ESPOSIZIONE ATTUARIALE E FREQUENZE DI DECESSO

Per stimare q_x ovvero m_x, per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$,sono state introdotte, in ambito attuariale, le stime ottenute rapportando il numero di decessi osservati ad una qualche misura di esposizione.

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ e con riferimento agli individui i che contribuiscono alla osservazione per tale classe di età si definiscono

$S = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ è in vita all'età } x + s_i\}$ *survival*

$D = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per morte all'età } x + t_i\}$ *death*

$W = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per altra causa all'età } x + k_i\}$ *withdrawal*

Sia

$\theta_x = \# D$ il numero di individui che decedono nella classe di età $]x, x+1]$

Stime per $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$

Def. **Frequenza (grezza) di decesso**

$$\overset{o}{q}_x = \frac{\theta_x}{E_x}$$

essendo E_x l'**esposizione attuariale o numero iniziale di esposti al rischio**

$$E_x = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i)$$

Stime per $m_x = \dfrac{d_x}{L_x}$ per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$

Def. **Frequenza (grezza) centrale di decesso**

$$\overset{o}{m}_x = \frac{\theta_x}{E_x^C}$$

essendo E_x^C il **numero centrale di esposti al rischio**

$$E_x^C = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i) - \sum_{i \in D} (1 - t_i)$$

Osservazione

Ricordando la relazione $L_x = l_x - d_x(1-\bar{t}_x)$ si nota che si ha

$$E_x^C = E_x - \sum_{i \in D} (1 - t_i)$$

Giustificazione di Cantelli

Sia D_x il n.a. dei decessi nella classe di età $]x, x+1]$; si stima q_x con il metodo dei momenti, ponendo

$$E(D_x) = \theta_x$$

Poiché

$$E(D_x) = \sum_{i \in S \cup D \cup W} {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - \sum_{i \in S} {}_{1-s_i}q_{x+s_i} - \sum_{i \in W} {}_{1-k_i}q_{x+k_i}$$

nell’ipotesi di interpolazione iperbolica si ha ${}_{1-r}q_{x+r} = (1-r)\, q_x$, quindi

$$E(D_x) = q_x \left[\sum_{i \in S \cup D \cup W} (1-r_i) - \sum_{i \in S} (1-s_i) - \sum_{i \in W} (1-k_i) \right] = q_x\, E_x$$

Da cui si ottiene la stima con il metodo dei momenti: $\overset{o}{q}_x = \dfrac{\theta_x}{E_x}$

Osservazioni

- Nella valutazione si ipotizza “uguale mortalità” per i soggetti che rimangono nella collettività, per i nuovi ingressi e per coloro che escono per altra causa

- La giustificazione di Cantelli è errata in quanto le valutazioni relative ad uno stesso individuo sono fatte in stati di informazione diversi

- θ_x è il numero di decessi osservati con età esatta nella classe di età $]x, x+1]$.

  Poiché si contano i decessi nell’anno che inizia con l’età esatta x e termina con l’età esatta $x+1$ si dice che si prende come **riferimento l’anno di vita** compreso tra due compleanni.

  Per coerenza, anche nella valutazione dell’esposizione si prende come riferimento l’anno di vita. Infatti, disponendo di dati individuali esatti si determina per ciascun individuo la sua esposizione nell’anno di vita, infatti si ha

$$E_x = \sum_{i \in S}(s_i - r_i) + \sum_{i \in W}(k_i - r_i) + \sum_{i \in D}(1 - r_i)$$

  Nota: per gli individui che decedono il contributo all’esposizione è $\sum_{i \in D}(1 - r_i)$

RIFERIMENTO: ANNO DI VITA, ANNO DI POLIZZA E ANNO DI CALENDARIO

Talvolta non è disponibile l'informazione sulla data di nascita dell'individuo osservato e non si è allora in grado di calcolare l'età esatta in cui si verifica un determinato evento (per esempio la morte o l'uscita per altra causa).

Le valutazioni non possono allora essere fatte prendendo come riferimento <u>l'anno di vita</u>.

Ciò tipicamente avviene quando alla stipulazione della polizza si attribuisce all'assicurato una età arrotondata (intera); in tal caso si dirà che si prende come riferimento <u>l'anno di polizza</u>.

