

Un accenno alla *logica proposizionale*

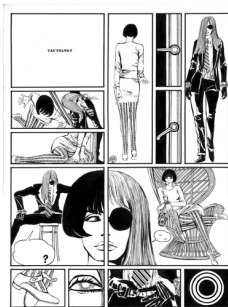
(06/03/2019)

Eugenio G. Omodeo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale



- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale



- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo

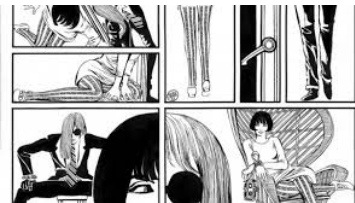


- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica così semplice



- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica così semplice
- Sintesi di circuiti combinatori (A seguire)





Sintassi



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

$(,), \rightarrow, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.



ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

(,) , \rightarrow , p_0 , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , ...

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

(E se volessimo ridurci ad un alfabeto finito ?)



PAROLE

Con la notazione

$$“\sigma_1 \cdots \sigma_h” ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_h \rangle ,$$

ovvero un'*h*-upla, con un numero qualsiasi *h* di componenti,
formata di simboli σ_i



LETTERE PROPOSIZIONALI

Indichiamo con

$f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots$

lettere proposizionali

la successione di 1-uple

“ p_0 ”, “ p_1 ”, “ p_2 ”, “ p_3 ”, “ p_4 ”, “ p_5 ”, “ p_6 ”, ...



L'IMPLICAZIONE MATERIALE

Definiamo l'operazione $\sigma \Rightarrow \rho$ per ogni coppia

$$\sigma = \text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}, \quad \rho = \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”}$$

di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \Rightarrow \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”} \quad =_{\text{Def}} \quad \text{“}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \rho_1 \cdots \rho_k)\text{”}$$



ECCO GLI ENUNCIATI:

Definiamo \mathcal{P} il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{ f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots \}$$

tale che per ogni coppia α, β di parole in \mathcal{P} anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a \mathcal{P}



Un linguaggio provvisorio per la logica proposizionale è dato dalla seguente grammatica:

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF:

$$\langle \text{enunc} \rangle ::= \langle \text{Let} \rangle \mid \langle \text{Cost} \rangle \mid (\langle \text{enunc} \rangle \langle \text{Bop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle)$$
$$\langle \text{Let} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid s \mid \langle \text{Let} \rangle'$$
$$\langle \text{Cost} \rangle ::= f$$
$$\langle \text{Bop} \rangle ::= \rightarrow$$

ove la categoria sintattica principale è l'*enunciato*, $\langle \text{enunc} \rangle$.





Semantica



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

ECCO LA TABELLA DELL'IMPLICAZIONE:

		\Rightarrow
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

Osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{J} \in \{ \mathbf{f}, \mathbf{v} \}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{J}}$ definita per tutti gli enunciati α , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

In particolare: $f^{\mathcal{J}} = \mathbf{f}$, $(f \Rightarrow f)^{\mathcal{J}} = \mathbf{v}$ e,

per ogni enunciato α , $(\alpha \Rightarrow f)^{\mathcal{J}}$ è il contrario di $\alpha^{\mathcal{J}}$





Apparato deduttivo



i.	$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$
ii.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
iii.	$((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$



Diremo che la sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è una **dimostrazione** di ϑ da A quando:

- 1) $\delta_h = \vartheta$;
- 2) per ogni $i = 0, \dots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in \mathcal{P} che o:
 - ★ appartiene ad A , oppure
 - ★ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure
 - ★ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.



Esempio di dimostrazione

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \Rightarrow p$ da \emptyset , come segue:

	Ax.		Prem.
1. $f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]		
2. $(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4. $((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5. $f \Rightarrow f$	[3, 4]
6. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7. $(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8. $((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9. $f \Rightarrow p$	[7, 8]





Guardando avanti...



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$ab \equiv pq \ \& \ ab \equiv rs \ \rightarrow \ pq \equiv rs$	(TE)
$ab \equiv cc \ \rightarrow \ a = b$	(IE)
$\exists x (B qax \ \& \ ax \equiv bc)$	(SC)
$a \neq b \ \& \ B abc \ \& \ B a'b'c' \ \& \ ab \equiv a'b' \ \& \ bc \equiv b'c' \ \& \ ad \equiv a'd' \ \& \ bd \equiv b'd' \ \rightarrow \ dc \equiv c'd'$	(FS)
$B aba \ \rightarrow \ a = b$	(IB)
$B apc \ \& \ B bqc \ \rightarrow \ \exists x (B pxb \ \& \ B qxa)$	(IP)
$\exists a \exists b \exists c (\neg B abc \ \& \ \neg B bca \ \& \ \neg B cab)$	(Lo ₂)
$p \neq q \ \& \ ap \equiv aq \ \& \ bp \equiv bq \ \& \ cp \equiv cq \ \rightarrow \ B abc \vee B bca \vee B cab$	(Up ₂)
$B adt \ \& \ B bdc \ \& \ a \neq d \ \rightarrow \ \exists x \exists y (B abx \ \& \ B acy \ \& \ B xty)$	(Eu)
$\exists a \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \ \rightarrow \ B axy) \ \rightarrow \ \exists b \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \ \rightarrow \ B xby)$	(Co)

- (TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
- (IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
- (SC) Assioma di costruzione di segmenti
- (FS) Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
- (IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
- (IP) Assioma interno di Pasch
- (Lo₂) Assioma 2-dimensionale inferiore
- (Up₂) Assioma 2-dimensionale superiore
- (Eu) Assioma euclideo
- (Co) Assioma di continuità

