voler calcolare la forza F_a da applicare al ceppo in maniera tale da ottenere un desiderato momento frenante M_t . Consideriamo la forza di spinta disposta orizzontalmente. In generale non lo è, ma la trattazione matematica è facilmente estendibile al caso in cui non lo sia. Per determinarla, bisogna impostare un equilibrio di forze agenti sul ceppo, considerando il principio di azione e reazione tra ceppo e tamburo. In altre parole, le forze F_t ed F_p rappresentano non solo le forze che il ceppo esercita sul tamburo, ma anche le forze che il tamburo esercita sul ceppo. Le forze agenti sul ceppo vengono rappresentate nella seguente figura (figura di sinistra in cui il tamburo ruota in senso antiorario)



Nella figura è stata rappresentata anche la reazione vincolare del telaio R_a agente sul fulcro A. L'equilibrio dei momenti rispetto al fulcro A porta a scrivere

$$F_a = \left(\frac{l}{\mu} - b \right) \frac{F_t}{d} = \left(\frac{l}{b\mu} - 1 \right) \frac{M_t}{d} \quad (11.4)$$

Se invece il tamburo venisse frenato mentre ruota in senso orario (figura di destra), a parità di momento frenante ottenuto, la forza da applicare sarebbe

$$F_a = \left(\frac{l}{\mu} + b \right) \frac{F_t}{d} = \left(\frac{l}{b\mu} + 1 \right) \frac{M_t}{d}$$

Per ottenere l'ultima equazione, si è semplicemente invertita la direzione della forza F_t ed applicato il consueto equilibrio ai momenti delle forze rispetto al punto A.

Nel primo caso, quando il tamburo ruota in senso antiorario, la forza F_a da esercitare è minore che nel secondo caso. Il freno viene detto *compresso*. Inoltre, nell'eq. 11.4 se $\frac{l}{b} < \mu$ la forza F_a risulterebbe negativa. Questa condizione corrisponde al caso di freno detto *autobloccante*, nel senso che quando la granascia viene accostata al tamburo, essa subisce una forza di richiamo verso il tamburo che frena automaticamente. E' necessaria una forza esterna per disinnescare il freno.

Freni a ceppi interni

Capitolo 12

Modellizzazione attraverso la trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è uno strumento utile nella individuazione del comportamento dinamico di modelli meccanici, elettrici o misti esprimibili a mezzo di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. In sostanza, l'equazione differenziale è in generale complicata da risolvere. Attraverso la trasformata, il problema della soluzione dell'equazione differenziale viene trasformato in un equivalente problema in cui la soluzione si riduce alla soluzione di una equazione algebrica.

12.1 Trasformata di Laplace

Prendiamo una funzione nel tempo $f(t)$. La *trasformata di Laplace* della funzione $f(t)$ è definita nel seguente modo

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

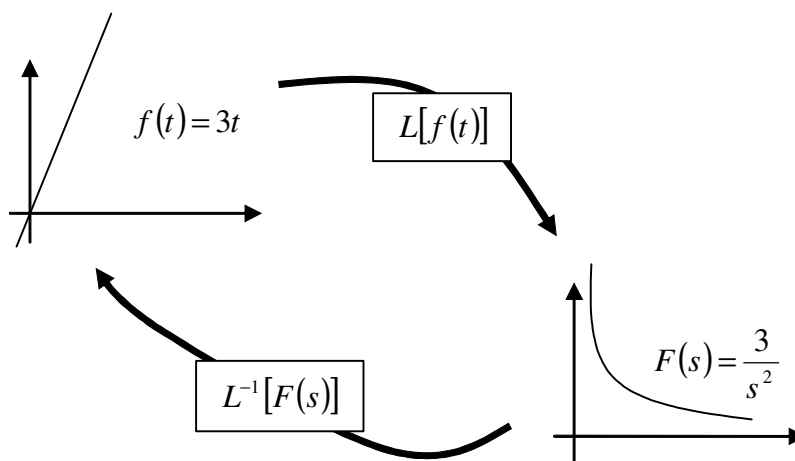
In pratica la trasformata consiste nell'integrare la funzione $f(t)$ moltiplicata per la quantità $e^{-s t}$. Nell'effettuare l'integrale, la quantità s viene considerata una costante. Perciò il risultato dell'integrale è una funzione nella variabile s . In quest'ottica, la trasformata di Laplace può essere immaginata come una applicazione che trasforma funzioni dalla variabile temporale alla variabile s . Consideriamo per esempio la trasformata della quantità $f(t) = 3t$. Applicando la definizione si ottiene

$$\begin{aligned}
 F(s) &= L[f(t)] = L[3t] = \int_0^{\infty} 3t e^{-s t} dt = \\
 &= 3 \int_0^{\infty} t e^{-s t} dt = e^{-s t} \left(-\frac{1}{s^2} - \frac{t}{s} \right) \Big|_0^{\infty} = \\
 &= \frac{3}{s^2}
 \end{aligned}$$

Perciò nell'esempio si vede come la trasformata di laplace ha trasformato l'equazione di una retta $f(t) = 3t$ (nella variabile t) in una equazione di un'iperbole $F(s) = \frac{3}{s^2}$ (nella variabile s). Esiste anche la trasformata inversa di laplace detta *antitrasformata di Laplace*. L'antitrasformata è definita come

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) e^{s t} ds$$

dove $j = \sqrt{-1}$. L'integrale contenuto nell'antitrasformata è calcolato nella variabile s . t è considerato una costante durante l'integrale. Questo tipo di integrale non è di facile soluzione. D'altronde esistono codici di calcolo in grado di effettuare l'integrale automaticamente. Ciò che è importante sottolineare è che l'antitrasformata di laplace trasforma funzioni nella variabile s in funzioni nella variabile t . Perciò se applicassimo l'antitrasformata di laplace alla funzione $F(s) = \frac{3}{s^2}$ otterremo la funzione di partenza nella variabile t da cui eravamo partiti $L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{3}{s^2}\right] = 3t$.



Le funzioni di laplace più importanti sono state calcolate e catalogate in tabelle simili alla seguente

Nome	Funzione nella variabile t	Funzione nella variabile s
Costante unitaria	$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$
Rampa unitaria	$f(t) = t$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$
Rampa di ordine n	$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
Esponenziale	$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$

Attraverso la tabella si passa immediatamente dalla funzione nel tempo alla funzione nella variabile s .

Vediamo alcune proprietà utili della trasformata di laplace.

La trasformata di laplace del prodotto di una funzione per una costante k è il prodotto della costante per la laplacetrasmata della funzione. Infatti

$$\begin{aligned}
 L[k f(t)] &= \int_0^{\infty} k f(t) e^{-s t} dt = & (12.1) \\
 &= k \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \\
 &= k L[k f(t)]
 \end{aligned}$$

La laplacetrasmata della somma di funzioni è la somma delle laplacetrasmate delle funzioni stesse. Infatti

$$\begin{aligned}
 L[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^{\infty} (f_1(t) + f_2(t)) e^{-s t} dt = & (12.2) \\
 &= \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-s t} dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-s t} dt = \\
 &= L[f_1(t)] + L[f_2(t)]
 \end{aligned}$$

Per esempio, attraverso la tabella e queste due proprietà siamo ora in grado di calcolare la trasformata della funzione $f(t) = 4t + 5t^2$. Applicando la proprietà della somma di funzioni si ottiene $L[f(t)] = L[4t + 5t^2] = L[4t] + L[5t^2]$. Applicando la proprietà di prodotto per una costante $L[4t] + L[5t^2] = 4L[t] + 5L[t^2]$. Infine, utilizzando la tabella si conclude $4L[t] + 5L[t^2] = 4\frac{1}{s^2} + 5\frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{4}{s^2} + \frac{10}{s^3}$.

