

# *Cos'è una logica ? ( 06/03/2019 — )*

Eugenio G. Omodeo



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

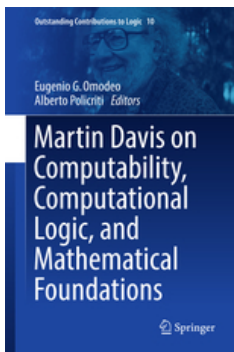
Sulla scorta di [Davis(1993)], mettiamo in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme  $A$  di *premesse* e una *conclusione*  $\alpha$  in una logica  $\mathbb{L}$  che ci permetta di ricavare (o 'derivare', o 'inferire')  $\alpha$  da  $A$ ; in simboli:

$$A \vdash \alpha$$



*“A logic  $L$  is determined by a nonempty set  $E$  of elements together with a relation  $\vdash$ . For a subset  $A$  of  $E$  and an element  $\alpha$  of  $E$  “ $A \vdash \alpha$ ” is a statement which may be true or false. (We may think of “ $A \vdash \alpha$ ” as asserting that  $\alpha$  is a “logical consequence” of the premises  $A$ .)”*

*[Davis(1993), pag. 1]*



## DEFINIZIONE

Una *logica* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  i cui elementi si chiamano *enunciati* e da
- una relazione diadica  $\vdash$ , chiamata *derivabilità*, tale che

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \supseteq \vdash$$

soddisfacenti le condizioni:

- L1.  $\{\alpha\} \vdash \alpha$ ;
- L2. (**Monotonicità**) quando  $A \vdash \alpha$ , si ha che  $B \vdash \alpha$  per ogni insieme di enunciati  $B \supseteq A$ ;
- L3. (**Compattezza**) quando  $A \vdash \alpha$ , si ha che  $F \vdash \alpha$  per qualche insieme finito  $F$  tale che  $A \supseteq F$ ;
- L4. (**Taglio**) quando  $A \vdash \alpha$  e  $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ , allora  $A \cup B \vdash \beta$ .

RIESTE

L1. Ogni enunciato segue da se stesso



- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.



- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- L3. Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.

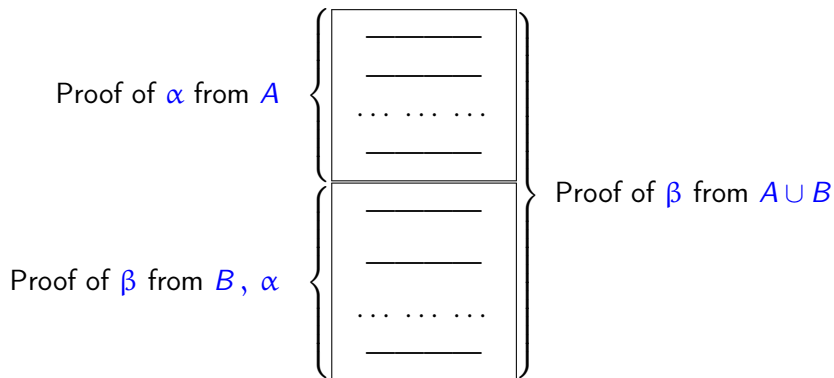


- L1. Ogni enunciato segue da se stesso
- L2. Dopo l'aggiunta di nuove premesse, non si ricavano meno conclusioni.
- L3. Se una conclusione segue da certe premesse, ciò deve essere documentabile tramite una '*dimostrazione*' di qualche sorta: dimostrazione esprimibile con un numero finito di simboli e che quindi potrà far riferimento solo a un numero finito di premesse.
- L4. Da una dimostrazione si può cancellare una premessa  $\alpha$ , a patto però di rimpiazzare  $\alpha$  con un insieme  $A$  di premesse da cui  $\alpha$  stessa è deducibile.





