

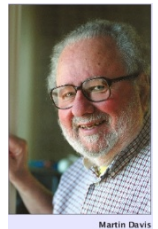
# Che cos'è *una* logica?

Eugenio G. Omodeo

a.a. 2014/2015

“A logic  $\mathbb{L}$  is determined by a nonempty set  $E$  of elements together with a relation  $\vdash$ . For a subset  $A$  of  $E$  and an element  $\alpha$  of  $E$  “ $A \vdash \alpha$ ” is a statement which may be true or false. (We may think of “ $A \vdash \alpha$ ” as asserting that  $\alpha$  is a “logical consequence” of the *premises*  $A$ .)”

[Davis, 1993, p. 1]



## 1 Logiche, booleane e non

La definizione che segue, ripresa qui da Davis [1993], mette in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme  $A$  di PREMESSE e una CONCLUSIONE  $\alpha$  in una logica  $\mathbb{L}$  che ci permetta di *ricavare* (o ‘*derivare*’, o ‘*inferire*’)  $\alpha$  da  $A$ ; in simboli:  $A \vdash \alpha$ .

**Definizione 1** Una LOGICA è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  e da
- una relazione diadica  $\vdash$  tale che  $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \supseteq \vdash$

soddisfacenti le condizioni:

L1.  $\{\alpha\} \vdash \alpha$ ;

L2. (**Monotonicità**) quando  $A \vdash \alpha$ , si ha  $B \vdash \alpha$  per ogni insieme di enunciati  $B \supseteq A$ ;

L3. (**Compattezza**) quando  $A \vdash \alpha$ , si ha  $F \vdash \alpha$  per qualche insieme finito  $F$  tale che  $A \supseteq F$ ;

L4. (**Taglio**) quando  $A \vdash \alpha$  e  $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ , allora  $A \cup B \vdash \beta$ . (V. Fig. 1)

Gli elementi di  $\mathcal{E}$  e la relazione  $\vdash$  vengono chiamati, rispettivamente, ENUNCIATI di  $\mathbb{L}$  e DERIVABILITÀ in  $\mathbb{L}$ . ⊣

Si usa scrivere:

$A \not\vdash \beta$  per indicare che  $A \vdash \beta$  non è vera;  
 $A, \alpha \vdash \beta$  per indicare che  $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ ;  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$  per indicare che  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$ .

In quest'ultima,  $n$  è un qualsiasi numero naturale; dunque  $\vdash \beta$  sta per  $\emptyset \vdash \beta$ .

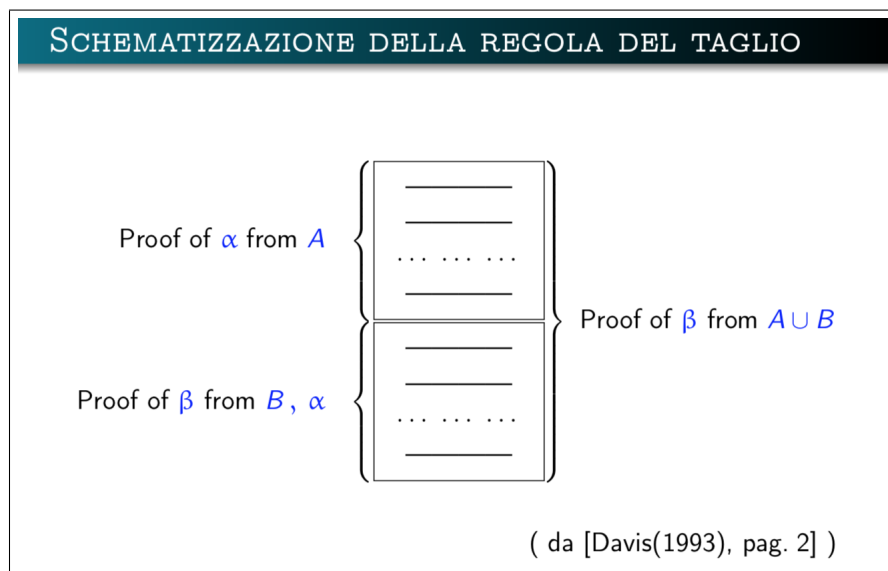


Figura 1: Illustrazione della regola del taglio (da [Davis, 1993, p. 2]).