Altri due importanti teoremi riguardano la trasformata di laplace di una derivata di funzione e dell'integrale di una funzione. Partiamo dalla derivata di una funzione rispetto al tempo $\frac{df}{dt}$. La sua trasformata di laplace può essere messa in relazione con la trasformata di laplace della funzione $f(t)$. Si procede partendo dalla definizione

$$L\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-s t} dt$$

Integriamo per parti, cioè applicando la regola $\int \frac{dh}{dt} l dt = h l - \int h \frac{dl}{dt} dt$, dove nel nostro caso si i valori di $\frac{dh}{dt}$ ed l sono $\frac{dh}{dt} = \frac{df}{dt}$ ed $l = e^{-s t}$. Si ottiene

$$\begin{aligned} L \left[\frac{df}{dt}(t) \right] &= \\ \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-s t} dt &= h l \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} h \frac{dl}{dt} dt = \\ &= f(t) e^{-s t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(-s) e^{-s t} dt = \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \\ &= -f(0) + s L[f(t)] = \\ &= -f(0) + s F(s) \end{aligned}$$

dove $F(s) = L[f(t)]$. Perciò la laplacetrasmata della derivata di una funzione ha due contributi: il primo dato dal valore della funzione stessa calcolata all'istante $t = 0$ (moltiplicato per -1) ed il secondo dato dal prodotto della laplacetrasmata della funzione moltiplicata per la variabile s . In sostanza, se fosse $f(0) = 0$ (condizioni iniziali nulle), si può notare che la derivata nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per s nel dominio delle laplacetrasmate.

Per quanto riguarda la laplacetrasmata della derivata seconda si ottiene un risultato simile (che non dimostreremo)

$$L \left[\frac{d^2 f}{dt^2}(t) \right] = \int_0^{\infty} \frac{d^2 f}{dt^2} e^{-s t} dt = -\frac{df}{dt}(0) - f(0) s + s^2 F(s)$$

Generalizzando si può dimostrare la seguente regola

$$L \left[\frac{d^n f}{dt^n}(t) \right] = \int_0^{\infty} \frac{d^n f}{dt^n} e^{-s t} dt = -\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0) + \dots - f(0) s^{n-1} + s^n F(s)$$

Nota che, quando la funzione e tutte le sue derivate fino all'ordine $n-1$ sono nulle all'istante iniziale, la trasformazione risulta molto semplice $L \left[\frac{d^n f}{dt^n}(t) \right] = s^n L[f(t)]$. Perciò derivare nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per s^n nel dominio s .

Allo stesso modo anche la trasformata della funzione integrale è associata alla trasformata dell'integrando. Si può dimostrare che

$$L \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

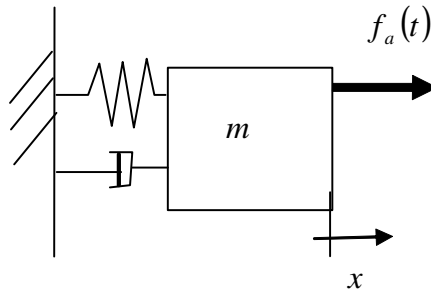
Vediamo come sia possibile applicare queste regole alla soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

ESEMPIO

Per focalizzare le idee concentriamoci su di un caso noto: l'oscillatore semplice sovrasmorzato la cui equazione è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_a(t) \quad (12.3)$$

dove m , c e k sono rispettivamente la massa, lo smorzamento e la costante elastica dell'oscillatore ed $f_a(t)$ è la forzante applicata al sistema.



Laplace trasformiamo entrambi i termini della equazione 12.3. La laplace trasformata è una operazione che può essere applicata sia a sinistra che a destra del segno di uguaglianza. Cioè, se due funzioni nel tempo si eguagliano, anche le loro laplace trasformate si eguagliano. Indichiamo con $F_a(s)$ la laplace trasformata della forzante. La laplace trasformata del termine di sinistra è

$$L \left[m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx \right] = mL \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \right] + cL \left[\frac{dx}{dt} \right] + kL[x]$$

per le proprietà viste date dalle eq. 12.1 ed 12.2. Applicando la regola delle laplace trasformate di derivate di funzioni, si ottiene

$$m \left(-\frac{dx}{dt}(0) - x(0) s + s^2 X(s) \right) + c(-x(0) + s X(s)) + k X(s)$$

dove $X(s)$ è la laplace trasformata della coordinata $x(t)$. Laplace trasformando anche il termine di destra (la forzante), l'equazione che si ottiene è

$$m \left(-\frac{dx}{dt}(0) - x(0) s + s^2 X(s) \right) + c(-x(0) + s X(s)) + k X(s) = F_a(s) \quad (12.4)$$

È possibile risolvere l'equazione rispetto alla quantità $X(s)$.

$$X(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} F_a(s) + \frac{x(0) s + \frac{dx}{dt}(0) + c x(0)}{m s^2 + c s + k}$$

Adesso che si ha la formula esplicita di $X(s)$, per conoscere l'andamento nel tempo della massa, cioè la soluzione dell'equazione differenziale, è sufficiente antilaplace trasformare la quantità $X(s)$. Notare che la soluzione si compone di due contributi: il primo contributo tiene conto della forzante, mentre il secondo contributo tiene conto delle condizioni iniziali. Secondo un altro punto di vista, il primo contributo rappresenta l'andamento del sistema a regime, mentre il secondo rappresenta l'andamento del sistema durante il transitorio.

La formula ricavata si usa nel seguente modo. Conoscendo l'andamento della forzante nel tempo è possibile calcolarne la sua laplace trasformata. Dopo di che, si moltiplica la laplace trasformata $F_a(s)$ per la quantità $\frac{1}{m s^2 + c s + k}$; conoscendo le condizioni iniziali, si calcola il termine $\frac{x(0) s + \frac{dx}{dt}(0) + c x(0)}{m s^2 + c s + k}$. Si sommano i termini, ottenendo $X(s)$. $X(s)$ non è altro che la laplace trasformata dell'uscita. Per cui, per trovare l'andamento dell'uscita rispetto al tempo è sufficiente antilaplace trasformare la quantità $x(t) = L^{-1}[X(s)]$.

La quantità

$$G(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k}$$

viene detta *funzione di trasferimento* del sistema. Come si nota, la funzione di trasferimento è funzione solo delle caratteristiche fisiche del sistema e non della forzante (e nemmeno delle condizioni iniziali). La funzione di trasferimento esprime il comportamento dinamico del sistema.

Concretizziamo le idee con un esempio. Supponiamo che la forzante dell'oscillatore smorzato sia una forza unitaria costante nel tempo $f_a(t) = 1$ e che le condizioni iniziali siano $x(0) = 0$ e $\frac{dx}{dt}(0) = 1$. Utilizzando la tabella si ricava che la trasformata della forzante è $F_a(s) = \frac{1}{s}$. L'andamento nella variabile s della posizione della massa è $X(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} \frac{1}{s} + \frac{1}{m s^2 + c s + k}$. Adesso è sufficiente antilaplace trasformare la funzione $X(s)$. Ovviamente non esiste una tabella delle trasformate che possa comprendere tutti i casi possibili. Nel nostro caso, ad esempio, è necessario scomporre la funzione $\frac{1}{m s^2 + c s + k} \frac{1}{s}$ in somma di funzioni di cui sono note le antilaplace trasformate. Per prima cosa bisogna scomporre il denominatore in fattori di primo grado. Trasformiamo il polinomio di secondo grado $m s^2 + c s + k$ in un prodotto di fattori di primo grado $(s - \mu_1)(s - \mu_2)$. μ_1 e μ_2 sono le radici per polinomio e nel nostro caso sono numeri complessi. Le radici vengono chiamate molto spesso *poli* della funzione di trasferimento. Vengono detti anche *autovalori* del sistema. Il loro calcolo fornisce

$$\mu_{1/2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4km}{4m^2}}$$

Le radici sono complesse poiché si è ipotizzato all'inizio che l'oscillatore fosse sovrasmorzato, condizione per cui $\frac{c^2 - 4km}{4m^2} < 0$.