# SCHEMATIZZAZIONE DELLA REGOLA DEL TAGLIO



( da [Davis(1993), pag. 2] )



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{J} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra  $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{J}}$  definita per tutti gli enunciati  $\alpha$ , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{I} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra  $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{I}}$  definita per tutti gli enunciati  $\alpha$ , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

la relazione  $\models$  definita così:

$$A \models \vartheta \quad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathcal{I}} = \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathcal{I} \text{ tale che } \{ \alpha^{\mathcal{I}} : \alpha \in A \} = \{ \mathbf{v} \}$$



Richiamiamo

$$\mathcal{P} = \{ \text{enunciati del linguaggio proposizionale} \}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{I} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra  $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{I}}$  definita per tutti gli enunciati  $\alpha$ , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

Gode della compattezza la relazione  $\models$  definita così:

$$A \models \vartheta \quad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathcal{I}} = \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathcal{I} \text{ tale che } \{ \alpha^{\mathcal{I}} : \alpha \in A \} = \{ \mathbf{v} \}$$

?



# È QUELLA INTRODOTTA LA VOLTA SCORSA È UNA LOGICA?

## Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Diremo che la sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è una **dimostrazione** di  $\vartheta$  da  $A$  quando:

- 1)  $\delta_h = \vartheta$ ;
- 2) per ogni  $i = 0, \dots, h$ , accade che  $\delta_i$  sia un enunciato in  $\mathcal{P}$  che o:
  - ★ appartiene ad  $A$ , oppure
  - ★ ricade in uno degli schemi d'*assioma logico*, oppure
  - ★ è *preceduto* da due enunciati  $\delta_{j_0}$  e  $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \rightarrow \delta_i)$ , nel senso che  $j_0 < i$  e  $j_1 < i$ .

La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria'

## DEFINIZIONE

In una logica  $\mathbb{L}$ :



La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria' ( si pensi ad  $A$  come a un insieme di postulati ):

## DEFINIZIONE

In una logica  $\mathbb{L}$ :

- Un insieme  $A$  di enunciati si dice *inconsistente* se  $A \vdash \alpha$  vale per ogni enunciato  $\alpha$ ; si dice *consistente*, se ciò non avviene.



La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria'

## DEFINIZIONE

In una logica  $\mathbb{L}$ :

- Un insieme  $A$  di enunciati si dice *inconsistente* se  $A \vdash \alpha$  vale per ogni enunciato  $\alpha$ ; si dice *consistente*, se ciò non avviene.
- $\mathbb{L}$  stessa si dice *inconsistente* quando in  $\mathbb{L}$  è inconsistente lo  $\emptyset$  (cioè, se in  $\mathbb{L}$  ogni enunciato è derivabile da  $\emptyset$ );  
*consistente*, nel caso opposto.





## DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

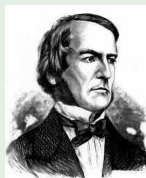
costituita da

- una logica  $(\mathcal{E}, \vdash)$ ,
- un elemento  $f$  di  $\mathcal{E}$ ,
- un'operazione diadica  $\Rightarrow$  su  $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

**B1. (Principio di deduzione)**

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$



George Boole  
1815–1864

## DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica  $(\mathcal{E}, \vdash)$ ,
- un elemento  $f$  di  $\mathcal{E}$ ,
- un'operazione diadica  $\Rightarrow$  su  $\mathcal{E}$

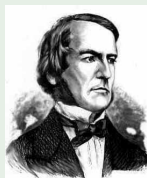
soddisfacenti le condizioni:

**B1. (Principio di deduzione)**

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

**B2. (Principio di doppia negazione)**

$$\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$$



George Boole  
1815–1864

## DEFINIZIONE

Una *logica booleana* è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica  $(\mathcal{E}, \vdash)$ ,
- un elemento  $f$  di  $\mathcal{E}$ ,
- un'operazione diadica  $\Rightarrow$  su  $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

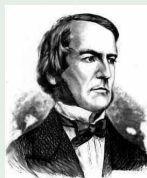
**B1. (Principio di deduzione)**

$$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } A \cup \{\alpha\} \vdash \beta ;$$