La prossima definizione vuol catturare la nozione di ‘teoria contraddittoria’ (si pensi ad  $A$  come a un insieme di postulati):

**Definizione 2** In una logica  $\mathbb{L}$ :

un insieme  $A$  di enunciati si dice **INCONSISTENTE** se  $A \vdash \alpha$  è vera per ogni enunciato  $\alpha$ ; si dice **CONSISTENTE**, se ciò non avviene.

$\mathbb{L}$  stessa si dice **INCONSISTENTE** quando in  $\mathbb{L}$  è inconsistente lo  $\emptyset$  (cioè, se in  $\mathbb{L}$  ogni enunciato è derivabile da  $\emptyset$ ); **CONSISTENTE**, nel caso opposto.  $\dashv$

**Definizione 3** Una **LOGICA BOOLEANA** è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica  $(\mathcal{E}, \vdash)$ ,
- un elemento  $f$  di  $\mathcal{E}$ ,
- un'operazione diadica<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  su  $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

**B1. (Principio di deduzione)**  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  se e solo se  $A, \alpha \vdash \beta$ ;

**B2. (Principio di doppia negazione)**  $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$ .

L'operazione  $\Rightarrow$  e i suoi primo e secondo operando, si chiamano:  
**IMPLICAZIONE MATERIALE, ANTECEDENTE e CONSEGUENTE.**  $\dashv$



George Boole  
 (Lincoln 1815 –  
 Ballintemple 1864)

**Esercizio 1** Mostrare l'inconsistenza della logica booleana che ha  $\mathcal{E} = \{f\}$ .  $\dashv$

**Esercizio 2** Si dimostri che c'è una logica booleana *consistente* il cui  $\mathcal{E}$  è formato di due soli elementi: **f** (l'*f* designato) e **t**; che in tale logica la tabella dell'operazione  $\Rightarrow$  non può essere che questa:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>t</b>
<b>f</b>	<b>t</b>	<b>t</b>
<b>t</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>t</b>	<b>t</b>	<b>t</b>

e che in essa  $A \vdash \alpha$  varrà se e solo se  $\alpha$  appartiene ad  $A \cup \{\mathbf{t}\}$ .  $\dashv$

<sup>1</sup>Vale a dire che  $\alpha \Rightarrow \beta$  è un enunciato per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di enunciati.

La logica individuata nell'Esercizio 2 verrà indicata, di qui in poi, come  $\mathbb{P}_0$ . Intuitivamente parlando, **f** e **t** rappresentano il *falso* e il *vero* e l'operazione  $\Rightarrow$  il connettivo “se ... allora ...”.

Notare che l'operazione  $\alpha \Rightarrow \mathbf{f}$  ‘nega’, in un certo senso,  $\alpha$ .

**Esercizio 3** Dimostrare che per l'inconsistenza di  $A$ , in una logica booleana, è sufficiente che  $A \vdash f$ . └

**Esercizio 4 (*Modus ponens*)** Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ ;
- se  $A \vdash \alpha$  e  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ , allora  $A \vdash \beta$ . └

**Esercizio 5** Dimostrare che quando, in una logica booleana, vale  $A \not\vdash \beta$  allora l'insieme  $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$  è consistente. └

## 2 Consistenza massimale

In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

**Definizione 4** Sia  $\mathbb{L}$  una logica booleana ed  $M$  un insieme di enunciati di  $\mathbb{L}$ . Diremo che  $M$  è CONSISTENTE MASSIMALE se:

- $M$  è consistente;
- $M \cup \{\alpha\}$  è inconsistente per ogni enunciato  $\alpha$  che non stia in  $M$ . └

Sempre in tema di logiche booleane, abbiamo che:

**Teorema 1 (di Lindenbaum)** Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

**Dim. (traccia):** Ci viene dato un  $A$  consistente e vogliamo trovare un  $M \supseteq A$  che sia consistente massimale. Per semplicità (altrimenti converrebbe ricorrere al lemma di Zorn), supponiamo che l'intero insieme degli enunciati possa essere disposto in una successione—ove le ripetizioni sono ammesse:

$$\mathcal{E} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}.$$

Poniamo

$$A_0 =_{\text{Def}} A;$$

$$A_{n+1} =_{\text{Def}} \begin{cases} A_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se quest'insieme è consistente,} \\ A_n & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

Così, induttivamente, tutti gli  $A_i$  risultano consistenti. Da ultimo poniamo

$$M =_{\text{Def}} A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots;$$

i.e., un enunciato  $\alpha$  appartenga ad  $M$  se e solo se  $\alpha$  sta in qualche  $A_i$ .

