

Da Maxwell a Schrödinger

Dalle equazioni di Maxwell si ricava l'equazione d'onda

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

P è il vettore di polarizzazione che esprime la polarizzazione indotta.

Ricavare un'espressione accurata in funzione di E è complicato e richiede l'ausilio della meccanica quantistica ma lontano dalle frequenze di risonanza del mezzo si può descrivere P con i tensori di suscettibilità $\chi^{(i)}$

$$P = \epsilon_0 (\chi^{(1)} * E + \chi^{(2)} * E * E + \chi^{(3)} * E * E * E + \dots)$$

Per la silice si considera solo $\chi^{(1)}$ (polarizzazione lineare) e $\chi^{(3)}$

Il vettore di polarizzazione può essere decomposto in una parte lineare e una parte non lineare

$$P(r,t) = P_L(r,t) + P_{NL}(r,t)$$

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} = 0$$

Supponiamo che

- P_{NL} sia piccola rispetto a P_L

-il campo mantenga il suo stato di polarizzazione nella propagazione in fibra

-Detta $\Delta\omega$ la larghezza spettrale e ω_0 la frequenza centrale sia $\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$ cioè i campi siano lentamente variabili

$\bar{E}(r,t)$ sia l'involuppo del vettore campo $E(r,t)$

Indicando con $E(r, \omega - \omega_0)$ la trasformata di Fourier della funzione $\bar{E}(r,t)$

$$\nabla^2 E + (1 + \chi^{(1)} + \epsilon_{NL}) k_0^2 E = 0$$

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\bar{E}|^2 \text{ da cui } n = \sqrt{\epsilon_L + \epsilon_{NL}} \cong n_0 + \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{n_0} \frac{|\bar{E}|^2}{2} = n_0 + n_2 |\bar{E}|^2$$

n_2 prende il nome di coefficiente non lineare dell'indice di rifrazione o coefficiente di Kerr

L'equazione d'onda può essere risolta con il metodo di separazione delle variabili

$$E(r, \omega - \omega_0) = F(x,y) A(r, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}$$

Si ottengono le seguenti equazioni differenziali per F e per A

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \beta^2]F = 0$$

$$2j\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + [\beta^2 - \beta_0^2]A \cong 0 \quad \varepsilon(\omega)k_0^2 = \beta_0^2 \text{ per } \omega = \omega_0$$

Prima di tornare nel dominio del tempo si espande in serie di Taylor

$\beta(\omega_0)$ attorno al punto $\omega = \omega_0$.

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1 \Delta\omega + \frac{1}{2}\beta_2 (\Delta\omega)^2 + \frac{1}{6}\beta_3 (\Delta\omega)^3 + \dots$$

$$\beta_n = \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

Supponendo che β vari di $\Delta\beta$ per una variazione Δn dell'indice dovuta alla non linearità dovuta alla non linearità

indicando con $a(z,t)$ l'antitrasformata di Fourier di $A(z, \omega - \omega_0)$

$$\frac{\partial a(z,t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}i\beta_2 \frac{\partial^2 a(z,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 a(z,t)}{\partial t^3} + \frac{\alpha}{2}a(z,t) + j\Delta\beta a(z,t) = 0$$

$$\frac{\partial a(z,t)}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial a(z,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}i\beta_2 \frac{\partial^2 a(z,t)}{\partial t^2} + j\Delta\gamma |a(z,t)|^2 a(z,t)$$

γ è un coefficiente non lineare che dipende dalla non linearità n_2 ma anche da un parametro detto area efficace della fibra che tiene conto della configurazione di campo

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}}$$

Questa è l'equazione di propagazione che governa l'evoluzione di un impulso in una fibra dispersiva e che presenta una non linearità di tipo Kerr trascurando le perdite e la dispersione del terzo ordine.