**B2. (Principio di doppia negazione)**  $\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha .$

L'operazione  $\Rightarrow$ , e il suo primo e secondo operando, si chiamano: **implicazione materiale**,

**antecedente e conseguente.**



George Boole  
1815–1864

## OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di  $A$ , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$\{f\} \vdash \alpha$$

## OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di  $A$ , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$\{f\} \vdash \alpha$$

## OSSERVAZIONE

Per l'*inconsistenza* di  $A$ , in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$

## ESERCIZIO

Mostrare l'*inconsistenza* della logica booleana che ha  $\mathcal{E} = \{f\}$

## ESERCIZIO (?)

Si dimostri che c'è una logica booleana consistente il cui  $\mathcal{E}$  è formato di due soli elementi: **f** e **v**; e che in tale logica la tabella dell'operazione  $\Rightarrow$  non può essere che questa:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>v</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>

e che  $A \vdash \alpha$  varrà se e solo se  $\alpha$  appartiene ad  $A \cup \{\mathbf{v}\}$ .

Osservazione:  $\alpha \Rightarrow \mathbf{f}$  in un certo senso 'nega'  $\alpha$



D'ora in poi indicheremo con  $\mathbb{P}_0$  la logica individuata sopra:

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow).$$

Intuitivamente parlando,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{v}$  rappresentano il *falso* e il *vero* e l'operazione  $\Rightarrow$  il connettivo “se ... allora ...”.





PER COMODITÀ SI USA SCRIVERE:



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$A \not\vdash \beta$  per indicare che  $A \vdash \beta$  non è vera;



$A \not\vdash \beta$  per indicare che  $A \vdash \beta$  *non* è vera;

$A, \alpha \vdash \beta$  per indicare che  $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ ;



- $A \not\vdash \beta$  per indicare che  $A \vdash \beta$  non è vera;
- $A, \alpha \vdash \beta$  per indicare che  $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ ;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$  per indicare che  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$ .



$A \not\vdash \beta$  per indicare che  $A \vdash \beta$  non è vera;

$A, \alpha \vdash \beta$  per indicare che  $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ ;

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$  per indicare che  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$ .

In quest'ultima,  $n$  è un qualsiasi numero naturale; dunque

$\vdash \beta$  sta per  $\emptyset \vdash \beta$ .



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$f \vdash f$$

## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$f \vdash f \quad (L1)$$





## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{array}{l} f \vdash f \\ \therefore f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \end{array}$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\therefore \quad f \vdash f$$
$$\therefore \quad f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \quad (\text{monotonicità, } L2)$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \end{aligned}$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \quad (\text{deduzione, } B1) \end{aligned}$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \therefore & f \vdash \alpha \end{aligned}$$



## ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

## SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} & f \vdash f \\ \therefore & f, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \therefore & f \vdash \alpha \quad (\text{doppia negazione, } B2; \text{ taglio, } L4) \end{aligned}$$



## ESERCIZIO SUL MODUS PONENS

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$  ;
- se  $A \vdash \alpha$  e  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ , allora  $A \vdash \beta$  .

## ESERCIZIO SULL'ESTENSIONE CONSISTENTE

Dimostrare che quando in una logica booleana vale  $A \not\vdash \beta$  , allora l'insieme  $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$  è consistente.



In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

#### DEFINIZIONE





In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

## DEFINIZIONE

Sia  $\mathbb{L}$  una logica booleana ed  $M$  un insieme di enunciati di  $\mathbb{L}$ . Diremo che  $M$  è *consistente massimale* se:

- $M$  è consistente;
- $M \cup \{\alpha\}$  è inconsistente per ogni enunc.  $\alpha$  che non stia in  $M$ .