Se  $M$  fosse inconsistente, avremmo  $M \vdash f$  in base alla Def. 2; dunque, per il requisito di compattezza  $L3$ , vi sarebbero  $\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k}$  in numero finito, ciascuno appartenente ad  $M$  e tali che

$$\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_k} \vdash f;$$

ma allora ciascun  $\alpha_{n_j}$  apparterebbe ad  $A_{m_j}$  per qualche  $m_j$  e tutti apparterebbero ad  $A_m$ , ove  $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$ ; con ciò risulterebbe che  $A_m$  è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque  $M$  è consistente.

Per verificare la *massimalità* di  $M$ , proviamo a supporre che  $M \cup \{\alpha\}$  sia consistente per qualche  $\alpha$  non appartenente ad  $M$ . Allora, individuato il primo  $n$  per cui valga  $\alpha = \alpha_n$ , avremmo anche la consistenza di  $A_n \cup \{\alpha_n\}$ . Ma allora dovrebbe valere  $M \supseteq A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha\}$  per come abbiamo costruito  $A_{n+1}$  ed  $M$ , donde la contraddizione cercata.  $\dashv$

### 3 Cosa s'intende per tautologia?

“Proof in logic is only a mechanical expedient to facilitate the recognition of tautology, where it is complicated.”<sup>2</sup>

[Wittgenstein, 1922, 6.1262]

Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 = (\{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow)$$

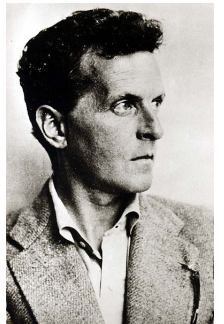
dell'Esercizio 2, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$

e stabiliamo:

---

<sup>2</sup>Fuorviante?!



Ludwig J.J. Wittgenstein  
(Vienna 1889 –  
Cambridge 1951)

**Definizione 5** Un ASSEGNAMEO per  $\mathbb{L}$  è una funzione

$$\mathbf{q}: \mathcal{E} \longrightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$$

tale che  $\mathbf{q}(f) = \mathbf{f}$  e  $\mathbf{q}(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (\mathbf{q}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{q}(\beta))$  per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di enunciati di  $\mathbb{L}$  (cosicché

$\mathbf{q}(\alpha)$	$\mathbf{q}(\beta)$	$\mathbf{q}(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta)$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$

dovrà sempre valere).

⊣

**Definizione 6** Si dice che un assegnamento

$\mathbf{q}$  RENDE VERO  $\alpha$ : quando  $\mathbf{q}(\alpha) = \mathbf{t}$ ;

e che

$\mathbf{q}$  VERIFICA  $A$ : quando  $\mathbf{q}$  rende veri tutti gli enunciati in  $A$ .

⊣

**Definizione 7** Si chiama TAUTOLOGIA ogni enunciato  $\alpha$  che risulti sempre vero: cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.

⊣

Le tre proposizioni che seguono evidenziano che consistenza e verificabilità sono, in qualsiasi logica booleana, nozioni intimamente correlate:

**Teorema 2** Se  $A \not\vdash_{\mathbb{L}} f$ , allora c'è un assegnamento che verifica  $A$ .

**Dim. (traccia):** L'ipotesi ci dà la consistenza di  $A$  (v. Def. 2); per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un  $M \supseteq A$  che è consistente massimale. Posto

$$\mathbf{q}(\alpha) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} \mathbf{t} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che  $\mathbf{q}$  sia un assegnamento. Di certo  $\mathbf{q}(f) = \mathbf{f}$ , visto che  $f$  non può appartenere ad  $M$  non essendone derivabile. Per accertare che  $\mathbf{q}(\alpha \Rightarrow_{\varepsilon} \beta) = (\mathbf{q}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{q}(\beta))$ , si esaminino separatamente i tre casi:

(1)  $\beta \in M$ , (2)  $\alpha \notin M$ , (3)  $\alpha \in M$  e  $\beta \notin M$ .