ALLARGAMENTO

Mediante la separazione delle variabili il campo E ad una determinata frequenza può essere scritto come

$$\tilde{E}(r, \omega) = \hat{e} F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \quad \tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(z=0, \omega) e^{j\beta z} = \tilde{A}_0 e^{j\beta z}$$

\hat{e} rappresenta il versore polarizzazione

$\tilde{A}(z, \omega)$ rappresenta l'ampiezza della componente sinusoidale alla frequenza ω

$F(x, y)$ è la configurazione trasversale del campo

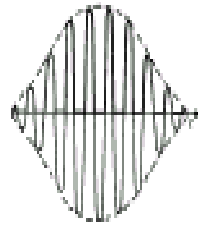
Se invece di una singola componente sinusoidale si propaga un segnale di spettro che modula una portante ω_0 ,

$$E(r, \omega) = \hat{e} F(x, y) G(z, \omega)$$

$$G(z, \omega) = G(z=0, \omega) e^{j\beta z}$$

la sua trasformata

$$g(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

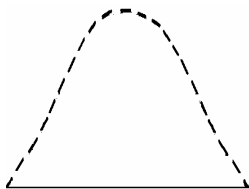


Se ci si riferisce alla frequenza della portante ω_0 e si espande $\beta(\omega)$ in serie di Taylor intorno a ω_0

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1 \Delta\omega + \frac{1}{2} \beta_2 (\Delta\omega)^2 + \frac{1}{6} \beta_3 (\Delta\omega)^3 + \dots$$

$$\beta_n = \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

$a(z, t)$ rappresenta il profilo temporale del segnale riportato in banda base



$$g(z, t) = a(z, t) e^{j\beta_0 z} e^{-j\omega_0 t}$$

per cui $A(0, \Delta\omega) = G(0, \omega - \omega_0)$

l'andamento temporale dell'impulso è regolato dall'equazione

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} i \beta_2 \frac{\partial^2 a(z, t)}{\partial t^2} - j \gamma_{NL} |a(z, t)|^2 a(z, t) = 0$$

Cerchiamo delle soluzioni parziali

I CASO

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} = 0$$

ha come soluzione un qualsiasi $a(z, t)$ tale che

$$a(z, t) = a\left(z - \frac{1}{\beta_1} t\right) \quad \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = v_g$$

cioè un campo che viaggia con velocità di gruppo costante e quindi non subisce distorsione ma solo ritardo

II CASO

Se β_2 è diverso da 0 il mezzo è dispersivo e l'equazione della propagazione diviene

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} i \beta_2 \frac{\partial^2 a(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

(trascurando l'effetto dovuto a β_1)

Passando nel dominio della trasformata di Fourier si ha

$$\frac{\partial A(z, \Delta\omega)}{\partial z} + \frac{1}{2} i \beta_2 [-(\Delta\omega)^2 A(z, \Delta\omega)] = 0$$

La cui soluzione è

$$A(z, \Delta\omega) = A(z=0, \Delta\omega) e^{j \frac{1}{2} \beta_2 (\Delta\omega)^2 z}$$

Che antitrasformando fornisce la soluzione $a(z, t)$

Esempio :consideriamo il caso in cui $a(z=0, t)$ cioè il segnale all'ingresso sia una gaussiana che ha come antitrasformata ancora una gaussiana

$$a(z=0, t) = a_o e^{-\frac{t^2}{2T_o^2}} \quad \leftrightarrow \quad A(z=0, \Delta\omega) \propto e^{-\frac{1}{2} T_o^2 (\Delta\omega)^2}$$

$$A(z, \Delta\omega) = A(z=0, \Delta\omega) e^{j \frac{1}{2} \beta_2 (\Delta\omega)^2 z} \quad A(z, \Delta\omega) \propto e^{-\frac{1}{2} (\Delta\omega)^2 (T_o^2 - j \beta_2 z)}$$

$$|a(z, t)| = a_o e^{-\frac{t^2}{2T_1^2}} \quad T_1^2 = |T_o^2 - j \beta_2 z| = T_o^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_o^2}\right)^2}$$

