

Cos'è una logica ? (06/03/2019 —)

Eugenio G. Omodeo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

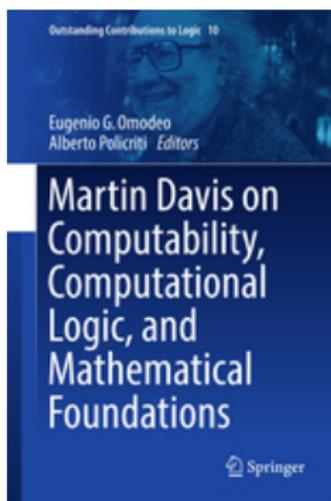
Sulla scorta di [Davis(1993)], mettiamo in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme A di *premesse* e una *conclusione* α in una logica \mathbb{L} che ci permetta di ricavare (o 'derivare', o 'inferire') α da A ; in simboli:

$$A \vdash \alpha$$



“A logic L is determined by a nonempty set E of elements together with a relation \vdash . For a subset A of E and an element α of E “ $A \vdash \alpha$ ” is a statement which may be true or false. (We may think of “ $A \vdash \alpha$ ” as asserting that α is a “logical consequence” of the premises A .)”

[Davis(1993), pag. 1]



DEFINIZIONE

Una *logica* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme $\mathcal{E} \neq \emptyset$ i cui elementi si chiamano *enunciati* e da
- una relazione diadica \vdash , chiamata *derivabilità*, tale che

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \supseteq \vdash$$

soddisfacenti le condizioni:

- L1. $\{\alpha\} \vdash \alpha$;
- L2. (**Monotonicità**) quando $A \vdash \alpha$, si ha che $B \vdash \alpha$ per ogni insieme di enunciati $B \supseteq A$;
- L3. (**Compattezza**) quando $A \vdash \alpha$, si ha che $F \vdash \alpha$ per qualche insieme finito F tale che $A \supseteq F$;
- L4. (**Taglio**) quando $A \vdash \alpha$ e $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, allora $A \cup B \vdash \beta$.

RIESTE

L1. Ogni enunciato segue da se stesso



- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.



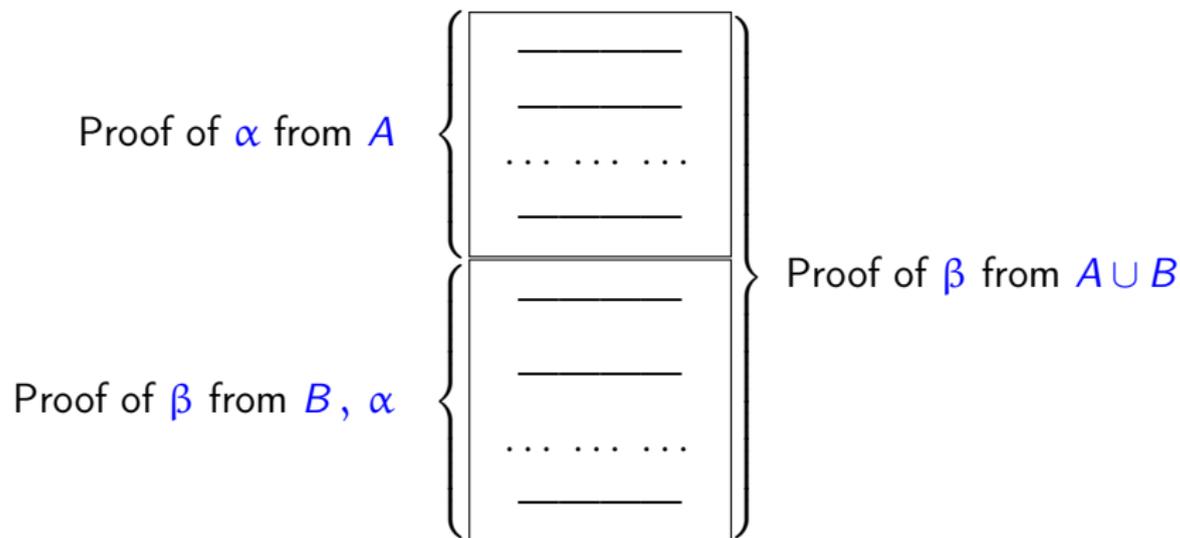
- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- L3. Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.



- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- L3. Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.
- L4. Da una dimostrazione si può cancellare una premessa α , a patto però di rimpiazzare α con un insieme A di premesse da cui α stessa è deducibile.



SCHEMATIZZAZIONE DELLA REGOLA DEL TAGLIO



(da [Davis(1993), pag. 2])



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{J} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{J}}$ definita per tutti gli enunciati α , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{I} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{I}}$ definita per tutti gli enunciati α , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

la relazione \models definita così:

$$A \models \vartheta \quad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathcal{I}} = \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathcal{I} \text{ tale che } \{ \alpha^{\mathcal{I}} : \alpha \in A \} = \{ \mathbf{v} \}$$



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{I} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{I}}$ definita per tutti gli enunciati α , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

Gode della compattezza la relazione \models definita così:

$$A \models \vartheta \quad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathcal{I}} = \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathcal{I} \text{ tale che } \{ \alpha^{\mathcal{I}} : \alpha \in A \} = \{ \mathbf{v} \}$$

?



È QUELLA INTRODOTTA LA VOLTA SCORSA È UNA LOGICA?

Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Diremo che la sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è una **dimostrazione** di ϑ da A quando:

- 1) $\delta_h = \vartheta$;
- 2) per ogni $i = 0, \dots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in \mathcal{P} che o:
 - ★ appartiene ad A , oppure
 - ★ ricade in uno degli schemi d'*assioma logico*, oppure
 - ★ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria'

DEFINIZIONE

In una logica \mathbb{L} :



La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria' (si pensi ad A come a un insieme di postulati):

DEFINIZIONE

In una logica \mathbb{L} :

- Un insieme A di enunciati si dice *inconsistente* se $A \vdash \alpha$ vale per ogni enunciato α ; si dice *consistente*, se ciò non avviene.



La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria'

DEFINIZIONE

In una logica \mathbb{L} :

- Un insieme A di enunciati si dice *inconsistente* se $A \vdash \alpha$ vale per ogni enunciato α ; si dice *consistente*, se ciò non avviene.
- \mathbb{L} stessa si dice *inconsistente* quando in \mathbb{L} è inconsistente lo \emptyset (cioè, se in \mathbb{L} ogni enunciato è derivabile da \emptyset);
consistente, nel caso opposto.



DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

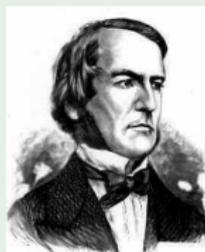
costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

soddisfacenti le condizioni:

B1. (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$



George Boole
1815–1864

DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

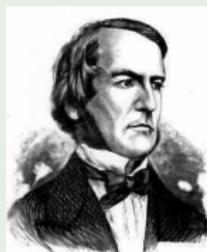
soddisfacenti le condizioni:

B1. (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

B2. (Principio di doppia negazione)

$$\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$$



George Boole
1815–1864

DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica (\mathcal{E}, \vdash) ,
- un elemento f di \mathcal{E} ,
- un'operazione diadica \Rightarrow su \mathcal{E}

soddisfacenti le condizioni:

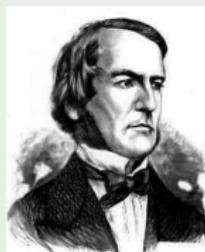
B1. (Principio di deduzione)

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

B2. (Principio di doppia negazione) $\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$

L'operazione \Rightarrow , e il suo primo e secondo operando, si chiamano: **implicazione materiale**,

antecedente e conseguente.



George Boole
1815–1864

OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di A , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$



ESERCIZIO

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato α :

$$\{f\} \vdash \alpha$$

OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di A , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$



ESERCIZIO

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato α :

$$\{f\} \vdash \alpha$$

OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di A , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$

ESERCIZIO

Mostrare l'*inconsistenza* della logica booleana che ha $\mathcal{E} = \{f\}$

ESERCIZIO (?)

