

TAVOLE DI MORTALITÀ

In ambito attuariale la funzione di sopravvivenza è generalmente descritta mediante una **tavola di mortalità** o **tavola di sopravvivenza**.

La tavola di sopravvivenza può essere interpretata come la tabulazione sugli interi di una funzione di sopravvivenza $S(x)$ definita per $x \geq 0$, quindi di tipo continuo.

x	$S(x)$
0	1
1	0,99172
2	0,99105
\vdots	\vdots
$\omega - 1$	0,00015
ω	0

ω è detta età estrema ed è tale che $S(\omega - 1) > 0$ ed $S(\omega) = 0$

Definiamo le grandezze che compaiono in una tavola di sopravvivenza.

Tavole di mortalità

x	l_x	d_x	q_x	L_x	m_x	T_x	${}^o e_x$
0	100.000	828	0,008280	99.586,00	0,008314	7.881.389,00	78,81
1	99.172	67	0,000676	99.138,50	0,000676	7.781.803,00	78,47
2	99.105	42	0,000424	99.084,00	0,000424	7.682.664,50	77,52
3	99.063	32	0,000323	99.047,00	0,000323	7.583.580,50	76,55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
109	30	15	0,500000	22,50	0,666667	30,00	1,00
110	15	15	1,000000	7,50	2,000000	7,50	0,50
111	0						

Si definiscono le seguenti grandezze

Def.
$$l_x = l_0 S(x) \quad x = 0, 1, \dots, \omega$$

dove l_0 è detto radice della tavola ed è fissato opportunamente, per esempio $l_0 = 100.000$

l_x è il numero atteso di individui in vita all'età x , a partire da una collettività di l_0 neonati, nell'ipotesi di durate di vita con uguale distribuzione e funzione di sopravvivenza $S(x)$

Def.
$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad x = 0, 1, \dots, \omega$$

d_x è il numero atteso di decessi nell'intervallo di età $]x, x + 1]$

Tavole di mortalità

Si ha

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Per definire le seguenti grandezze

$$L_x \quad m_x \quad T_x \quad \overset{o}{e}_x$$

occorre assumere che la distribuzione di probabilità, espressa attraverso la funzione di sopravvivenza $S(x)$, $x \geq 0$, sia dotata di funzione di densità continua

Si ha allora

$$f_0(x) = -\frac{d}{dx} S(x) = -\frac{d}{dx} l_x \quad \mu(x) = \frac{f_0(x)}{S(x)} = -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x$$
$$f_x(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_x = -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dt} l_{x+t} \quad \mu(x+t) = \frac{f_x(t)}{{}_t p_x} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{d}{dt} l_{x+t}$$

e da queste si può calcolare la vita media alla nascita \bar{e}_0 e la vita media residua \bar{e}_x di un individuo di età x

Tavole di mortalità

Si ha

$$\bar{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x) dx = \int_0^{\omega} \frac{l_x}{l_0} dx = \frac{\int_0^{\omega} l_x dx}{l_0}$$

Si definisce

Def.
$$T_0 = \int_0^{\omega} l_x dx$$

Poiché

$$\bar{e}_0 = \frac{T_0}{l_0}$$

esprime la vita media alla nascita, allora

T_0 (NB: da non confondere con il n.a. durata aleatoria di vita alla nascita) rappresenta il numero atteso di anni vissuti da una collettività di l_0 neonati

Tavole di mortalità

Analogamente si ha

$$\bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \frac{\int_0^{\omega-x} l_{x+t} dt}{l_x} = \frac{\int_x^{\omega} l_y dy}{l_x}$$

Si definisce

Def.
$$T_x = \int_x^{\omega} l_y dy$$

Poiché

$$\bar{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

esprime la vita media residua di un individuo di età x , allora

T_x (NB: da non confondere con il n.a. durata aleatoria di vita per un individuo di età x)
rappresenta il numero atteso di anni vissuti da una collettività di l_x individui di età x

Tavole di mortalità

Per il tasso centrale di mortalità relativo all'intervallo di età $(x, x+1)$ si ha

$$m_x = \frac{\int_0^1 \mu(x+t)S(x+t) dt}{\int_0^1 S(x+t) dt} = \frac{\int_0^1 f_0(x+t) dt}{\int_0^1 S(x+t) dt} = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+t) dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t} dt}$$

Si definisce

Def.
$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

Poiché

$$L_x = T_x - T_{x+1}$$

L_x esprime il numero atteso di anni vissuti da una popolazione di l_x individui di età x , tra le età x ed $x+1$

Si ha allora

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Osservazione: poiché nella tavola di sopravvivenza la funzione $S(x)$ è definita sugli interi $x = 0, 1, \dots, \omega$, per calcolare

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

occorre approssimare l'integrale.

Se si approssima l'integrale mediante l'area del trapezio, ovvero si considera l'interpolante lineare per definire la funzione l_{x+t} per $t \in (0,1)$, si ottiene la seguente approssimazione

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Essendo inoltre $T_x = \int_x^\omega l_y dy = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{\omega-1}$

si ottiene la seguente approssimazione

$$T_x \cong \sum_{h=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+h} + l_{x+h+1}}{2}$$

e quindi l'approssimazione della vita media residua \bar{e}_x mediante la **vita media completa**

$$e_x^o = \frac{1}{l_x} \sum_{h=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+h} + l_{x+h+1}}{2}$$

Osservazione

poiché si ha

$$S(x) = \frac{S(x)}{S(x-1)} \cdot \frac{S(x-1)}{S(x-2)} \cdot \dots \cdot \frac{S(1)}{S(0)} \quad \text{per } x = 0, 1, \dots, \omega$$

ed essendo

$$\frac{S(x)}{S(x-1)} = \frac{P(T_0 > x)}{P(T_0 > x-1)} = \frac{P(T_0 > x, T_0 > x-1)}{P(T_0 > x-1)} = P(T_0 > x | T_0 > x-1) = p_{x-1}$$

per $x = 0, 1, \dots, \omega$

si ottiene

$$S(x) = p_{x-1} \cdot p_{x-2} \cdot \dots \cdot p_0 \quad \text{per } x = 1, 2, \dots, \omega - 1$$

Quindi la stima della funzione di sopravvivenza, in un modello non parametrico, potrà essere ottenuta mediante la stima delle probabilità condizionate di sopravvivenza p_x , ovvero mediante la stima delle probabilità condizionate di decesso q_x .