Un'altra eventualità si ha nel caso in cui agli individui sia attribuita un'età arrotondata ad una certa data (per esempio all'1/1), come avviene spesso per i fondi pensione; in tal caso si dirà che si prende come riferimento <u>l'anno di calendario</u>.

<u>Definizione</u>

Diremo che un individuo ha **età arrotondata** (intera) x ad una certa data (per es. un anniversario di polizza oppure all'1 gennaio) se in quella data ha età esatta nell'intervallo

$$\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right[$$

<u>Conteggio dei decessi prendendo come riferimento l'anno di polizza</u>

Alla stipulazione della polizza si attribuisce all'assicurato l'età arrotondata (intera).

Si definisce **data di nascita di valutazione**, la data in cui giorno e mese coincidono con il giorno ed il mese di stipulazione della polizza, l'anno è dato da

anno di stipulazione della polizza $-$ età arrotondata alla stipulazione della polizza

Utilizzando tale data di nascita di valutazione al posto della data di nascita e conoscendo

la data di ingresso in osservazione,

la data di uscita dall'osservazione e la causa di uscita

si è in grado di determinare il vettore delle età $(y_i, z_i, \theta_i, \phi_i,)$

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ si è in grado di determinare il vettore delle durate $(r_i, s_i, t_i, k_i,)$

essendo

r_i la durata di tempo dall'anniversario di polizza precedente all'ingresso in osservazione nella classe di età $]x, x+1]$ con $0 \le r_i < 1$ e

$$r_i = \begin{cases} 0 & se\ y_i \le x \\ y_i - x & se\ x < y_i < x+1 \end{cases}$$

s_i la durata di tempo dall'anniversario di polizza precedente all'uscita dalla osservazione per la classe di età $]x, x+1]$ con $0 < s_i \le 1$ e

$$s_i = \begin{cases} 1 & se\ z_i \ge x+1 \\ z_i - x & se\ x < z_i < x+1 \end{cases}$$

Poiché, nei casi di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa

$x + t_i$ non è più l'età esatta di uscita per morte, ma t_i è la durata di tempo dall'anniversario di polizza precedente all'uscita per morte

$x + k_i$ non è più l'età esatta di uscita per altra causa, ma k_i è la durata di tempo dall'anniversario di polizza precedente all'uscita per altra causa

si dice che si prende come **riferimento l'anno di polizza** in quanto si considerano gli eventi che avvengono nell'anno di polizza.

Si ha allora che

θ_x è il numero di decessi osservati per gli assicurati nell'anno di polizza $]x, x+1]$

Anche nella valutazione dell'esposizione si prende come riferimento l'anno di polizza, conteggiando le esposizioni tra due anniversari di polizza.

$$E_x = \sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i) + \sum_{i \in D} (1 - r_i)$$

Le stime

$$\overset{o}{q}_x = \frac{\theta_x}{E_x} \qquad \overset{o}{m}_x = \frac{\theta_x}{E_x^C} \text{ per } x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

forniscono delle stime per, rispettivamente,

$$q_{x+f} \qquad m_{x+f}$$

Essendo

$$-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$$

Nel caso di distribuzione uniforme delle stipulazioni delle polizze rispetto agli anni di vita, ovvero di distribuzione uniforme dei compleanni rispetto all’anno di polizza, si può assumere

$$f = 0$$

e quindi $\overset{o}{q}_x$ e $\overset{o}{m}_x$ forniscono delle stime per, rispettivamente, q_x e m_x

Conteggio dei decessi prendendo come riferimento l'anno di calendario

Nelle assicurazioni collettive o nei fondi pensione, c'è una data prefissata, per esempio l'1/1, chiamata **data di valutazione del fondo** ed agli assicurati viene attribuita l'età arrotondata (intera) in tale data.

Si dice allora che si prende come **riferimento l'anno di calendario** dall'1/1 al 31/12.

È come se tutte le polizze fossero stipulate nella stessa data ed a tutti gli assicurati si attribuisse l'età arrotondata in tale data.