(Esercizio!)

⊣

**Teorema 3 (Teorema-chiave sulle logiche booleane)** Se qualsiasi assegnamento verifichi  $A$  rende del pari vero l'enunciato  $\alpha$ , allora  $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .

**Dim. (traccia):** Supponendo il contrario, da  $A \not\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$  otteniamo che  $A \cup \{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f\}$  è consistente; perciò, in base al precedente Teor. 2, c'è un assegnamento  $\mathbf{q}$  che verifica  $A$  e che soddisfa anche l'uguaglianza  $\mathbf{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \mathbf{t}$ . Al contempo dovrebbe valere  $\mathbf{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = (\mathbf{q}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{q}(f)) = (\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{f}) = \mathbf{f}$ .  $\dashv$

**Corollario 4 (di Post)** *Se  $\alpha$  è una tautologia, allora  $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ .*  $\dashv$



Emil Leon Post  
(Augustów 1897 –  
New York 1954)

**Esercizio 6** Dimostrare il corollario di Post.  $\dashv$

## 4 Logiche booleane minimali

Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di  $\vdash_{\mathbb{L}}$ : basta che  $f$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  siano un elemento di  $\mathcal{E}$  e un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ . Per atteggiare una simile terna  $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$  a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione  $\vdash_m$  fra  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  ed  $\mathcal{E}$  ponendo:

**Definizione 8**  *$A \vdash_m \alpha$  se c'è un sottoinsieme finito  $F$  di  $A$  tale che  $\alpha$  risulti vero in qualsiasi assegnamento verifichi  $F$ .*  $\dashv$

**Esercizio 7** Mostrare che ogniqualvolta  $f$  appartiene a  $\mathcal{E}$  ed  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$  è un'operazione diadica su  $\mathcal{E}$ , la  $\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$  che risulta da detta  $\vdash_m$  è una logica booleana.  $\dashv$

Abbiamo così che

**Teorema 5**  *$A \vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  risulta vero in ogni assegnamento che verifichi  $A$ . (In particolare,  $\vdash_m \alpha$  se e solo se  $\alpha$  è una tautologia).*

**Dim. (traccia):** Il “se” ci è dato dal teorema-chiave, visto che  $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$  è una logica booleana (v. Esercizio 7).

Di converso, se  $A$  ha un sottoinsieme finito  $F$  tale che ogni assegnamento verificante  $F$  renda vero  $\alpha$  allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che verificano l'intero  $A$  dovranno render vero  $\alpha$ .  $\dashv$

Banalmente, in considerazione del teorema-chiave, per ogni logica booleana  $(\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ , otteniamo:

**Teorema 6 (Minimalità di  $\vdash_m$ )** *A parità d'insieme  $\mathcal{E}$  degli enunciati, di elemento designato  $f$  e di operazione  $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ ,*

$$A \vdash_m \alpha \text{ implica } A \vdash \alpha .$$

(Per questo motivo, chiamiamo  $\vdash_m$  una LOGICA MINIMALE).  $\dashv$

**Esercizio 8** Mostrare che una logica booleana minimale  $\mathbb{L}$  è consistente se e solo se c'è almeno un assegnamento per  $\mathbb{L}$ .  $\dashv$

## 5 Logica proposizionale standard (o quasi)

Consideriamo una successione infinita

$$( , ), \rightarrow, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi SIMBOLI. Con la notazione

$$“\sigma_1 \cdots \sigma_h” ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_h \rangle ,$$

ovvero un' $h$ -upla, con un numero qualsiasi  $h$  di componenti, formata di simboli  $\sigma_i$ ; inoltre definiamo l'operazione  $\sigma \Rightarrow \varrho$  per ogni coppia  $\sigma = “\sigma_1 \cdots \sigma_h”$ ,  $\varrho = “\varrho_1 \cdots \varrho_k”$  di sequenze finite di simboli ponendo

$$“\sigma_1 \cdots \sigma_h” \Rightarrow “\varrho_1 \cdots \varrho_k” \quad =_{\text{Def}} \quad “(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \varrho_1 \cdots \varrho_k)” .$$