Utilizzando i fattori di primo grado, l'uscita di $X(s)$ dell'oscillatore viene posta nella forma

$$X(s) = \frac{1}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)s} + \frac{1}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)} \quad (12.5)$$

A questo punto è facile scomporre la funzione in somme di addendi in cui il singolo denominatore è un fattore del denominatore della 12.5. Partiamo dalla soluzione a regime

$$\frac{1}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)s} = \frac{A}{(s - \mu_1)} + \frac{B}{(s - \mu_2)} + \frac{C}{s}$$

I coefficienti A, B e C si calcolano facendo il massimo comune multiplo della parte di destra.

$$\begin{aligned} \frac{A}{(s - \mu_1)} + \frac{B}{(s - \mu_2)} + \frac{C}{s} &= \frac{A(s - \mu_2)s + B(s - \mu_1)s + C(s - \mu_1)(s - \mu_2)}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)s} \\ &= \frac{(A + B + C)s^2 + (-\mu_2A - \mu_1B - \mu_1C - \mu_2C)s + C\mu_1\mu_2}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)s} \end{aligned}$$

Il numeratore di questa funzione deve essere uguale ad 1, per cui bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} (A + B + C) = 0 \\ -\mu_2A - \mu_1B - \mu_1C - \mu_2C = 0 \\ C\mu_1\mu_2 = 1 \end{cases}$$

Avendo calcolato i coefficienti è ora possibile antitrasformare la prima parte di $X(s)$.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= L^{-1} \left[\frac{A}{(s - \mu_1)} + \frac{B}{(s - \mu_2)} + \frac{C}{s} \right] = \\ &= L^{-1} \left[\frac{A}{(s - \mu_1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{B}{(s - \mu_2)} \right] + L^{-1} \left[\frac{C}{s} \right] = \\ &= AL^{-1} \left[\frac{1}{(s - \mu_1)} \right] + BL^{-1} \left[\frac{1}{(s - \mu_2)} \right] + CL^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] \end{aligned}$$

A questo punto si può utilizzare la tabella, in particolar modo il risultato $L^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] = e^{at}$. Si conclude

$$x_r(t) = Ae^{\mu_1 t} + Be^{\mu_2 t} + C$$

Nota che, mentre i coefficienti A, B e C sono delle costanti, le quantità $e^{\mu_1 t}$ sono funzioni esponenziali nel tempo. Notare che μ_1 e μ_2 sono quantità complesse, ma, attraverso la combinazione di dei due esponenziali, si può dimostrare che la componente complessa sparisce.

Per quanto riguarda la parte transitoria legata alle condizioni iniziali, ripetendo il ragionamento, si procede con la scomposizione

$$\frac{1}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)} = \frac{\tilde{A}}{(s - \mu_1)} + \frac{\tilde{B}}{(s - \mu_2)}$$

Una volta calcolati i valori di \tilde{A} e \tilde{B} uguagliano i numeratori della formula sopra, si laplacetrasforma ottenendo la soluzione del transitorio

$$x_t(t) = \tilde{A}e^{\mu_1 t} + \tilde{B}e^{\mu_2 t}$$

La soluzione finale è data dai due contributi

$$x(t) = x_r(t) + x_t(t) = Ae^{\mu_1 t} + Be^{\mu_2 t} + C + \tilde{A}e^{\mu_1 t} + \tilde{B}e^{\mu_2 t}$$

In molte circostanze di interesse pratico, il comportamento dinamico del sistema viene analizzato nel caso in cui le condizioni iniziali siano tutte nulle perché la condizione a regime di un sistema rappresenta il comportamento della macchina durante il funzionamento. In questo caso, uguagliando il termine di destra ed il termine di sinistra dell'eq. 12.4, si ottiene

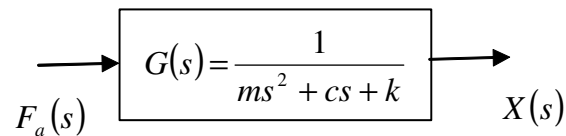
$$m(s^2 X(s)) + c(s X(s)) + k X(s) = F_a(s)$$

Come si può notare, l'equazione ottenuta è una equazione algebrica lineare (non contiene derivate). E' possibile risolvere l'equazione rispetto alla quantità $X(s)$.

$$X(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} F_a(s)$$

ottenendo direttamente la funzione di trasferimento.

Il sistema dell'oscillatore smorzato può essere rappresentato graficamente nel seguente modo

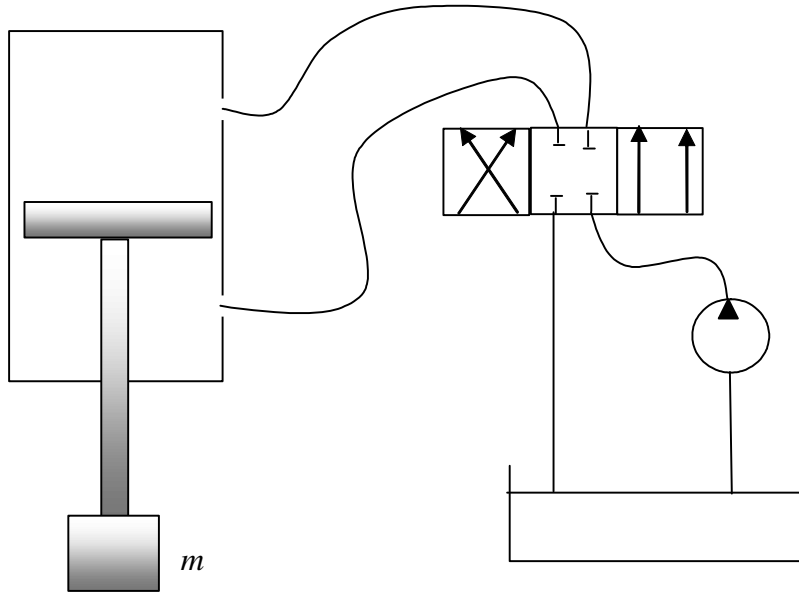


dove la funzione di trasferimento è racchiusa nel blocco e sono presenti un ingresso (la forzante) ed una uscita (la posizione dell'oscillatore). Questo tipo di notazione è la stessa usata nel simulatore dinamico simulik.

Riassumendo, la trasformata di Laplace serve per calcolare l'andamento nel tempo dell'uscita di un sistema dinamico a partire da un ingresso. Il sistema può contenere al suo interno elementi meccanici elettrici ed addirittura software (tutto ciò il cui comportamento dinamico possa essere descritto da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti). Gli ingressi possono essere di diverso tipo. Nel caso pratico interessano alcuni tipi di ingresso molto semplici da descrivere (la cui trasformata di Laplace sia nota e con espressione semplice) come l'ingresso a gradino o la rampa.