## TEOREMA DI LINDENBAUM

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

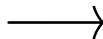


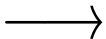
## TEOREMA DI LINDENBAUM

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

**Dim. (traccia):** Ci viene dato un  $A$  consistente e vogliamo trovare un  $M \supseteq A$  che sia consistente massimale. Per semplicità (altrimenti converrebbe ricorrere al lemma di Zorn) supponiamo che l'intero insieme degli enunciati possa essere disposto in una successione—ove le ripetizioni sono ammesse:

$$\mathcal{E} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} .$$





Poniamo

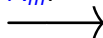
$$A_0 \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} A;$$

$$A_{n+1} \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} A_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se quest'insieme è consistente,} \\ A_n & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

Cosí, induttivamente, tutti gli  $A_i$  risultano consistenti. Da ultimo poniamo

$$M \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots;$$

i.e., un enunciato  $\alpha$  appartenga ad  $M$  sse  $\alpha$  sta in qualche  $A_m$ .



Se  $M$  fosse inconsistente, avremmo  $M \vdash f$  per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza  $L3$ , vi sarebbero  $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k}$  in numero finito, ciascuno appartenente ad  $M$  e tali che

$$\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k} \vdash f ;$$

ma allora ciascun  $\alpha_{n_i}$  apparterrebbe ad  $A_{m_i}$  per qualche  $m_i$  e tutti apparterrebbero ad  $A_m$ , ove  $m = \max \{m_1, \dots, m_k\}$ ; con ciò risulterebbe che  $A_m$  è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque  $M$  è consistente.



Se  $M$  fosse inconsistente, avremmo  $M \vdash f$  per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza  $L3$ , vi sarebbero  $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k}$  in numero finito, ciascuno appartenente ad  $M$  e tali che

$$\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k} \vdash f ;$$

ma allora ciascun  $\alpha_{n_i}$  apparterrebbe ad  $A_{m_i}$  per qualche  $m_i$  e tutti apparterrebbero ad  $A_m$ , ove  $m = \max \{m_1, \dots, m_k\}$ ; con ciò risulterebbe che  $A_m$  è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque  $M$  è consistente.

Per verificare la *massimalità* di  $M$ , proviamo a supporre che  $M \cup \{\alpha\}$  sia consistente per qualche  $\alpha$  non appartenente ad  $M$ .

Allora, individuato il primo  $n$  per cui valga  $\alpha = \alpha_n$ , avremmo anche la consistenza di  $A_n \cup \{\alpha_n\}$ . Ma allora dovrebbe valere

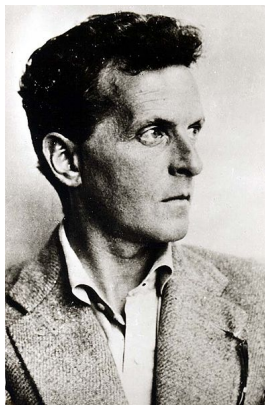
$M \supseteq A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha\}$  per definizione, donde la contraddizione cercata.



# COSA S'INTENDE PER TAUTOLOGIA ?

*“La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere più facilmente la tautologia ove questa è complicata.”*

*[Wittgenstein(1922), 6.1262]*



**Ludwig Wittgenstein**

Vienna 1889–Cambridge 1951



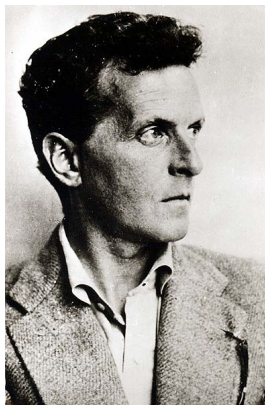
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