Indichiamo, infine, con

$$\underbrace{f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots}_{\text{lettere proposizionali}}$$



la successione

“ $p_0$ ”, “ $p_1$ ”, “ $p_2$ ”, “ $p_3$ ”, “ $p_4$ ”, “ $p_5$ ”, “ $p_6$ ”, “ $p_7$ ”, “ $p_8$ ”, “ $p_9$ ”, ...

di 1-uple e con  $\boxed{\mathcal{P}}$  il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{ f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots \}$$

tale che per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di sequenze in  $\mathcal{P}$  anche  $\alpha \Rightarrow \beta$  appartenga a  $\mathcal{P}$ .

La LOGICA PROPOSIZIONALE STANDARD è, per definizione, la logica booleana minimale<sup>3</sup>

$$\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \models, f, \Rightarrow)$$

istruita su detta collezione  $\mathcal{P}$ , che qui funge da insieme di enunciati.

## 5.1 Sintesi di enunciati a partire da funzioni booleane

Sia  $\gamma$  un enunciato di  $\mathbb{P}$ . Indichiamo con  $p_{j_1}, \dots, p_{j_\ell}$  i simboli diversi da  $(, ), \rightarrow$  e da  $p_0$  che figurano come componenti in  $\gamma$ , per definitezza ordinati in modo che  $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell$  e poniamo per brevità

$$\mathbf{2} =_{\text{Def}} \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}.$$

Per ogni funzione

$$\mathfrak{S} : \{p_{j_1}, \dots, p_{j_\ell}\} \longrightarrow \mathbf{2},$$

è facile individuare assegnamenti  $\mathbf{q}$  tali che

$$\mathbf{q}(p_{j_1}) = \mathfrak{S}(p_{j_1}), \quad \dots, \quad \mathbf{q}(p_{j_\ell}) = \mathfrak{S}(p_{j_\ell})$$

e determinare—sulla scorta della Def. 5—il valore  $\gamma^{\mathfrak{S}}$  assunto da  $\gamma$  in qualsiasi tale assegnamento (che è sempre lo stesso). In quest’ottica,  $\gamma$  è dunque la *specifica* di una funzione da  $\mathbf{2}^\ell$  in  $\mathbf{2}$  e possiamo dire che ne rappresenta il decorso di valori.

Chiamiamo FUNZIONI BOOLEANE gli elementi di  $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbf{2}^{2^\ell}$ . Che insieme costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati di  $\mathbb{P}$ ? La risposta—vedremo subito—è semplice: si tratta dell’insieme delle funzioni booleane

<sup>3</sup>Alla luce del Teor. 5, qui passiamo a scrivere  $A \models \alpha$  (leggere: ‘ $\alpha$  è conseguenza tautologica di  $A$ ’) invece di  $A \vdash_m \alpha$ , per accordare la notazione a [Enderton, 2001, p. 23].

*tutto intero*. Stiamo infatti per vedere come ‘sintetizzare’ (cioè come individuare in modo automatico), data una qualsiasi funzione booleana  $b$ , un enunciato  $\gamma$  che specifichi  $b$ .

Introduciamo, preliminarmente, in  $\mathbb{P}$  le abbreviazioni

$$\begin{aligned}\neg\alpha &=_{\text{Def}} \alpha \Rightarrow f, \\ \alpha \vee \beta &=_{\text{Def}} (\neg\alpha) \Rightarrow \beta, \\ \alpha \&\beta &=_{\text{Def}} \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta).\end{aligned}$$

**Tecnica di sintesi.** Descriviamo in forma tabellare la data  $b$ :

$\mathbf{p}_1$	$\cdots$	$\mathbf{p}_\ell$	$b(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_\ell)$
$\mathbf{f}$	$\dots$	$\mathbf{f}$	$v_1$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{t}$	$\dots$	$\mathbf{t}$	$v_{2^\ell}$