Poiché

$$\beta_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = - \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega}$$

Se β_2 diverso da 0 la velocità di propagazione dipende dalla frequenza

Può essere $\beta_2 > 0$ per cui ho DISPERSIONE NORMALE

$$\frac{\partial v_g}{\partial \omega} < 0 \text{ Le alte frequenze sono più lente}$$

$\beta_2 < 0$ per cui ho DISPERSIONE ANOMALA

$$\frac{\partial v_g}{\partial \omega} > 0 \text{ Le alte frequenze sono più veloci}$$

Sia in regime di dispersione normale che di dispersione anomala la conseguenza della dispersione cromatica è un allargamento temporale dell'impulso

Valori tipici della dispersione sono

Fibre STEP-INDEX

$$\beta_2 \quad \lambda \cong 1300 \text{ nm} \quad \cong 0$$

$$\beta_2 \quad \lambda \cong 1550 \text{ nm} \quad = -20 \text{ ps}^2 / \text{km}$$

Fibre DISPERSION-SHIFTED

$$\beta_2 \quad \lambda \cong 1300 \text{ nm} \quad > 0$$

$$\beta_2 \quad \lambda \cong 1550 \text{ nm} \quad = -0.5 \text{ ps}^2 / \text{km}$$

III CASO

Presenza di un comportamento non lineare dovuto all'effetto KERR

E' un effetto che si manifesta nella propagazione di un fascio ottico che comporta la dipendenza dell'indice di rifrazione dall'intensità dell'onda che si propaga

$$n(\omega) = n_{\text{LIN}}(\omega) + n_2 |E|^2$$

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} = j \gamma_{\text{NL}} |a(z, t)|^2 a(z, t)$$

la cui soluzione è $a(z, t) = a(0, t) e^{j \gamma_{\text{NL}} |a(z, t)|^2 z}$

L'effetto non lineare dà quindi luogo ad una auto modulazione della fase (SPM Self Phase Modulation) cioè provoca una variazione della fase istantanea dell'impulso (chirp) lungo z in dipendenza dell'intensità istantanea dell'impulso stesso per cui il segnale si modula in fase propagandosi e la non linearità causa un allargamento dello spettro dell'impulso

$$\gamma_{NL} \cong 2 \div 30 \quad \text{W}^{-1}\text{km}^{-1}$$

E' opportuno dare dell'equazione di propagazione una formulazione adimensionale

Si opera un cambio di variabile $T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z$ ottenendo

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -j \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} + j \gamma |a|^2 a$$

Ci si è messi in un sistema di riferimento che si muove con la velocità di gruppo v_g dell'involuppo del campo

Se T_0 è la durata dell'involuppo all'altezza $1/e$ e P_0 la potenza di picco dell'impulso iniziale $a(0,t)$

E' utile introdurre due lunghezze, conosciute come *lunghezza di dispersione* L_D e *lunghezza di non linearità* L_{NL}

che rappresentano le scale di lunghezza sulle quali diventano significativi gli effetti della dispersione e della non linearità. L_D rappresenta la distanza di propagazione per la quale la durata di un impulso gaussiano aumenta di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore iniziale. L_{NL} rappresenta quella distanza di propagazione per la quale la massima variazione di fase dell'impulso risulta unitaria

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

A seconda delle grandezze relative di L_D e L_{NL} e della lunghezza L della fibra, l'impulso evolverà in maniera diversa.

Introduciamo una scala dei tempi normalizzata alla larghezza dell'impulso in ingresso:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0}$$

Similmente introduciamo un'ampiezza normalizzata U tale che :

$$a(z, t) = \sqrt{P_0} u'(z, t)$$

Si ottiene l'equazione

$$j \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} - \frac{1}{L_{NL}} |u'|^2 u'$$

Possiamo distinguere 4 regimi di propagazione :

I Caso $L \ll L_{NL}$; $L \ll L_D$

Come si può vedere dall'equazione per a(z,t) effetti dispersivi e quelli di non linearità non svolgono un ruolo significativo durante la propagazione.