12.2 Modellizzazione di un attuatore idraulico

Consideriamo il seguente sistema costituito da un attuatore idraulico accoppiato ad una valvola proporzionale che regola la portata dell'olio nell'attuatore.



Nel meccanismo non sono state inserite le valvole di non ritorno, i filtri e le valvole regolatrici di pressione, elementi necessari per il buon funzionamento del circuito idraulico. Il motivo è che tali elementi esulano da questo corso e quelli rappresentati in figura sono sufficienti per poter abbozzare il modello dell'attuatore idraulico. In figura si vede che le due camere del cilindro sono collegate ad una valvola a 4 vie.

Spostandosi la spoletta della valvola verso sinistra la valvola mette in comunicazione la camera superiore del cilindro con la pressione di mandata fornita dalla pompa; la camera inferiore del cilindro viene messa in comunicazione con la pressione ambiente del serbatoio contenente l'olio. Perciò, quando la spoletta della valvola si sposta verso sinistra, il flusso d'olio tende a spostare verso il basso il pistone. Se la spoletta della valvola si sposta verso destra, l'olio compresso dalla pompa tenderà a fluire all'interno della camera inferiore, sollevando il carico m del pistone.

Quando la posizione della spoletta della valvola è regolata elettronicamente attraverso un solenoide e la regolazione è graduale (non di tipo on-off), la valvola viene detta valvola elettroidraulica proporzionale. Regolando la corrente che passa nel solenoide è possibile aprire in maniera continua le vie che mettono in comunicazione la mandata e lo scarico con le camere del cilindro.

Ricaviamo il modello idraulico del cilindro.

La portata Q è funzione sia della differenza di pressione a monte ed a valle della valvola Δp , sia della apertura della valvola. Solitamente l'apertura della

valvola è proporzionale alla corrente i che fluisce nel solenoide che aziona la valvola. Matematicamente questo è espresso dalla relazione

$$Q = g(\Delta p, i)$$

Poiché le trasformate di Laplace si applicano a sistemi lineari, siamo costretti a linearizzare l'equazione attorno al punto di lavoro. Per semplicità supponiamo che il punto di lavoro sia dato dalla coppia di lavoro $\Delta p = 0$ ed $I = 0$. Linearizzando attorno al punto di lavoro si ottiene

$$\begin{aligned} Q &\simeq \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{\Delta p=0, \Delta I=0} \Delta p + \left(\frac{\partial g}{\partial i} \right)_{\Delta p=0, \Delta I=0} i = \\ &= k_p \Delta p + k_I i \end{aligned} \quad (12.6)$$

Consideriamo ora l'equilibrio dinamico del pistone

$$m \ddot{x} = A \Delta p \quad (12.7)$$

dove A è l'area del cilindro ed x è la posizione del cilindro. (Sono state trascurate le forze gravitazionali). La portata Q può essere posta in funzione della velocità di spostamento del cilindro

$$Q = A \dot{x}$$

Sostituendo l'eq. 12.6 nella 12.7, si ottiene

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= A \left(\frac{Q}{k_p} - \frac{k_I}{k_p} i \right) = \\ &= A \left(\frac{A \dot{x}}{k_p} - \frac{k_I}{k_p} i \right) \end{aligned}$$

L'equazione differenziale è

$$m \ddot{x} - \frac{A^2}{k_p} \dot{x} = -A \frac{k_I}{k_p} i$$

La funzione di trasferimento che lega la posizione del pistone alla corrente del solenoide è

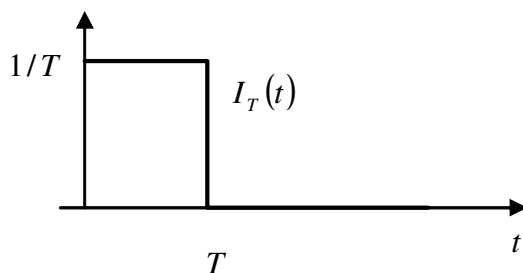
$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-A \frac{k_I}{k_p}}{s \left(m s - \frac{A^2}{k_p} \right)}$$

12.3 Ingresso impulsivo

L'ingresso impulsivo è uno degli ingressi più interessanti, poiché il risultato della laplacetrasmformata è molto semplice. Per definirlo, è necessario introdurre un'ulteriore funzione come nel seguito. Assegnato un certo valore T , consideriamo una funzione nel tempo con la seguente forma

$$I_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases}$$

Questa funzione, rappresentata nella seguente figura



Questa funzione agisce per un tempo pari a T ed in questo tempo agisce con una intensità pari a $\frac{1}{T}$. Notare che l'area sottesa dalla curva ha valore unitario qualsiasi sia il valore di T . Immaginiamo ora di diminuire T . Al limite, per T tendente a zero, si ottiene una funzione che agisce per un istante infinitesimo, ma con una intensità infinita. Ciò che importa è che l'area sottesa rimane sempre costante. Si ottiene quindi un impulso. L'interpretazione fisica dell'ingresso di tipo impulsivo applicato all'oscillatore semplice è quella di una martellata. La martellata agisce per un periodo molto ristretto, ma con una forza molto elevata.

Formalmente la funzione impulsiva è definita nel seguente modo

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} (I_T(t))$$

La trasformata di laplace dell'impulso è

$$\begin{aligned}
L[\delta(t)] &= L\left[\lim_{T \rightarrow 0} (I_T(t))\right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow 0} (L[I_T(t)]) = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} I_T(t) e^{-s t} dt \right) = \\
&= \lim_{T \rightarrow 0} \left(\int_0^T \frac{1}{T} e^{-s t} dt + \int_T^{\infty} 0 \times e^{-s t} dt \right) = \\
&= \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{-s t} dt \right) = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \left(-\frac{e^{-s t}}{s} \Big|_0^T \right) \right) = \\
&= \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \left(-\frac{e^{-s T}}{s} + \frac{1}{s} \right) \right) = \frac{1}{s} \lim_{sT \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-s T}}{T} \right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{sT \rightarrow 0} \left(\frac{s e^{-s T}}{1} \right) = 1
\end{aligned}$$

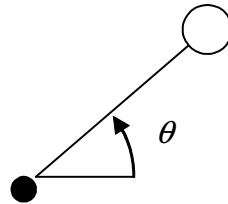
Un sistema dinamico, la cui funzione di trasferimento sia $G(s)$, soggetto ad un ingresso impulsivo unitario è caratterizzato da una uscita $U(s)$ pari a

$$U(s) = G(s) L[\delta(t)] = G(s)$$

Perciò, l'uscita di un sistema soggetto ad un ingresso impulsivo è la funzione di trasferimento stessa.