(Dunque ciascun valore  $v_i$  appartiene a  $\mathbf{2}$ ). Per ottenere da  $b$  un enunciato  $\gamma$  che ne rappresenti il decorso di valori, si ponga

$$\gamma =_{\text{Def}} (\beta_{i_1,1} \&\cdots\&\beta_{i_1,\ell}) \vee \cdots \vee (\beta_{i_g,1} \&\cdots\&\beta_{i_g,\ell})$$

dove  $i_1, \dots, i_g$  sono gli indici  $i$  delle righe sulle quali  $v_i = \mathbf{t}$  e dove ciascun enunciato  $\beta_{i,j}$  è definito come

$$\beta_{i,j} =_{\text{Def}} \begin{cases} \mathbf{p}_i & \text{se in riga } i \text{ colonna } j \text{ compare } \mathbf{t}, \\ \neg\mathbf{p}_i & \text{se in riga } i \text{ colonna } j \text{ compare } \mathbf{f}. \end{cases}$$

**Esercizio 9** Che accade quando la sintesi di  $\gamma$  viene applicata al caso  $\ell = 0$ ? Perfezionare la tecnica di sintesi per far sí che in  $\gamma$  figurino  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_\ell$ , ciascuno asserito o negato, anche nel caso che  $\ell \neq 0$  ma che  $v_i = \mathbf{f}$  su ogni riga.  $\dashv$

**Esercizio 10** Modificare la tecnica di sintesi in modo tale che l’enunciato  $\gamma$  associato alla data  $b$  venga ad avere la forma

$$(\alpha_{i_1,1} \vee \cdots \vee \alpha_{i_1,\ell}) \&\cdots\& (\alpha_{i_g,1} \vee \cdots \vee \alpha_{i_g,\ell}).$$

(N.B.: per indici  $i_1, \dots, i_g$  diversi da prima).  $\dashv$

## 5.2 Mappe K

Una tecnica particolarmente efficace per rappresentare in forma tabulare una funzione booleana  $b$  fu ideato nel 1953 da Maurice Karnaugh. La Fig. 2 riporta MAPPE DI KARNAUGH, in breve MAPPE  $K$ , per una  $b$  che sia funzione  $\ell$ -adica,<sup>4</sup> con  $\ell = 2, 3, 4$ : gli 0 e 1 utilizzati per indicizzare righe e colonne sono *alias* di  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{t}$  e ai fini dell'efficacia della rappresentazione è cruciale il criterio d'indicizzazione, che è descritto nella didascalia di Fig. 2.

$p \backslash q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \backslash qr$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$sp \backslash qr$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Figura 2: Mappe K (provvisoriamente vuote) per funzioni booleane a 2,3,4 operandi. Le sequenze di bit che indicizzano due righe adiacenti differiscono solo per un bit; lo stesso avviene per coppie di colonne adiacenti. La prima e l'ultima riga vengono considerate adiacenti e così pure la prima e l'ultima colonna.

Nel riempire la mappa  $K$  di una funzione booleana, utilizzeremo:

✓ per indicare il risultato  $\mathbf{t}$ ,

? per indicare risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato  $\mathbf{f}$ .

Fatto ciò, sarà molto facile leggere sulla mappa—raggruppando opportunamente insieme le caselle contrassegnate—un enunciato che specifichi  $b$ . La Fig. 3 esemplifica quest'impiego di una mappa  $K$ .

## 5.3 Inferenze formali

Cosa significa INFERIRE  $\vartheta$  da  $A$ ? Attenendoci a una *particolare versione del calcolo proposizionale* [Church, 1956], possiamo rispondere come segue.

<sup>4</sup>In altre parole,  $\ell$  è il numero di argomenti su cui opera  $b$ .

$pq \setminus rs$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Figura 3: Mappa K descrivente una funzione  $b$  tale che  $b(\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{t}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{t}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{t}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}) = b(\mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}$  e che  $b(\mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{f}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{f}) = b(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}) = \mathbf{f}$ . Da questa mappa balza all'occhio un enunciato che descrive la  $b$ :  $\neg p \vee (s \& \neg r) \vee (q \& \neg q)$  (in alternativa, appena meno evidente,  $\neg p \vee (s \& \neg q) \vee (r \& \neg r)$ ).