Per L pari a 50km L_D e L_{NL} dovrebbero essere pari a 500Km almeno per una trasmissione libera da distorsioni. Per $\lambda=1550$ nm (III finestra) $|\beta_2| \approx 20 \text{ps}^2/\text{km}$ e $\gamma \approx 3 \text{W}^{-1}\text{km}^{-1}$ per le SMF.

Gli effetti dispersivi e di non linearità possono quindi essere trascurati per $L < 50 \text{Km}$ se $T_0 > 100 \text{ps}$ e $P_0 \sim 1 \text{mW}$.

Si può calcolare, invece, che per un impulso con $T_0 \sim 1 \text{ps}$ e $P_0 \sim 1 \text{W}$ i fenomeni di distorsione diventano già importanti dopo pochi metri.

II Caso $L \ll L_{NL}$; $L \geq L_D$

Possiamo trascurare l'effetto Kerr. L'evoluzione dell'impulso è governata dalla sola GVD. Quindi possiamo applicare il regime di dispersione dominante se i parametri della fibra e dell'impulso sono tali che:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1$$

Quindi per potenze dell'ordine dei mW l'unico effetto rilevante è la GVD.

Questo caso sarà esaminato in dettaglio perché è l'unico in cui possiamo trovare un'espressione analitica dell'impulso in uscita.

III Caso $L \geq L_{NL}$; $L \ll L_D$

Il termine di dispersione è trascurabile. In questo caso l'evoluzione dell'impulso è dominata dalla SPM che porta ad un allargamento spettrale dell'impulso.

IV Caso: $L \geq L_{NL}$; $L \geq L_D$

In questo caso GVD e SPM interagiscono durante la propagazione dell'impulso in fibra.

Nella regione di dispersione anomala ($\beta_2 < 0$) i due fenomeni tendono a compensarsi (è la situazione favorevole alla propagazione solitonica)

Analizzando quest'ultimo caso si introducono ulteriori normalizzazioni

$$Z = \frac{z}{L_D}, \quad T = \tau, \quad N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}$$

In regione di dispersione normale ($\text{sgn}(\beta_2) = +1$) è immediato verificare che la combinazione di SPM e GVD provoca senz'altro un allargamento dell'impulso: in questo caso, infatti, i due effetti tendono a sommarsi dando origine a chirp dello stesso segno.

Diversa è la situazione se si è in regione di dispersione anomala: si intuisce che in questo caso si può avere una compensazione più o meno completa tra il chirp negativo dovuto alla GVD e il chirp positivo dovuto alla SPM; L'entità della compensazione dipende dalla forma dell'impulso e dalla sua potenza. Si pone allora il problema di vedere se esiste un particolare involuppo, con un particolare valore di potenza, per il quale la compensazione sia perfetta, in modo da ottenere un regime di propagazione indistorto.

A tal fine, posto $\text{sgn}(\beta_2) = -1$, è utile normalizzare ulteriormente la funzione U definendo

$$u(Z, T) = N u'(Z, T)$$

Si ottiene così un'equazione, detta equazione di Schrödinger non lineare (NLSE, Non Linear Schrödinger Equation) che risulta

$$j \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + |u|^2 u = 0$$

Questa equazione appartiene a una classe di equazioni risolubili tramite il metodo dello scattering inverso. Si dimostra che se N è un numero intero positivo detto ordine del solitone. La soluzione di ordine minimo ($N=1$) è detta solitone fondamentale e risulta

$$u(Z, T) = \text{sech}(T) e^{(jZ/2)}$$

e si propaga inalterata per una distanza idealmente infinita

necessari livelli di potenza irraggiungibili con i dispositivi attualmente disponibili. Si consideri, a titolo di esempio, un caso realistico in cui si voglia trasmettere un flusso di informazione ad una velocità di $R_b = 10$ Gbit/s su una linea in fibra ottica a dispersione spostata ($\beta_2 = -1$ ps²/km) suddivisa in tratte da 50 km ciascuna, con impulsi solitonici di durata $T_0 = 10$ ps. Un valore tipico per il coefficiente non lineare è $\gamma = 5$ W⁻¹ km⁻¹. Quindi la potenza di picco del solitone calcolata secondo la