Si dimostri che c'è una logica booleana consistente il cui \mathcal{E} è formato di due soli elementi: **f** e **v**; e che in tale logica la tabella dell'operazione \Rightarrow non può essere che questa:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

e che $A \vdash \alpha$ varrà se e solo se α appartiene ad $A \cup \{\mathbf{v}\}$.

Osservazione: $\alpha \Rightarrow \mathbf{f}$ in un certo senso 'nega' α



D'ora in poi indicheremo con \mathbb{P}_0 la logica individuata sopra:

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow).$$

Intuitivamente parlando, \mathbf{f} e \mathbf{v} rappresentano il *falso* e il *vero* e l'operazione \Rightarrow il connettivo “se ... allora ...”.



PER COMODITÀ SI USA SCRIVERE:



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$A \not\vdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ non è vera;



$A \not\vdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ *non* è vera;

$A, \alpha \vdash \beta$ per indicare che $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;



- $A \not\vdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ non è vera;
- $A, \alpha \vdash \beta$ per indicare che $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ per indicare che $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$.



$A \not\vdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ non è vera;

$A, \alpha \vdash \beta$ per indicare che $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ per indicare che $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$.

In quest'ultima, n è un qualsiasi numero naturale; dunque

$\vdash \beta$ sta per $\emptyset \vdash \beta$.



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$f \vdash f$$

ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$f \vdash f \quad (L1)$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{array}{l} f \vdash f \\ \therefore f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \end{array}$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\therefore \quad f \vdash f$$
$$\therefore \quad f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \quad (\text{monotonicità, } L2)$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \end{aligned}$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \quad (\text{deduzione, } B1) \end{aligned}$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \therefore & f \vdash \alpha \end{aligned}$$



ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α :

$$f \vdash \alpha .$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \therefore & f \vdash \alpha \quad (\text{doppia negazione, } B2; \text{ taglio, } L4) \end{aligned}$$



ESERCIZIO SUL MODUS PONENS

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;
- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.

ESERCIZIO SULL'ESTENSIONE CONSISTENTE

Dimostrare che quando in una logica booleana vale $A \not\vdash \beta$, allora l'insieme $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$ è consistente.



In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

DEFINIZIONE



In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

DEFINIZIONE

Sia \mathbb{L} una logica booleana ed M un insieme di enunciati di \mathbb{L} . Diremo che M è *consistente massimale* se:

- M è consistente;
- $M \cup \{\alpha\}$ è inconsistente per ogni enunc. α che non stia in M .



TEOREMA DI LINDENBAUM

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

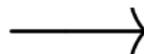


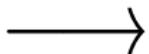
TEOREMA DI LINDENBAUM

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

Dim. (traccia): Ci viene dato un A consistente e vogliamo trovare un $M \supseteq A$ che sia consistente massimale. Per semplicità (altrimenti converrebbe ricorrere al lemma di Zorn) supponiamo che l'intero insieme degli enunciati possa essere disposto in una successione—ove le ripetizioni sono ammesse:

$$\mathcal{E} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} .$$





Poniamo

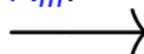
$$A_0 =_{\text{Def}} A;$$

$$A_{n+1} =_{\text{Def}} \begin{cases} A_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se quest'insieme è consistente,} \\ A_n & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

Cosí, induttivamente, tutti gli A_i risultano consistenti. Da ultimo poniamo

$$M =_{\text{Def}} A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots;$$

i.e., un enunciato α appartenga ad M sse α sta in qualche A_m .



Se M fosse inconsistente, avremmo $M \vdash f$ per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza $L3$, vi sarebbero $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k}$ in numero finito, ciascuno appartenente ad M e tali che

$$\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k} \vdash f ;$$

ma allora ciascun α_{n_i} apparterrebbe ad A_{m_i} per qualche m_i e tutti apparterrebbero ad A_m , ove $m = \max \{m_1, \dots, m_k\}$; con ciò risulterebbe che A_m è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque M è consistente.



Se M fosse inconsistente, avremmo $M \vdash f$ per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza $L3$, vi sarebbero $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k}$ in numero finito, ciascuno appartenente ad M e tali che

$$\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k} \vdash f ;$$

ma allora ciascun α_{n_i} apparterrebbe ad A_{m_i} per qualche m_i e tutti apparterrebbero ad A_m , ove $m = \max \{m_1, \dots, m_k\}$; con ciò risulterebbe che A_m è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque M è consistente.