Diremo che la sequenza

$$\boldsymbol{\delta} = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è una DIMOSTRAZIONE di  $\vartheta$  da  $A$  quando:

- 1)  $\delta_h = \vartheta$ ;
- 2) per ogni  $i = 0, \dots, h$ , accade che  $\delta_i$  sia un enunciato di  $\mathbb{P}$  che
  - ★ appartiene ad  $A$ , oppure
  - ★ ricade in uno dei tre schemi della Fig. 4, oppure
  - ★ è *preceduto* da due enunciati  $\delta_{j_0}$  e  $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$ ,  
nel senso che  $j_0 < i$  e  $j_1 < i$ .

i.	$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$
ii.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
iii.	$((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

Figura 4: Tre schemi di tautologia (Alonzo Church, 1956). Nello schema iii è ravvisabile la ben nota *legge di contrapposizione*.

**Esempio 1** Dimostriamo in 9 passi l'enunciato  $f \Rightarrow p$  da  $\emptyset$ , come segue:

	Ass.		Prem.
1. $f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]		
2. $(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4. $((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5. $f \Rightarrow f$	[3, 4]
6. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7. $(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8. $((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9. $f \Rightarrow p$	[7, 8]

Definiamo ora (per il CALCOLO PROPOSIZIONALE):

$A \vdash \vartheta$  se e solo se esiste una dimostrazione di  $\vartheta$  da  $A$ .

Com'è intuibile, l'adozione di particolari schemi—in questa nostra proposta gli i, ii, iii—quali ASSIOMI LOGICI non è univoca ma neppure arbitraria; criterio-guida è, comunque, far sí che viga la seguente proposizione:

**Teorema 7 (Correttezza e completezza)** Per  $A \subseteq \mathcal{P}$  e  $\vartheta$  in  $\mathcal{P}$ ,

$A \models \vartheta$  se e solo se  $A \vdash \vartheta$ .

Proprio in base a tale criterio Church avanzò la proposta mostrata in Fig. 4; vedremo altre due proposte ad essa equipollenti nell'Appendice A.

## Riferimenti bibliografici

Alonzo Church. *Introduction to mathematical logic*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1956.

Martin Davis. *Lecture Notes in Logic*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1993.

Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Hartcourt/Academic Press, Burlington, MA, USA, 2<sup>nd</sup> edition, 2001.

Ludwig J. J. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus*. 1922. <http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>.

## A Esempi di tautologie

Gli schemi di tautologia presentati nelle Figg. 4, 5, 6 riflettono tre delle innumerevoli proposte avanzate nel secolo scorso su come dare veste assiomatica alla LOGICA PROPOSIZIONALE STANDARD,<sup>5</sup> intesa come logica booleana mi-

<sup>5</sup>Cfr. [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_logic\\_systems](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_logic_systems).

nimale che scaturisce da un'infinità numerabile di generatori liberi. Partendo dagli schemi d'assioma—tre nel caso della Fig. 4, quattro stando alla Fig. 5, uno solo in Fig. 6—e adoperando la regola d'inferenza nota come *modus ponens* (v. prima parte dell'Esercizio 4), si possono ricavare tutte e sole le tautologie di tale logica.

$$\boxed{
 \begin{array}{c}
 (\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma \\
 \alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha \\
 ((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \\
 f \Rightarrow \bullet
 \end{array}
 }$$

Figura 5: Quattro schemi di tautologia (Willard Van Orman Quine, 1938). **N.B.:** Dove mancano parentesi, associare a destra.

$$\boxed{
 (((((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\gamma \Rightarrow f) \Rightarrow (\delta \Rightarrow f)))) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow ((\varepsilon \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\delta \Rightarrow \alpha))
 }$$

Figura 6: Schema tautologico 'totipotente' (Carew Arthur Meredith, 1952).

**Esercizio 11** Verificare che ogni enunciato di una delle 8 forme che compaiono nelle Figg. 4, 5, 6 è davvero una tautologia. (Suggerimento: Procedere per *reductio ad absurdum*).