12.4 Stabilità del sistema

Per spiegare il concetto di stabilità introduciamo un semplice esempio costituito da un pendolo soggetto solamente alla forza di gravità e ad coppia esterna M



L'equilibrio dei momenti rispetto al centro di rotazione fornisce l'equazione dinamica lineare

$$m r^2 \ddot{\theta} + c \dot{\theta} = -mgr \cos(\theta) + M \quad (12.8)$$

Linearizziamo l'equazione dinamica in due punti notevoli, cioè quando il pendolo è disposto verticalmente con la massa in basso e quando il pendolo è

disposto verticalmente con la massa in alto (pendolo inverso). c è un coefficiente di smorzamento che tiene conto degli attriti. Nel primo caso linearizziamo l'equazione attorno al punto di equilibrio $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Il termine $\cos(\theta)$ linearizzato diventa $\cos(\theta) \cong \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})(\theta - (-\frac{\pi}{2})) = (\theta + \frac{\pi}{2})$. Introducendo il cambio di variabile $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, e considerando il fatto che $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$, e che $\ddot{\alpha} = \ddot{\theta}$, sostituendo nella eq. 12.8, si ottiene

$$m r^2 \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + mgr \alpha = M$$

Ripetendo lo stesso ragionamento linearizzando questa volta intorno alla posizione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$m r^2 \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} - mgr \alpha = M$$

Le due funzioni di trasferimento sono rispettivamente

$$G_1(s) = \frac{1}{m r^2 s^2 + c s + mgr}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{m r^2 s^2 + c s - mgr}$$

Le due funzioni di trasferimento sono simili a quella già incontrata dell'oscillatore semplice. Indaghiamo cosa succede se si applica una forzante impulsiva a condizioni iniziali nulle. In entrambi i casi l'ingresso del sistema è rappresentato dalla coppia forzante, mentre l'uscita è la posizione angolare del pendolo. Come è intuitivo il pendolo con la massa in basso si riporta nel punto di equilibrio, mentre il pendolo inverso si allontana dal punto di equilibrio. Si dice che il pendolo inverso è instabile. Vediamo come sia prevedibile l'instabilità del sistema osservando la funzione di trasferimento. Gli andamenti dell'uscita del sistema soggetto alla forzante impulsiva sono nei due casi rispettivamente $\Lambda_1(s) = G_1(s) L[\delta(t)] = G_1(s)$ ed $\Lambda_2(s) = G_2(s) L[\delta(t)] = G_2(s)$ dove $\Lambda(s) = L[\alpha(t)]$. Come visto per l'oscillatore semplice smorzato, la funzione dell'uscita nella variabile s può essere fattorizzata

$$\Lambda_1(s) = \frac{A_1}{(s - \mu_1)} + \frac{B_1}{(s - \mu_2)}$$

$$\Lambda_2(s) = \frac{A_2}{(s - \tilde{\mu}_1)} + \frac{B_2}{(s - \tilde{\mu}_2)}$$

dove

$$\mu_1 = -\frac{c}{2mr^2} + \sqrt{\frac{c^2 - 4gm^2r^3}{4m^2r^4}}, \mu_2 = -\frac{c}{2mr^2} - \sqrt{\frac{c^2 - 4gm^2r^3}{4m^2r^4}}$$

$$\tilde{\mu}_1 = -\frac{c}{2mr^2} + \sqrt{\frac{c^2 + 4gm^2r^3}{4m^2r^4}}, \tilde{\mu}_2 = -\frac{c}{2mr^2} - \sqrt{\frac{c^2 + 4gm^2r^3}{4m^2r^4}}$$

Antilaplace trasformando le uscite si ottiene nei due casi

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= A_1 e^{\mu_1 t} + B_1 e^{\mu_2 t} \\ \alpha(t) &= A_2 e^{\tilde{\mu}_1 t} + B_2 e^{\tilde{\mu}_2 t}\end{aligned}$$

Per focalizzare le idee calcoliamo l'andamento dell'uscita assegnando dei valori numerici ai parametri che definiscono il pendolo. Con i dati $m = 1Kg$; $r = 0,3m$; $g = 9,81m/s^2$; $c = 0,01Ns$ si ottiene

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -0,056 + 3,132 j; & \mu_2 &= -0,056 - 3,132 j \\ \tilde{\mu}_1 &= 3,08; & \tilde{\mu}_2 &= -3,08\end{aligned}$$

L'andamento nel tempo del pendolo con la massa in basso è

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= A_1 e^{\mu_1 t} + B_1 e^{\mu_2 t} = \\ &= A_1 e^{(0,056+3,132 j)t} + B_1 e^{(0,056-3,132 j)t} = \\ &= e^{-0,056 t} (A_1 e^{3,132 j t} + B_1 e^{-3,132 j t}) = \\ &= e^{-0,056 t} (A_1 (\cos(3,132 t) + j \sin(3,132 t)) + B_1 (\cos(3,132 t) - j \sin(3,132 t))) = \\ &= e^{-0,056 t} ((A_1 + B_1) \cos(3,132 t) + (A_1 - B_1) j \sin(3,132 t))\end{aligned}$$

A_1 e B_1 sono costanti da determinare con le condizioni iniziali. In ogni caso, poiché la soluzione nel tempo $\alpha(t)$ deve essere una funzione reale, la quantità $(A_1 - B_1)j$ è reale. Si possono fare le seguenti considerazioni. I poli della funzione di trasferimento sono complessi e coniugati. Ogni zero fornisce un contributo esponenziale nel tempo. Quando si hanno due complessi e coniugati, il loro contributo alla soluzione temporale è dato da un esponenziale ($e^{-0,056 t}$) per una funzione periodica. Dato che l'esponenziale tende a zero, l'intero contributo tenderà a zero. Nell'esempio del pendolo, infatti, il pendolo oscillerà tendendo alla posizione di equilibrio. Si dice che il sistema è stabile o che la funzione di trasferimento è stabile. Notare che, se il numero complesso avesse avuto la parte reale positiva, la parte esponenziale $e^{-0,056 t}$ sarebbe stata $e^{0,056 t}$. In questo caso l'andamento nel tempo della soluzione sarebbe stato quello di una funzione periodica che aumenta all'infinito di ampiezza. Notare che se la parte reale dello zero complesso fosse stata nulla, l'andamento nel tempo della soluzione sarebbe stato quello di una funzione armonica che non si riduce mai di ampiezza. In questo caso si dice che il sistema è semplicemente stabile poiché la soluzione non diverge ma nemmeno tende a zero.

Consideriamo ora il pendolo con la massa in alto. La soluzione è

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= A_2 e^{\tilde{\mu}_1 t} + B_2 e^{\tilde{\mu}_2 t} = \\ &= A_2 e^{3,08t} + B_2 e^{-3,08t}\end{aligned}$$

Si vede in questo caso che un esponenziale tende a zero, mentre l'altro tende all'infinito. Si deduce che quando uno zero di una funzione di trasferimento è positivo, l'andamento nel tempo della soluzione diverge. Il sistema o la funzione di trasferimento viene detta instabile.

Le considerazioni sopra ricavate erano state ottenute considerando un ingresso impulsivo. Utilizzando un altro ingresso si sarebbero ottenuti gli stessi risultati, nel senso che la stabilità di un sistema è determinata esclusivamente dai poli della funzione di trasferimento e non dal tipo di ingresso.

Si è visto che un sistema dinamico è caratterizzato da una funzione di trasferimento che lega l'ingresso all'uscita. Nel caso generale una funzione di trasferimento ha una struttura del tipo

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + b_0}$$

I poli della funzione di trasferimento sono dati dalle radici del denominatore della funzione di trasferimento

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + b_0 = 0$$

Quest'ultima equazione viene detta *equazione caratteristica*. Riassumendo, a seconda del tipo di poli che si ottengono, si hanno 3 casi:

STABILITA' ASINTOTICA

Tutti i poli della funzione di trasferimento devono avere parte reale negativa;
INSTABILITA'

E' sufficiente che almeno uno zero abbia parte reale positiva;

STABILITA' SEMPLICE

Almeno uno zero deve essere puramente complesso (parte reale nulla) ed i rimanenti devono avere parte reale negativa.