Per verificare la *massimalità* di M , proviamo a supporre che $M \cup \{\alpha\}$ sia consistente per qualche α non appartenente ad M .

Allora, individuato il primo n per cui valga $\alpha = \alpha_n$, avremmo anche la consistenza di $A_n \cup \{\alpha_n\}$. Ma allora dovrebbe valere

$M \supseteq A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha\}$ per definizione, donde la contraddizione cercata.



“La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata.”

[Wittgenstein(1922), 6.1262]



Ludwig Wittgenstein

Vienna 1889–Cambridge 1951



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

COSA S'INTENDE PER TAUTOLOGIA ?

“La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata.”

Fuorviante ?!

[Wittgenstein(1922), 6.1262]



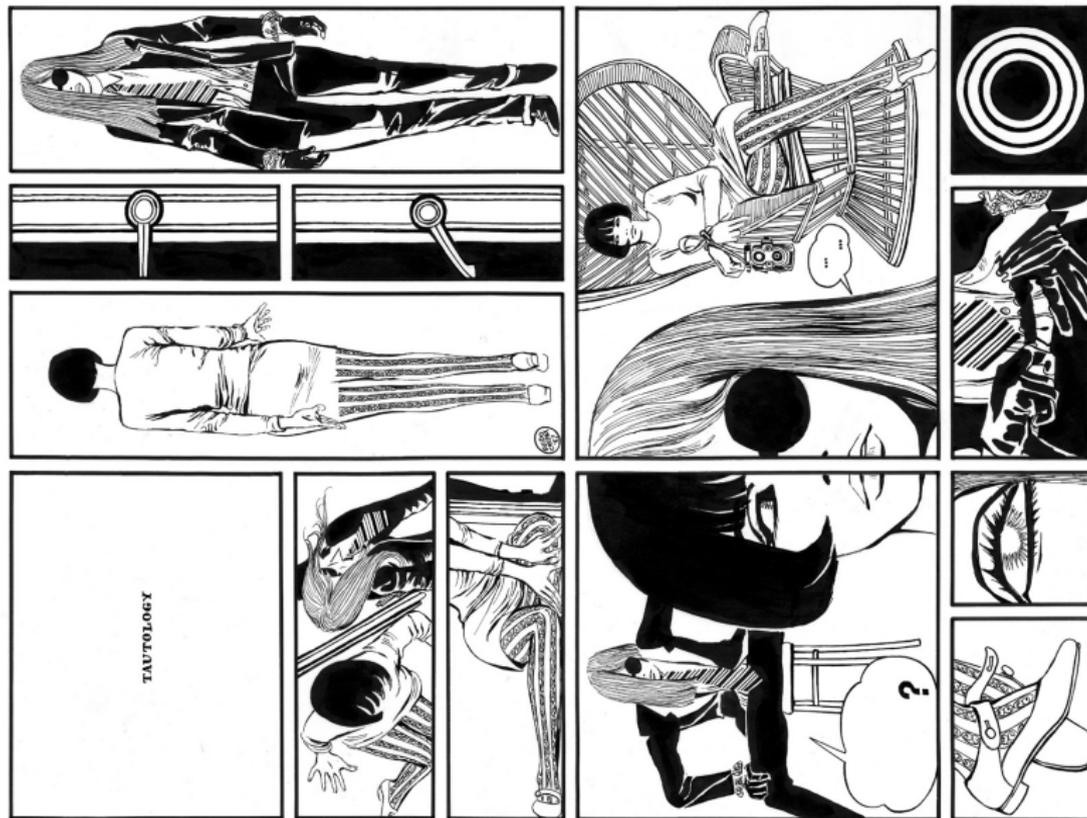
Ludwig Wittgenstein

Vienna 1889–Cambridge 1951



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

COSA S'INTENDE PER TAUTOLOGIA ?