# COSA S'INTENDE PER TAUTOLOGIA ?

*“La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata.”*

*Fuorviante ?!*

*[Wittgenstein(1922), 6.1262]*



**Ludwig Wittgenstein**

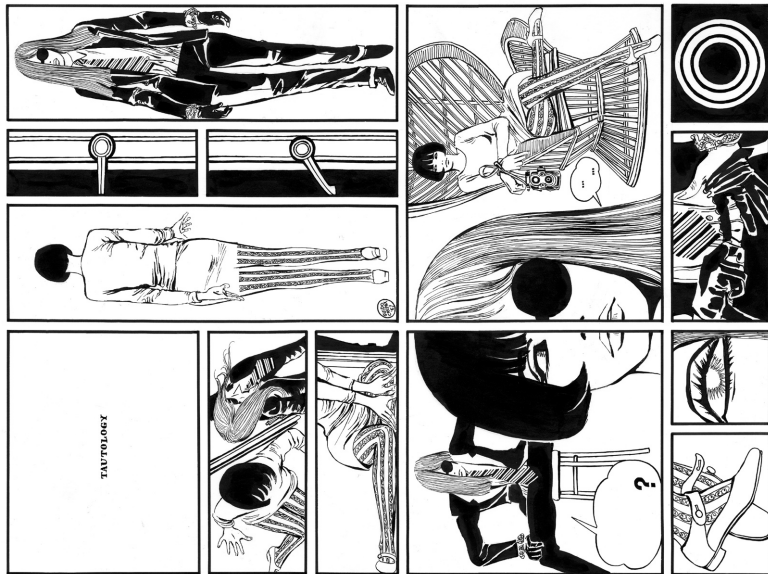
Vienna 1889–Cambridge 1951



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE



# COSA S'INTENDE PER TAUTOLOGIA ?



ESTE

Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$



Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$

### DEFINIZIONE

Un assegnamento per  $\mathbb{L}$  è una funzione

$$q: \mathcal{E} \longrightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}$$

tale che

$$\begin{aligned} q(f) &= \mathbf{f} \\ q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) &= (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta)) \end{aligned}$$

per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di enunciati di  $\mathbb{L}$

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>v</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>

dovrà sempre valere in un assegnamento  $q$



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>v</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>

✓!!

dovrà sempre valere in un assegnamento  $q$



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>v</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>

✓

dovrà sempre valere in un assegnamento  $q$

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$v \quad =_{\text{Def}} \quad f \Rightarrow f$$



Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$	
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>v</b>	✓
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>	
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>	✓
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>	

dovrà sempre valere in un assegnamento  $q$

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$\begin{array}{lcl}
 v & =_{\text{Def}} & f \Rightarrow f \\
 \neg \alpha & =_{\text{Def}} & \alpha \Rightarrow f
 \end{array}$$



# POPOLARI CONNETTIVI, INTESI COME ABBREVIAZIONI

$$\neg\alpha \rightsquigarrow \alpha \rightarrow f$$

$$v \rightsquigarrow \neg f$$

$$\begin{aligned}\alpha \vee \gamma &\rightsquigarrow \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ &\rightsquigarrow (\alpha \rightarrow f) \rightarrow \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \&\beta &\rightsquigarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ &\rightsquigarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \\ &\rightsquigarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow f) \rightarrow f\end{aligned}$$





## DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

$q$  RENDE VERO  $\alpha$ : quando  $q(\alpha) = \mathbf{v}$ ; e che

$q$  VERIFICA  $A$ : quando  $q$  rende veri tutti gli enunciati in  $A$ .



## DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

$q$  RENDE VERO  $\alpha$ : quando  $q(\alpha) = \mathbf{v}$ ; e che

$q$  VERIFICA  $A$ : quando  $q$  rende veri tutti gli enunciati in  $A$ .

## ESEMPIO

Qualsiasi  $q$  verifica lo  $\emptyset$



# DEFINIZIONE DI TAUTOLOGIA

## DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

$q$  RENDE VERO  $\alpha$ : quando  $q(\alpha) = \mathbf{v}$ ; e che

$q$  VERIFICA  $A$ : quando  $q$  rende veri tutti gli enunciati in  $A$ .

## ESEMPIO

Qualsiasi  $q$  verifica lo  $\emptyset$

## DEFINIZIONE

Si chiama **tautologia** ogni enunciato  $\alpha$  che risulti *sempre vero*:  
cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.



## DEFINIZIONE

Si dice che un assegnamento

$q$  RENDE VERO  $\alpha$ : quando  $q(\alpha) = \mathbf{v}$ ; e che

$q$  VERIFICA  $A$ : quando  $q$  rende veri tutti gli enunciati in  $A$ .