Analogamente a quanto visto nel caso in cui si prenda come riferimento l'anno di polizza, si definisce per ogni individuo osservato, la data di nascita di valutazione, il vettore delle età $(y_i, z_i, \theta_i, \phi_i,)$ e, con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ il vettore delle durate $(r_i, s_i, t_i, k_i,)$

Poiché generalmente l'intervallo di osservazione inizia all'1/1 di un certo anno e termina al 31/12 di qualche anno dopo, per ogni individuo osservato si ha $r_i = 0$ e $s_i = 1$.

Poiché, nei casi di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa

$x+t_i$ non è più l'età esatta di uscita per morte, ma t_i è la durata di tempo dalla data di valutazione del fondo precedente all'uscita per morte

$x+k_i$ non è più l'età esatta di uscita per altra causa, ma k_i è la durata di tempo dalla data di valutazione del fondo precedente all'uscita per altra causa

si dice che si prende come **riferimento l'anno di calendario** in quanto si considerano gli eventi che avvengono nell'anno di calendario.

Si ha allora che

θ_x è il numero di decessi osservati per gli assicurati nell'anno di calendario $]x, x+1]$

Anche nella valutazione dell'esposizione si prende come riferimento l'anno di calendario, conteggiando le esposizioni tra due date di valutazione del fondo.

Le stime

$$\overset{o}{q}_x = \frac{\theta_x}{E_x} \qquad \overset{o}{m}_x = \frac{\theta_x}{E_x^C} \qquad \text{per } x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

forniscono delle stime per, rispettivamente,

$$q_{x+f} \qquad m_{x+f}$$

Essendo

$$-\frac{1}{2} \le f < \frac{1}{2}$$

Nel caso di distribuzione uniforme dei compleanni nell'anno di calendario, si può assumere

$$f = 0$$

e quindi $\overset{o}{q}_x$ e $\overset{o}{m}_x$ forniscono delle stime per, rispettivamente, q_x e m_x

Talvolta si attribuisce come età arrotondata intera ad una data di valutazione del fondo, l'età raggiunta all'ultimo compleanno.

Definizione

Diremo che un individuo ha **età troncata** (intera) x all'1/1 di un certo anno se in quella data ha età esatta nell'intervallo $[x, x+1[$

θ_x è il numero di decessi osservati con età troncata x all'1/1 precedente al decesso

Le stime $\overset{o}{q}_x = \dfrac{\theta_x}{E_x}$ $\overset{o}{m}_x = \dfrac{\theta_x}{E_x^C}$ per $x = a, a+1, \ldots, \omega - 1$

forniscono delle stime per, rispettivamente,

q_{x+f} m_{x+f} essendo $0 \leq f < 1$

Nel caso di distribuzione uniforme dei compleanni nell'anno di calendario, si può assumere

$$f = \frac{1}{2}$$

e quindi $\overset{o}{q}_x$ e $\overset{o}{m}_x$ forniscono delle stime per, rispettivamente, $q_{x+1/2}$ e $m_{x+1/2}$

FREQUENZE DI DECESSO PER TAVOLE SELEZIONATE

Un modello di sopravvivenza selezionato è definito mediante una famiglia di funzioni di sopravvivenza

$$S(t;x) \qquad t \geq 0 \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

dove

x è l'età (intera) di ingresso in assicurazione

t è l'antidurata dell'assicurazione

Una **tavola di mortalità selezionata** è definita da un insieme di sequenze del tipo

$$\begin{array}{llll} l_{[a]} & l_{[a]+1} & l_{[a]+2} & \cdots \\ l_{[a+1]} & l_{[a+1]+1} & l_{[a+1]+2} & \cdots \\ \dots & & & \\ l_{[x]} & l_{[x]+1} & l_{[x]+2} & \cdots \\ \dots & & & \end{array}$$

dove

$$l_{[x]+t} = l_{[x]} \cdot S(t;x)$$

$$x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

$$t = 0, 1, \dots$$

Per stimare un modello di sopravvivenza selezionato si determinano le frequenze di decesso per le diverse età di ingresso in assicurazione e antidurate.

Poiché l'età (intera) di ingresso in assicurazione è l'età arrotondata all'emissione della polizza e l'antidurata è il numero di anni in cui l'individuo è presente in assicurazione, si prende come riferimento l'anno di polizza.