ESTE

Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$



Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$

DEFINIZIONE

Un assegnamento per \mathbb{L} è una funzione

$$q: \mathcal{E} \longrightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}$$

tale che

$$\begin{aligned} q(f) &= \mathbf{f} \\ q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) &= (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta)) \end{aligned}$$

per ogni coppia α, β di enunciati di \mathbb{L}

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

dovrà sempre valere in un assegnamento q



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

✓!!

dovrà sempre valere in un assegnamento q



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

✓

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$v \quad =_{\text{Def}} \quad f \Rightarrow f$$



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$	
f	f	v	✓
f	v	v	
v	f	f	✓
v	v	v	

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$\begin{array}{lcl}
 v & =_{\text{Def}} & f \Rightarrow f \\
 \neg \alpha & =_{\text{Def}} & \alpha \Rightarrow f
 \end{array}$$



POPOLARI CONNETTIVI, INTESI COME ABBREVIAZIONI

$$\neg\alpha \rightsquigarrow \alpha \rightarrow f$$

$$v \rightsquigarrow \neg f$$

$$\begin{aligned}\alpha \vee \gamma &\rightsquigarrow \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ &\rightsquigarrow (\alpha \rightarrow f) \rightarrow \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \&\beta &\rightsquigarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ &\rightsquigarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &\rightsquigarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow f) \rightarrow f\end{aligned}$$



DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α : quando $q(\alpha) = \mathbf{v}$; e che

q VERIFICA A : quando q rende veri tutti gli enunciati in A .



DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α : quando $q(\alpha) = \mathbf{v}$; e che

q VERIFICA A : quando q rende veri tutti gli enunciati in A .

ESEMPIO

Qualsiasi q verifica lo \emptyset



DEFINIZIONE DI TAUTOLOGIA

DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α : quando $q(\alpha) = \mathbf{v}$; e che

q VERIFICA A : quando q rende veri tutti gli enunciati in A .

ESEMPIO

Qualsiasi q verifica lo \emptyset

DEFINIZIONE

Si chiama **tautologia** ogni enunciato α che risulti *sempre vero*:
cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.



DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α : quando $q(\alpha) = \mathbf{v}$; e che

q VERIFICA A : quando q rende veri tutti gli enunciati in A .

ESEMPIO

Qualsiasi q verifica lo \emptyset

DEFINIZIONE

Si chiama *tautologia* ogni enunciato α che risulti *sempre vero*:
cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.

|| Evidenzieremo in tre proposizioni a seguire che consistenza e verificabilità sono, per le logiche booleane, nozioni correlatissime.



$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\left((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha \right) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$



N.B. Dove mancano parentesi, associare a destra :

$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\left((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha \right) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

HA SENSO?

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$

f



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ccccccc} x > 0 & \Rightarrow & (0 > x & \Rightarrow & f) \\ & & \mathbf{f} & & \\ \mathbf{v} & & & & \mathbf{f} \end{array}$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ccccccc} x > 0 & \Rightarrow & (0 > x & \Rightarrow & f) & & \\ & & \mathbf{f} & & & & \\ & \mathbf{v} & & & \mathbf{f} & & \\ & & & \mathbf{v} & & \mathbf{f} & \end{array}$$



È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$

v

f

f

v

f

Nulla osta !?



TEOREMA

Se $A \not\vdash_{\mathcal{L}} f$, allora c'è un assegnamento che verifica A .

Dim. (traccia): L'ipotesi ci dà la consistenza di A ; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un $M \supseteq A$ che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che q sia un assegnamento. Di certo $q(f) = \mathbf{f}$, visto che f non può appartenere ad M non essendone derivabile. Per accertare che $q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta))$, si esaminino uno a uno i tre casi: (1) $\beta \in M$, (2) $\alpha \notin M$, (3) $\alpha \in M$ e $\beta \notin M$. \square



TEOREMA

Se $A \not\vdash_{\mathcal{L}} f$, allora c'è un assegnamento che verifica A .

Dim. (traccia): L'ipotesi ci dà la consistenza di A ; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un $M \supseteq A$ che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che q sia un assegnamento. Di certo $q(f) = \mathbf{f}$, visto che f non può appartenere ad M non essendone derivabile. Per accertare che $q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta))$, si esaminino uno a uno i tre casi: (1) $\beta \in M$, (2) $\alpha \notin M$, (3) $\alpha \in M$ e $\beta \notin M$. \square



Esercizio!



TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verificaci A rende vero α , allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.



TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verifici A rende vero α , allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

Dim. (traccia): Supponendo il contrario, da $A \not\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ otteniamo che $A \cup \{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f\}$ è consistente; perciò, in base al precedente teorema, c'è un assegnamento q che verifica A e che soddisfa anche l'uguaglianza $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \mathbf{v}$. Al contempo dovremmo avere $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = (q(\alpha) \Rightarrow q(f)) = (\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{f}) = \mathbf{f}$. \square



TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verificchi A rende vero α , allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

COROLLARIO DI POST

Se α è una tautologia, allora $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di \perp : basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di \mathcal{E} e un'operazione diadica su \mathcal{E} . Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione \vdash_m fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed \mathcal{E} ponendo:

DEFINIZIONE



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di \perp : basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di \mathcal{E} e un'operazione diadica su \mathcal{E} . Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione \vdash_m fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed \mathcal{E} ponendo:

DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$ se c'è un sottoinsieme finito F di A tale che α risulti vero in qualsiasi assegnamento verifichi F .



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di $\perp_{\mathbb{L}}$: basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di \mathcal{E} e un'operazione diadica su \mathcal{E} . Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione \vdash_m fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed \mathcal{E} ponendo:

DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$ se c'è un sottoinsieme finito F di A tale che α risulti vero in qualsiasi assegnamento verifichi F .

ESERCIZIO (?)

Mostrare che ogniqualvolta f appartiene a \mathcal{E} ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ è un'operazione diadica su \mathcal{E} , la $\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ che risulta da detta \vdash_m è una logica booleana.



TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che verifichi A .



TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che verifichi A .

Dim. (traccia): Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \varepsilon)$ è una logica booleana.

□



TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che verifichi A .

Dim. (traccia): Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \mathcal{E})$ è una logica booleana.

Di converso, se A ha un particolare sottoinsieme finito F tale che ogni assegnamento verificante F renda vero α allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che verificano l'intero A dovranno render vero α . □



TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che verifichi A . (In particolare, $\vdash_m \alpha$ se e solo se α è una tautologia).

Dim. (traccia): Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \mathcal{E})$ è una logica booleana.

Di converso, se A ha un particolare sottoinsieme finito F tale che ogni assegnamento verificante F renda vero α allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che verificano l'intero A dovranno render vero α . □



Banalmente, in considerazione del teorema-chiave, per ogni logica booleana $(\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ otteniamo:

TEOREMA SULLA MINIMALITÀ DI \vdash_m

A parità d'insieme \mathcal{E} degli enunciati, di elemento designato f e di operazione $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$,

$$A \vdash_m \alpha \text{ implica } A \vdash \alpha .$$

*(Per questo motivo, chiamiamo \vdash_m una **logica minimale**).*



ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;
- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.



ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;

SOLUZIONE 1^A PARTE

L1 ci dà che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$;

il principio di deduz., *B1*, che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$.



ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.

SOLUZIONE 2^A PARTE

Per il principio di deduz. *B1*, se $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ allora $A, \alpha \vdash \beta$;
 \therefore grazie al taglio, *L4*, quando $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $A \vdash \alpha$, allora $A \vdash \beta$.





Martin Davis.

Lecture Notes in Logic.

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York
University, 1993.



Emil Leon Post.

Introduction to a general theory of elementary propositions.
American Journal of Mathematics, 43:163–185, 1921.



Ludwig J. J. Wittgenstein.

Tractatus Logico-Philosophicus.

1922.

<http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>.



Consideriamo su \mathcal{P} :

- 1 dimostrabilità $A \vdash_{\mathcal{P}} \vartheta$ (e.g., secondo Church, secondo Quine, ecc.);
- 2 consequenzialità logica $A \models_{\mathcal{P}} \vartheta$.

La 1. è stata definita lezioni fa; la 2. va intesa così: ϑ è vera in tutti gli assegnamenti che verificano A .

Che inclusioni valgono fra la $\vdash_{\mathcal{P}}$, la $\models_{\mathcal{P}}$ e la \vdash_m relativa a \mathcal{P} ?