## B Esercizi svolti

**Esercizio 12** Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato  $\alpha$ :

$$f \vdash \alpha .$$

**Soluzione Es. 12.** Abbiamo che:

$$\begin{array}{ll}
 f \vdash f & (L1) \\
 \therefore f, \alpha \Rightarrow f \vdash f & (\text{monotonicità, i.e. } L2) \\
 \therefore f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f & (\text{deduzione, i.e. } B1) \\
 \therefore f \vdash \alpha & (\text{doppia negazione, i.e. } B2; \text{ taglio, i.e. } L4)
 \end{array}$$

' $\therefore$ ' sta a rappresentare il 'pertanto'.

⊢

**Soluzione Es. 1.** Grazie a  $L1$  abbiamo  $f \vdash f$ ; ma allora, tramite  $B1$ , otteniamo  $\vdash f \Rightarrow f$ . Nella logica in questione c'è un enunciato solo; perciò, derivando da  $\emptyset$  un enunciato, li abbiamo in pratica derivati tutti e con ciò abbiamo stabilito l'inconsistenza. ⊢

**Soluzione Es. 3.** Sfruttando la soluzione dell'Esercizio 12, da  $A \vdash f$  possiamo ricavare  $A \vdash \alpha$  per qualsiasi  $\alpha$ , grazie al taglio ( $L4$ ). ⊢

**Soluzione Es. 4.**  $L1$  ci dà che  $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ ; inoltre il principio di deduzione  $B1$  ci dà che  $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  sse  $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ . Ciò risolve la prima parte dell'esercizio.

Inoltre, per il principio di deduzione, se  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  allora  $A, \alpha \vdash \beta$ ; così, grazie a  $L4$  (il taglio), abbiamo che se  $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$  ed  $A \vdash \alpha$ , allora  $A \vdash \beta$ . ⊢

**Soluzione Es. 5.** L'inconsistenza di  $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$  dà che  $A, \beta \Rightarrow f \vdash f$ , onde (per  $B1$ )  $A \vdash (\beta \Rightarrow f) \Rightarrow f$ ; ma allora, per  $B2$  e per taglio,  $A \vdash \beta$ . ⊢

**Soluzione Es. 6.** In base alla Def. 6, per ogni assegnamento  $\mathbf{q}$  è (vacuamente) vero che  $\mathbf{q}$  verifica  $\emptyset$ . Perciò, in base alla Def. 7, dire che  $\alpha$  è una tautologia equivale ad asserire che qualsiasi assegnamento verifichi  $\emptyset$  rende al contempo vero  $\alpha$ . Dunque se  $\alpha$  è una tautologia allora  $\emptyset \vdash \alpha$ , per il teorema chiave. ⊢

**Soluzione Es. 9.** Conveniamo d'intendere la definizione

$$\gamma \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} (\beta_{i_1,1} \& \dots \& \beta_{i_1,\ell}) \vee \dots \vee (\beta_{i_g,1} \& \dots \& \beta_{i_g,\ell})$$

nel senso che  $\gamma = f$  nel caso particolare in cui  $g = 0$ , mentre invece  $\gamma = (\neg f)$  quando  $g = 1$  ma  $\ell = 0$ .

Quando  $v_i = \mathbf{f}$  su ogni riga, possiamo rettificare la definizione di  $\gamma$  ponendo  $\gamma = (\mathbf{p}_1 \& \neg \mathbf{p}_1) \vee \dots \vee (\mathbf{p}_\ell \& \neg \mathbf{p}_\ell)$ . ⊢

**Esercizio 13 (su  $\mathbb{P}$ )** È vero che

$$\{(\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg \mathbf{p}_5\} \models \neg \mathbf{p}_1 ?$$

**Soluzione Es. 13.** Si tratta d'individuare un  $F$  finito incluso nell'insieme delle premesse tale che  $F \cup \{\mathbf{p}_1\} \models f$ . Un  $F$  adatto è

$$\{\mathbf{p}_1, (\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_2), (\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_3), (\mathbf{p}_3 \rightarrow \mathbf{p}_4), (\mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p}_5), \neg \mathbf{p}_5\}.$$

⊢