12.5 Analisi in frequenza

Per capire come dalla funzione di trasferimento di un sistema sia possibile ricavare informazioni riguardanti il comportamento dinamico, consideriamo un sistema regolato dalla seguente equazione differenziale

$$5 \ddot{x} + 3 \dot{x} + 2 x = f(t) \quad (12.9)$$

Questa equazione differenziale potrebbe rappresentare un sistema meccanico come un sistema elettronico come qualsiasi altro sistema misto. Tralasciando le condizioni iniziali, la funzione di trasferimento che lega l'uscita $X(s) = L[x(t)]$ all'ingresso rappresentato dalla forzante $F(s) = L[f(t)]$ è

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{5s^3 + 3s^2 + 2s + 7}$$

Consideriamo una forzante di tipo armonica del tipo $f(t) = A \cos(\omega t)$. Questo equivale a sollecitare il sistema con una forzante armonica di ampiezza

costante A ed ad una frequenza ω . Ci si chiede come è l'uscita del sistema e come sia possibile ricavarla direttamente dalla funzione di trasferimento.

Introduciamo una notazione complessa per rappresentare la forzante $f(t) = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t})$. L'equazione differenziale 12.9 viene modificata introducendo la forzante complessa $A e^{i\omega t}$. Dell'equazione così ottenuta si cerca una soluzione complessa. Infine, della soluzione complessa, va considerata solamente la parte reale. L'equazione con la forzante complessa è

$$5 \ddot{x} + 3 \dot{x} + 2x + 7x = A e^{i\omega t} \quad (12.10)$$

Proviamo a vedere se ad un ingresso armonico corrisponde una uscita armonica della stessa frequenza (anche se sfasata e con ampiezza diversa). Proviamo quindi a verificare se una soluzione complessa del tipo $x(t) = X e^{i\omega t + \phi}$. X rappresenta l'ampiezza della soluzione (X è un numero reale), mentre ϕ rappresenta lo sfasamento che questa soluzione armonica ha rispetto alla forzante. Intuitivamente ci si aspetta che ϕ abbia un valore negativo, nel senso che la soluzione deve sempre essere sfasata in ritardo rispetto alla forzante. Sostituendo questa soluzione nella eq. 12.10, si ottiene

$$5 \left((i\omega)^3 X e^{i\omega t + \phi} \right) + 3 \left((i\omega)^2 X e^{i\omega t + \phi} \right) + 2 \left((i\omega) X e^{i\omega t + \phi} \right) + 7 \left(X e^{i\omega t + \phi} \right) = A e^{i\omega t}$$

Semplificando la quantità $e^{i\omega t}$ si ottiene

$$\frac{X}{A} e^{i\phi} = \frac{1}{5 (i\omega)^3 + 3 (i\omega)^2 + 2 (i\omega) + 7}$$

Notare che il termine di destra non è altro che la funzione di trasferimento $G(s)$ dove al posto della variabile s si sostituisce la quantità complessa $(i\omega)$, perciò

$$\frac{X}{A} e^{i\phi} = G(i\omega) \quad (12.11)$$

Poiché $|e^{i\phi}| = 1$, si deduce

$$\begin{aligned} \left| \frac{X}{A} e^{i\phi} \right| &= |G(i\omega)| \\ &\Rightarrow \\ \frac{X}{A} &= |G(i\omega)| \end{aligned}$$

Questo è il primo importante risultato. Il rapporto dell'ampiezza dell'uscita rispetto all'ampiezza dell'ingresso (cioè della forzante) è dato dal modulo della funzione di trasferimento in cui alla variabile s si sostituisce la quantità $i\omega$.

Cerchiamo ora di capire se dalla funzione di trasferimento si riesce a capire di quanto è sfasata l'uscita rispetto all'ingresso.

Consideriamo per questo scopo le parti reali ed immaginarie della eq. 12.11

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{X}{A}e^{i\phi}\right) &= \operatorname{Re}(G(i\omega)) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{X}{A}e^{i\phi}\right) &= \operatorname{Im}(G(i\omega)) \\ &\Rightarrow \\ \frac{X}{A}\cos(\phi) &= \operatorname{Re}(G(i\omega)) \\ \frac{X}{A}\sin(\phi) &= \operatorname{Im}(G(i\omega))\end{aligned}$$

Dividendo le ultime due relazioni si ottiene

$$\tan(\phi) = \frac{\operatorname{Im}(G(i\omega))}{\operatorname{Re}(G(i\omega))}$$

cioè lo sfasamento è dato da $\phi = \arctan 2\left(\frac{\operatorname{Im}(G(i\omega))}{\operatorname{Re}(G(i\omega))}\right) = \arg(G(i\omega))$. Perciò lo sfasamento è dato dall'angolo che il vettore determinato dalla funzione di trasferimento ad una certa ω , forma con l'asse reale. Solo la parte reale della soluzione così ottenuta va presa in considerazione. In conclusione

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}(X e^{i\omega t + \phi}) = \operatorname{Re}(|G(i\omega)| A e^{i\omega t + \phi}) = \\ &= |G(i\omega)| A \cos(\omega t + \phi) = \\ &= |G(i\omega)| A \cos(\omega t + \arg(G(i\omega)))\end{aligned}$$

Si vede come l'uscita sia armonica (coseno) e l'ampiezza della forzante A risulti amplificata della quantità $|G(i\omega)|$. L'uscita inoltre ha la stessa pulsazione ω dell'ingresso ma risulta essere sfasata della quantità $\arg(G(i\omega))$. In genere lo sfasamento è sempre negativo, poiché l'uscita è in ritardo rispetto all'ingresso.

ESEMPIO

Consideriamo il comportamento dinamico in frequenza di un motore elettrico con un carico applicato. In prima approssimazione, la coppia prodotta dal motore elettrico è proporzionale alla corrente erogata $T = k_i i$. La coppia andrà ad agire sul rotore del motore al quale è calettata l'inerzia del carico. Se indichiamo con ϑ la posizione angolare del rotore del motore, e con b il coefficiente di viscosità con cui si caratterizza l'attrito viscoso presente nel sistema, l'equilibrio dinamico è rappresentato da

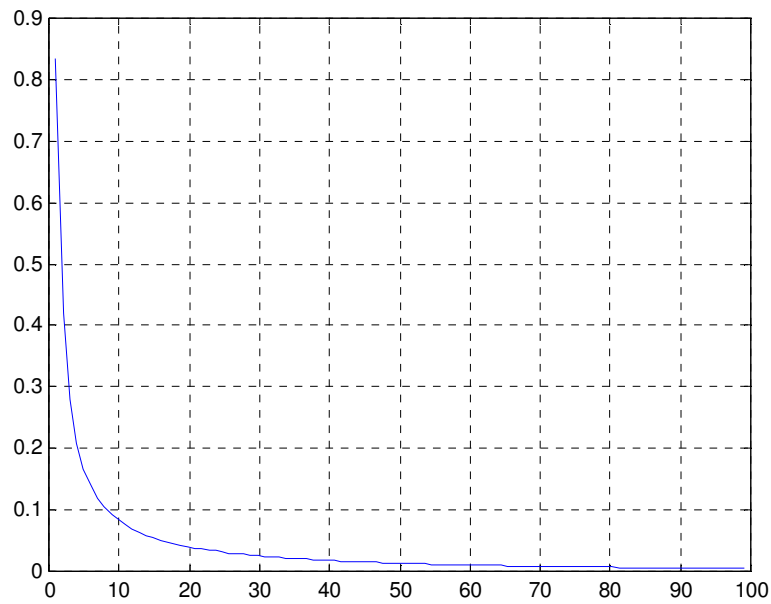
$$J \ddot{\vartheta} + b \dot{\vartheta} = T = k_i i$$

dove J è l'inerzia complessiva del sistema.