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}$$

risulta $P_0 = 2$ mW, mentre la potenza media (pari all'energia del singolo solitone moltiplicata per la velocità di trasmissione) risulta $P_M = 2P_0 T_0 R_b = 400$ μW.

Quindi i valori risultano compatibili con le sorgenti laser oggi disponibili sia in questo caso, sia nel caso di trasmissione su fibra a gradino d'indice per la quale, a parità degli altri valori dell'esempio appena riportato, si avrebbe $P_0 = 40$ mW e $P_M = 8$ mW.

L'equazione non lineare di Schrödinger descrive la propagazione in presenza di dispersione e di non linearità di tipo Kerr. Per la propagazione solitonica è importante tener conto di altri effetti

- perdite della fibra e guadagno degli amplificatori
- rumore degli amplificatori
- interazione fra solitoni: essendo in un sistema non lineare in cui non vale la sovrapposizione degli effetti se si considerano due solitoni vicini il comportamento di entrambi è diverso da quello di un singolo impulso.

Tecniche di compensazione della dispersione.

Oltre alle tecniche di adozione di profili d'indice che danno fibre shifted o flattened esiste un gran numero di altre tecniche per combattere gli effetti della dispersione.

Tecniche elettroniche

- precompensazione prima della trasmissione (prechirping)
- postcompensazione dopo la rivelazione

Tecniche ottiche:

- tratti di fibre ad alta dispersione (segno opposto)
- filtri ottici equalizzatori (interferometri)
- reticoli chirped (Bragg Gratings)
- coniugazione della fase ottica (OPC)
- solitoni (non linearità compensa la dispersione)

Nei reticoli di Bragg l'indice di rifrazione ha un andamento periodico lungo la fibra ottenuto mediante una esposizione olografica ai raggi ultravioletti. I dispositivi funzionano in modo riflettente

Tutte queste tecniche si propongono di cancellare il termine di fase indotto dalla dispersione durante la propagazione del segnale nella fibra ottica.

Le principali sono

DCF (Dispersion Compensating Fibers) : si possono introdurre tratti di fibra che compensino la dispersione di tratti precedenti

PRECHIRPING del segnale ottico : si può infatti agire direttamente sul trasmettitore introducendo una particolare modulazione della corrente di iniezione del laser a semiconduttore che produce sfasamenti di segno opposto a quelli che subiranno le componenti spettrali dell'impulso propagandosi.

OPC (optical phase conjugation): si possono sfruttare le non linearità della fibra stessa per operare una inversione di spettro a mezzo di un FWM (four wave mixing).

La tecnica di maggior interesse, anche perché la più semplice da realizzare, è quella dei moduli compensatori di dispersione. Questi dispositivi *DCM* (*Dispersion Compensation Module*) sono realizzati da sezioni di fibra ottica in grado di compensare l'effetto della tratta di fibra convenzionale che li precede. La compensazione della dispersione avviene poiché il tratto di fibra ottica da compensare è caratterizzato da un coefficiente di dispersione positivo e molto piccolo, mentre il DCM è caratterizzato da un coefficiente di dispersione negativo e con un modulo molto elevato.

Le lunghezze dei due tratti di fibra (convenzionale e compensatrice) vanno scelte opportunamente. (es: 100 km di fibra con 17 ps/(nm km) seguiti da 17 km di fibra avente -100 ps/(nm km))

Hanno maggiore attenuazione (0.5 dB/km) e possono concentrare il campo dando origine a non linearità della fibra