Con riferimento all'età arrotondata x di ingresso in assicurazione e all'intervallo di antidurate $]t, t+1]$,il vettore delle durate $(r_i, s_i, t_i, k_i,)$ dell'individuo i che contribuisce alla osservazione per l'intervallo di antidurate $]t, t+1]$ è così definito

r_i con $0 \le r_i < 1$ tale che r_i è l'antidurata esatta all'ingresso in osservazione nell'intervallo di antidurate $]t, t+1]$

s_i con $0 < s_i \le 1$ tale che s_i è l'antidurata esatta all'uscita dall'osservazione dell'intervallo di antidurate $]t, t+1]$

t_i con $0 < t_i \le 1$ tale che $t + t_i$ è l'antidurata totale esatta all'uscita per morte

k_i con $0 < k_i \le 1$ tale che $t + k_i$ è l'antidurata totale esatta all'uscita per altra causa

Si definisce

$\theta_{[x]+t}$ il numero di decessi osservati per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x e con antidurata esatta in $]t, t+1]$

$E_{[x]+t}$ il numero iniziale di esposti al rischio nell'anno di polizza $]t, t+1]$, per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x

$$E_{[x]+t} = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i)$$

Si definisce la **frequenza di decesso**

$$\overset{o}{q}_{[x]+t} = \frac{\theta_{[x]+t}}{E_{[x]+t}}$$

che fornisce una stima di $q_{[x+f]+t}$ con $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$

Nel caso di distribuzione uniforme dei compleanni nell'anno di polizza si può assumere $f = 0$ e quindi $\overset{o}{q}_{[x]+t}$ fornisce una stima di $q_{[x]+t}$

Indicato con

$E^{C}_{[x]+t}$ il numero centrale di esposti al rischio nell'anno di polizza $]t, t+1]$, per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x

$$E^{C}_{[x]+t} = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i) - \sum_{i \in D} (1 - t_i)$$

si definisce la **frequenza centrale di decesso**

$$\overset{o}{m}_{[x]+t} = \frac{\theta_{[x]+t}}{E^{C}_{[x]+t}}$$

che fornisce una stima di $m_{[x+f]+t}$

Poiché l'effetto della selezione si esaurisce entro un certo numero t' di anni

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \cdots < q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = q_{[x-t'-2]+t'+2} = \cdots = q_{[a]+x-a}$$

si definiscono le tavole selezionate ridotte

$$\begin{array}{cccccc}
l_{[a]} & l_{[a]+1} & l_{[a]+2} & \cdots & l_{[a]+t'-1} & l_{(a+t')} \\
l_{[a+1]} & l_{[a+1]+1} & l_{[a+1]+2} & \cdots & l_{[a+1]+t'-1} & l_{(a+t'+1)} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
l_{[x]} & l_{[x]+1} & l_{[x]+2} & \cdots & l_{[x]+t'-1} & l_{(x+t')} \\
\vdots & & & & & \vdots
\end{array}$$

dove $l_{[a]}$ è la radice della tavola e $l_{[x]}$ è tale che

$$l_{[x]} \cdot S(t';x) = l_{(x+t')} \qquad x = a+1, a+2, \dots, \omega - 1$$

Indichiamo con

$$q(x) = q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = \cdots = q_{[a]+x-a}$$ con $x = a + t$ e $t = t', t'+1, \dots$

Per stimare

$$q(x) = q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = \cdots = q_{[a]+x-a} \qquad \text{con } x = a + t \quad \text{e} \quad t = t', t'+1, \ldots$$

si continua a prendere come riferimento l'anno di polizza e si considerano le frequenze di decesso

$$\overset{o}{q}_{(x)} = \frac{\theta_{(x)}}{E_{(x)}}$$

essendo

$$\theta(x) = \theta_{[x-t']+t'} + \theta_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + \theta_{[a]+x-a}$$

$$E(x) = E_{[x-t']+t'} + E_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + E_{[a]+x-a}$$

oppure le frequenze centrali di decesso

$$\overset{o}{m}_{(x)} = \frac{\theta_{(x)}}{E^{C}_{(x)}}$$

essendo

$$E^C(x) = E^C{}_{[x-t']+t'} + E^C{}_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + E^C{}_{[a]+x-a}$$