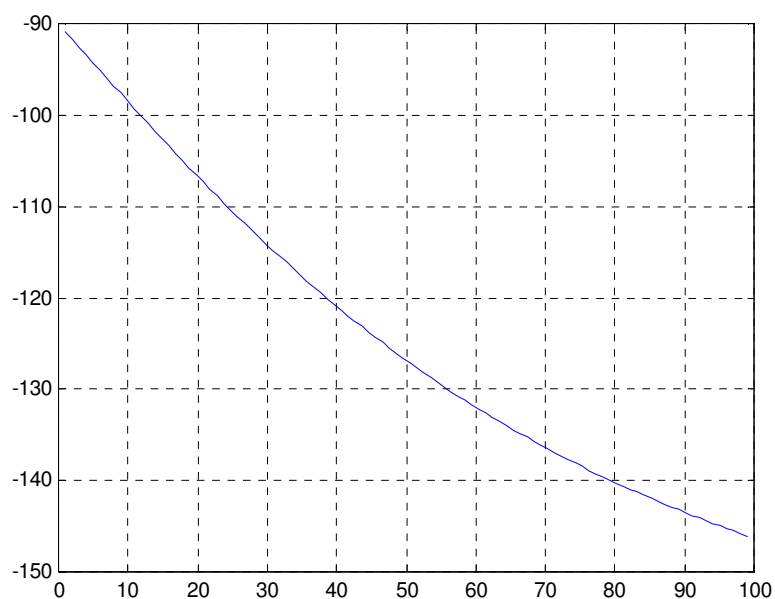
Laplace trasformando, si ottiene la funzione di trasferimento che lega l'ingresso di corrente all'uscita (la posizione angolare)

$$\frac{\theta}{I} = G(s) = \frac{k_i}{s(Js + b)}$$

Consideriamo il seguente esempio numerico $k_i = 5 \text{ Nm/A}$; $J = 0,09 \text{ kgm}^2$; $b = 6 \text{ Nms}$; L'andamento del guadagno della funzione di trasferimento $|G(i\omega)|$ in funzione della frequenza, partendo da una frequenza minima di 1 rad/s è



Mentre l'andamento dello sfasamento $\phi = \arctan 2 \left(\frac{\text{Im}(G(i\omega))}{\text{Re}(G(i\omega))} \right)$ è

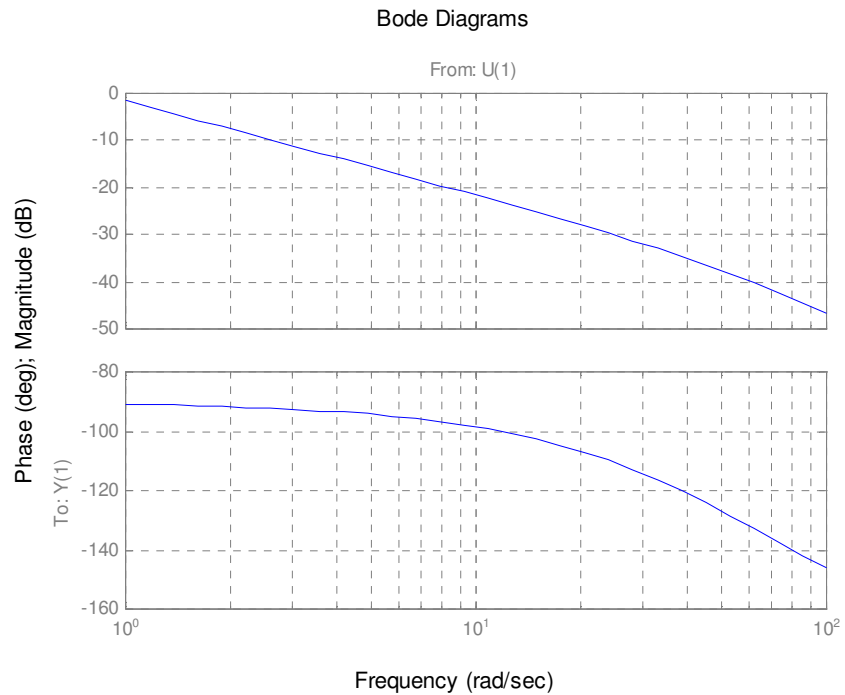


Notare come lo sfasamento è negativo. Lo sfasamento è misurato in radianti.

Si usa molto spesso esprimere il guadagno $|G(i\omega)|$ in termini di *guadagno logaritmico* utilizzando la relazione

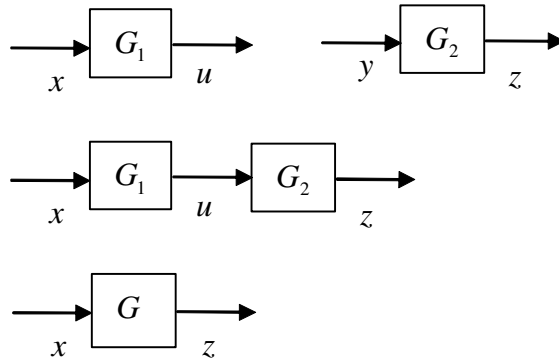
$$\text{Guadagno logaritmico} = 20 \log_{10} |G(i\omega)|$$

Le unità di misura del guadagno logaritmico è il *decibel* [Db]. In tale senso, molto utilizzati sono i diagrammi di bode che esprimono il guadagno logaritmico e la fase in funzione del logaritmico della frequenza come nel seguente esempio



12.6 Interconnessione di sistemi

Si è visto come la funzione di trasferimento esprime il legame tra un ingresso ed una uscita. Tale relazione è rappresentabile graficamente attraverso uno schema con un blocco in cui sono messi in evidenza l'ingresso e l'uscita attraverso delle frecce. Consideriamo ora il caso in cui l'ingresso y di una funzione di trasferimento G_1 sia l'uscita u di un'altra funzione di trasferimento G_2 .

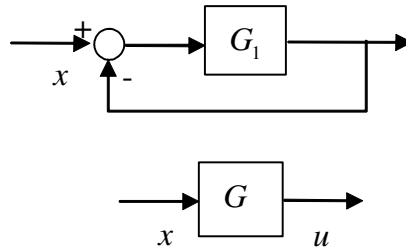


Il legame espresso dalle due funzioni di trasferimento è il seguente: $z = G_2 y$ ed $u = G_1 x$. Se si connettono l'uscita del primo blocco con l'ingresso del

secondo, le due funzioni di trasferimento possono essere sostituite da un'unica funzione di trasferimento G che risulta essere il prodotto delle due. Infatti, $z = G_2 y = G_2 u = G_2 (G_1 x) = G_2 G_1 x$, per cui, il legame tra l'uscita dei due blocchi connessi e l'ingresso è dato da

$$G = \frac{z}{x} = G_2 G_1$$

Consideriamo ora una funzione di trasferimento in cui l'uscita viene sottratta all'ingresso secondo lo schema seguente



Il segnale negativo che ritorna all'ingresso della funzione di trasferimento viene detto *feedback* o *retroazione*. Anche in questo caso il sistema interconnesso può essere sostituito con un unico blocco. La funzione di trasferimento di questo blocco dovrà fornire lo stesso legame tra ingresso x ed uscita u del blocco interconnesso. Questo legame è rappresentato attraverso la seguente relazione

$$\begin{aligned} u &= G_1 (x - u) \\ \Rightarrow \\ u &= \frac{G_1}{1 + G_1} x \end{aligned}$$

Perciò la funzione di trasferimento del blocco equivalente è $G = \frac{G_1}{1 + G_1}$.