## ESEMPIO

Qualsiasi  $q$  verifica lo  $\emptyset$

## DEFINIZIONE

Si chiama *tautologia* ogni enunciato  $\alpha$  che risulti *sempre vero*:  
cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.

|| Evidenzieremo in tre proposizioni a seguire che consistenza e verificabilità sono, per le logiche booleane, nozioni correlatissime.



$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\left( (\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha \right) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$



N.B. Dove mancano parentesi, associare a destra :

$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\left( (\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha \right) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

HA SENSO?

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$





# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$

**f**



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$

v

f



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ccccccc} x > 0 & \Rightarrow & ( 0 > x & \Rightarrow & f ) \\ & & \mathbf{f} & & & & \\ \mathbf{v} & & & & \mathbf{f} & & \\ & & & \mathbf{v} & & \mathbf{f} & \end{array}$$



# È UNA TAUTOLOGIA QUESTA ?

## ESERCIZIO

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \Rightarrow 0 > x \Rightarrow f$$

TENTIAMO UNA *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \Rightarrow (0 > x \Rightarrow f)$$

v

f

f

v

f

Nulla osta !?



## TEOREMA

Se  $A \not\vdash_{\mathcal{L}} f$ , allora c'è un assegnamento che verifica  $A$ .

**Dim. (traccia):** L'ipotesi ci dà la consistenza di  $A$ ; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un  $M \supseteq A$  che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che  $q$  sia un assegnamento. Di certo  $q(f) = \mathbf{f}$ , visto che  $f$  non può appartenere ad  $M$  non essendone derivabile. Per accertare che  $q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta))$ , si esaminino uno a uno i tre casi: (1)  $\beta \in M$ , (2)  $\alpha \notin M$ , (3)  $\alpha \in M$  e  $\beta \notin M$ .  $\square$



## TEOREMA

Se  $A \not\vdash_{\mathcal{L}} f$ , allora c'è un assegnamento che verifica  $A$ .

**Dim. (traccia):** L'ipotesi ci dà la consistenza di  $A$ ; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un  $M \supseteq A$  che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che  $q$  sia un assegnamento. Di certo  $q(f) = \mathbf{f}$ , visto che  $f$  non può appartenere ad  $M$  non essendone derivabile. Per accertare che  $q(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (q(\alpha) \Rightarrow q(\beta))$ , si esaminino uno a uno i tre casi: (1)  $\beta \in M$ , (2)  $\alpha \notin M$ , (3)  $\alpha \in M$  e  $\beta \notin M$ .  $\square$



Esercizio!



## TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verificchi  $A$  rende vero  $\alpha$ , allora  $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .





## TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verifici  $A$  rende vero  $\alpha$ , allora  $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .

**Dim. (traccia):** Supponendo il contrario, da  $A \not\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$  otteniamo che  $A \cup \{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f\}$  è consistente; perciò, in base al precedente teorema, c'è un assegnamento  $q$  che verifica  $A$  e che soddisfa anche l'uguaglianza  $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \mathbf{v}$ . Al contempo dovremmo avere  $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = (q(\alpha) \Rightarrow q(f)) = (\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{f}) = \mathbf{f}$ .  $\square$



## TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnamento verificaci  $A$  rende vero  $\alpha$ , allora  $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .

## COROLLARIO DI POST

Se  $\alpha$  è una tautologia, allora  $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di  $\perp$ : basta che  $f$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  siano un elemento di  $\mathcal{E}$  e un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ . Per atteggiare una simile terna  $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$  a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione  $\vdash_m$  fra  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  ed  $\mathcal{E}$  ponendo:

### DEFINIZIONE



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di  $\perp$ : basta che  $f$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  siano un elemento di  $\mathcal{E}$  e un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ . Per atteggiare una simile terna  $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$  a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione  $\vdash_m$  fra  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  ed  $\mathcal{E}$  ponendo:

#### DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$  se c'è un sottoinsieme finito  $F$  di  $A$  tale che  $\alpha$  risulti vero in qualsiasi assegnamento verifichi  $F$ .



Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di  $\perp_{\mathbb{L}}$ : basta che  $f$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  siano un elemento di  $\mathcal{E}$  e un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ . Per atteggiare una simile terna  $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$  a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione  $\vdash_m$  fra  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  ed  $\mathcal{E}$  ponendo:

### DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$  se c'è un sottoinsieme finito  $F$  di  $A$  tale che  $\alpha$  risulti vero in qualsiasi assegnamento verifichi  $F$ .

### ESERCIZIO (?)

Mostrare che ogniqualvolta  $f$  appartiene a  $\mathcal{E}$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  è un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ , la  $\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$  che risulta da detta  $\vdash_m$  è una logica booleana.



## TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  risulta vero in ogni assegnamento che verifichi  $A$ .



## TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  risulta vero in ogni assegnamento che verifichi  $A$ .

**Dim. (traccia):** Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che  $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \varepsilon)$  è una logica booleana.

□



## TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  risulta vero in ogni assegnamento che verifichi  $A$ .

**Dim. (traccia):** Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che  $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \mathcal{E})$  è una logica booleana.

Di converso, se  $A$  ha un particolare sottoinsieme finito  $F$  tale che ogni assegnamento verificante  $F$  renda vero  $\alpha$  allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che verificano l'intero  $A$  dovranno render vero  $\alpha$ . □





## TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  risulta vero in ogni assegnamento che verifichi  $A$ . (In particolare,  $\vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  è una tautologia).

**Dim. (traccia):** Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che  $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow \mathcal{E})$  è una logica booleana.

Di converso, se  $A$  ha un particolare sottoinsieme finito  $F$  tale che ogni assegnamento verificante  $F$  renda vero  $\alpha$  allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che verificano l'intero  $A$  dovranno render vero  $\alpha$ . □



Banalmente, in considerazione del teorema-chiave, per ogni logica booleana  $(\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$  otteniamo:

### TEOREMA SULLA MINIMALITÀ DI $\vdash_m$

A parità d'insieme  $\mathcal{E}$  degli enunciati, di elemento designato  $f$  e di operazione  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ ,

$$A \vdash_m \alpha \text{ implica } A \vdash \alpha .$$

*(Per questo motivo, chiamiamo  $\vdash_m$  una **logica minimale**).*



## ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$  ;
- se  $A \vdash \alpha$  e  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ , allora  $A \vdash \beta$  .



## ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ ;

## SOLUZIONE 1<sup>A</sup> PARTE

*L1* ci dà che  $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ ;

il principio di deduz., *B1*, che  $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  sse  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ .



## ESERCIZIO

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- se  $A \vdash \alpha$  e  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ , allora  $A \vdash \beta$ .

## SOLUZIONE 2<sup>A</sup> PARTE

Per il principio di deduz. *B1*, se  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  allora  $A, \alpha \vdash \beta$ ;  
 $\therefore$  grazie al taglio, *L4*, quando  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  e  $A \vdash \alpha$ , allora  $A \vdash \beta$ .





Martin Davis.

*Lecture Notes in Logic.*

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York  
University, 1993.



Emil Leon Post.

Introduction to a general theory of elementary propositions.  
*American Journal of Mathematics*, 43:163–185, 1921.



Ludwig J. J. Wittgenstein.

*Tractatus Logico-Philosophicus.*

1922.

<http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>.



Consideriamo su  $\mathcal{P}$ :

- 1 dimostrabilità  $A \vdash_{\mathcal{P}} \vartheta$  ( e.g., secondo Church, secondo Quine, ecc. );
- 2 consequenzialità logica  $A \models_{\mathcal{P}} \vartheta$ .

La 1. è stata definita lezioni fa; la 2. va intesa così:  $\vartheta$  è vera in tutti gli assegnamenti che verificano  $A$ .

Che inclusioni valgono fra la  $\vdash_{\mathcal{P}}$ , la  $\models_{\mathcal{P}}$  e la  $\vdash_m$  relativa a  $\mathcal{P}$  ?

