MODELLO DI SOPRAVVIVENZA CONTINUO

Sia

T n.a. non negativo che esprime la durata aleatoria da un istante iniziale fino al verificarsi di un determinato evento

Esempi:

- durata di funzionamento di un'apparecchiatura dall'istante di accensione in cui l'apparecchiatura inizia a funzionare
- durata di vita di una cavia dall'istante di somministrazione di una determinata sostanza
- durata di vita dall'istante in cui ad un soggetto è diagnosticata una certa malattia
- durata di vita dalla nascita; in tal caso la durata esprime anche l'età raggiunta

Si indica con 0 l'istante iniziale

T ha determinazioni: $t > 0$

T ha supporto $[0,+\infty[$

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $S(t) = P(T > t), \quad t \geq 0$

Si ha

- $S(0) = P(T > 0) = 1$
- $S(t)$ è una funzione non crescente: se $t_1 < t_2$ allora $S(t_1) \geq S(t_2)$
- $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$, se si esclude l'esistenza di masse aderenti a $+\infty$

Si definisce

Funzione di ripartizione $F(t) = P(T \leq t)$

Poiché:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - S(t)$$

per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalente assegnare la funzione di ripartizione oppure la funzione di sopravvivenza

Se la distribuzione del n.a. T è dotata di funzione di densità $f(t)$ continua si ha:

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \qquad S(t) = 1 - F(t) = \int_t^{+\infty} f(u)du$$

inoltre

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}S(t)$$

Quindi, per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalente assegnare la funzione di ripartizione, oppure la funzione di sopravvivenza, oppure la funzione di densità

Si definisce

Funzione di rischio o hazard function $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t}$$

Si ha

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad \text{da cui} \qquad f(t) = S(t)\lambda(t)$$

Osservazione: interpretazione del significato di $\lambda(t)$

Essendo la distribuzione del n.a. T dotata di densità $f(t)$ continua si ha:

$$P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t) = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{S(t)} = \frac{f(t)\Delta t + o(\Delta t)}{S(t)} \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo

$$P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t) \cong \frac{f(t)}{S(t)} \Delta t = \lambda(t)\Delta t$$

$\lambda(t)$ misura l'intensità istantanea dei decessi all'istante t per gli individui in vita fino all'istante t

Si ha inoltre

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(S(t))$$

quindi, assegnata $S(t)$ si determina $\lambda(t)$

Essendo $f(t)$ continua, vale anche viceversa, infatti integrando si ottiene

$$\int_0^t \lambda(u)du = -\ln(S(t))$$

da cui si ottiene

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)$$

In tali ipotesi è allora equivalente assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T assegnando la funzione di sopravvivenza oppure la funzione di rischio

Si definisce

Funzione di rischio integrato $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$

Si ha allora

$$S(t) = \exp(-\Lambda(t))$$