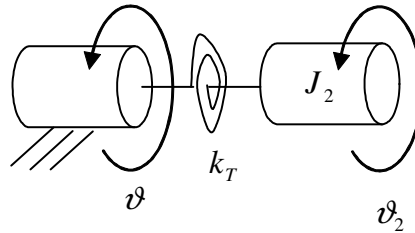
12.7 Controllo

Introduciamo il concetto con un parallelo pratico. Supponiamo di voler regolare la temperatura dell'acqua calda secondo il nostro piacimento. La prima cosa che facciamo è aprire il rubinetto dell'acqua calda. Dopodichè sondiamo la temperatura con la mano. Se la temperatura è più bassa di quella desiderata, si interviene aprendo di più il rubinetto. Se si raggiunge una temperatura troppo elevata, si tende a chiudere il rubinetto, e così via, finchè non si raggiunge la temperatura desiderata. Ciò che abbiamo fatto è stato controllare la temperatura dell'acqua.

Da questo semplice esempio si capisce che in un sistema di controllo automatico deve essere presente:

- un sensore che tenga monitorata la variabile da controllare (temperatura reale dell'acqua);
- una grandezza controllante (la portata dell'acqua).

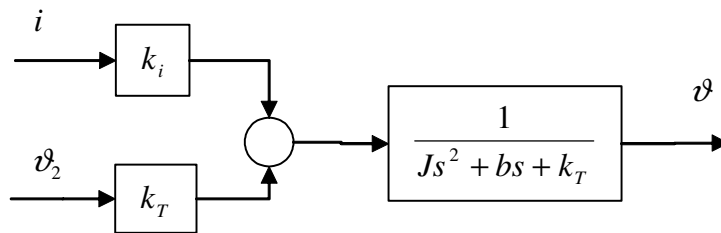
Consideriamo ora un esempio meccanico consistente in un motore elettrico a corrente continua, che aziona un carico di inerzia costante. Tra il carico ed il motore elettrico è presente un giunto elastico la cui costante elastica torsionale è k_T . Il meccanismo è schematizzato come segue



L'equilibrio dinamico dei momenti rispetto all'asse di rotazione prendendo in considerazione solo il motore è

$$J \ddot{\vartheta} + b \dot{\vartheta} + k_T (\vartheta - \vartheta_2) = T \tag{12.12}$$

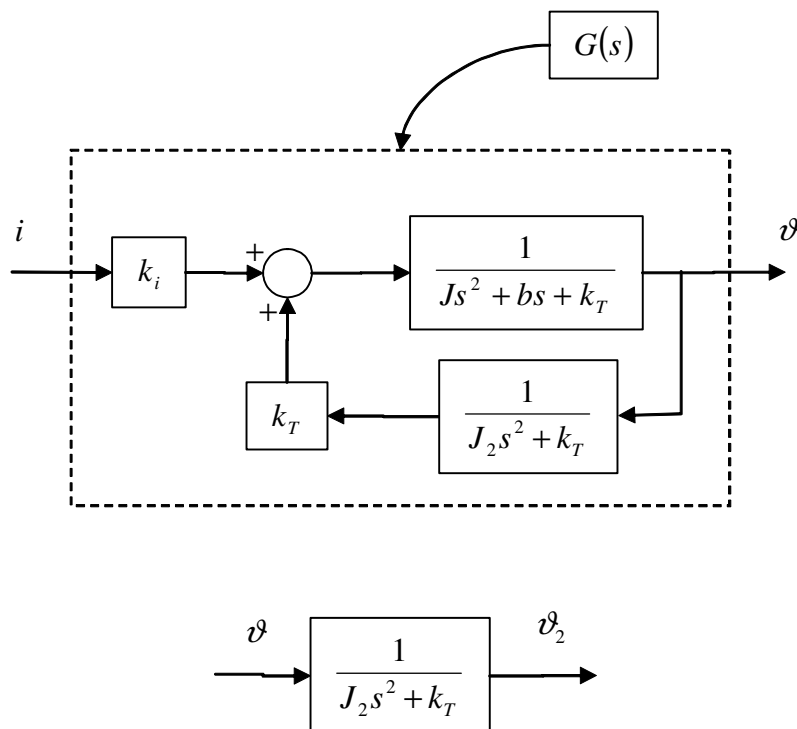
dove J è il momento d'inerzia del rotore del motore, $b \dot{\vartheta}$ è una forza viscosa che rappresenta l'attrito che agisce sul motore (nota che è proporzionale alla velocità); $k_T (\vartheta - \vartheta_2)$ è la forza elastica che agisce sul rotore del motore. T è la coppia generata dal motore. Tale coppia è proporzionale alla corrente i che percorre gli avvolgimenti del motore, cioè $T = k_i i$. Laplacetrasformando ed utilizzando gli schemi a blocchi, l'equazione 12.12 è rappresentabile dal seguente schema



L'equilibrio dinamico dei momenti rispetto all'asse di rotazione prendendo in considerazione il carico è

$$J_2 \ddot{\vartheta}_2 + k_T (\vartheta_2 - \vartheta) = 0$$

dove J_2 è il momento d'inerzia del carico; $k_T (\vartheta_2 - \vartheta)$ è la forza elastica che agisce sul carico. la funzione di trasferimento che si ricava da questa seconda equazione è rappresentata dal seguente schema



Mettendo assieme i due schemi si ottiene il legame tra l'ingresso della corrente i e la posizione del motore ϑ .

Utilizzando le proprietà delle interconnessioni degli schemi a blocchi si può ottenere un'unica funzione di trasferimento che rappresenta il comportamento dinamico degli schemi a blocchi contenuti nel parallelepipedo tratteggiato. La funzione di trasferimento esprime il legame $\vartheta = G i$. (In tutte le notazioni si è usato lo stesso simbolo sia per esprimere sia funzioni definite nel tempo che le loro laplacetransformate).

Supponiamo ora di forzare il sistema affinché il motore assuma la posizione angolare ϑ_r . Tale posizione (che è una posizione ideale) è detta *riferimento* in termini controllistici. Ritornano al parallelo con l'acqua calda, in quel caso il riferimento era rappresentato dalla temperatura ideale che l'operatore tentava di raggiungere attraverso le varie regolazioni.

Ponendo un sensore calettato sull'albero del motore elettrico è possibile conoscere istante per istante la posizione angolare ϑ del motore elettrico. E' possibile inserire un sistema analogico o digitale (detto *controllo* o *controllore*) che svolga le seguenti funzioni:

- se il segnale ϑ è minore del riferimento desiderato ϑ_r il controllo fornisce una corrente positiva al motore in maniera tale che ϑ aumenti e si avvicini a ϑ_r ;
- se il segnale ϑ è maggiore del riferimento desiderato ϑ_r il controllo fornisce una corrente negativa al motore in maniera tale che ϑ diminuisca e si avvicini a ϑ_r ;

- il modulo della corrente fornita dal controllo (positiva o negativa) deve essere tanto maggiore tanto più grande è l'errore $\vartheta_r - \vartheta$. Matematicamente il controllore fornisce una corrente secondo la legge

$$i = k_P e = k_P (\vartheta_r - \vartheta)$$

dove la costante k_P è detta *guadagno proporzionale*.

Aumentando il guadagno proporzionale il controllore risulta essere più pronto, ma contemporaneamente aumenta la *sovraelongazione*.

Il controllore più utilizzato industrialmente detto PID, è rappresentato dalla seguente relazione tra la corrente erogata e l'errore $e = (\vartheta_r - \vartheta)$

$$i = k_P e + k_D \dot{e} + k_I \int e$$

dove k_D è detto *guadagno derivativo* e k_I è detto *guadagno integrativo*.