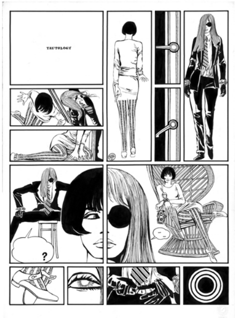
Un accenno alla logica proposizionale

(06/03/2019)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo

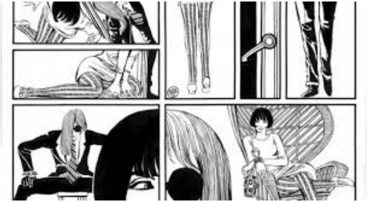
Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica cosí semplice

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica cosí semplice
- Sintesi di circuiti combinatorî (A seguire)



Sintassi

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Lessico

Alfabeto

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\,,\quad) \,,\quad \rightarrow \,,\quad \mathsf{p}_0 \,,\quad \mathsf{p}_1 \,,\quad \mathsf{p}_2 \,,\quad \mathsf{p}_3 \,,\quad \mathsf{p}_4 \,,\quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\,,\quad) \,,\quad \rightarrow \,,\quad p_0 \,,\quad p_1 \,,\quad p_2 \,,\quad p_3 \,,\quad p_4 \,,\quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

(E se volessimo ridurci ad un alfabeto finito ?)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Parole

Con la notazione

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}\ ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_h \rangle\ ,$$

ovvero un'*h-upla*, con un numero qualsiasi h di componenti, *formata di simboli* σ_i

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Lettere proposizionali

Indichiamo con

$$f\,,\quad \underbrace{p\,,\quad q\,,\quad r\,,\quad s\,,\quad p'\,,\quad q'\,,\quad r'\,,\quad s'\,,\quad p''\,,\quad \ldots}_{\text{lettere proposizionali}}$$

la successione di 1-uple

$$\text{“}p_0\text{”}\,,\quad \text{“}p_1\text{”}\,,\quad \text{“}p_2\text{”}\,,\quad \text{“}p_3\text{”}\,,\quad \text{“}p_4\text{”}\,,\quad \text{“}p_5\text{”}\,,\quad \text{“}p_6\text{”}\,,\quad \ldots$$

L'implicazione materiale

Definiamo l'operazione $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}$ per ogni coppia

$$\boldsymbol{\sigma} \quad = \quad \text{``}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{''}\,, \qquad \boldsymbol{\rho} \quad = \quad \text{``}\rho_1 \cdots \rho_k\text{''}$$

di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{``}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{''} \quad \Rightarrow \quad \text{``}\rho_1 \cdots \rho_k\text{''} \qquad =_{\mathsf{Def}} \qquad \text{``}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \rho_1 \cdots \rho_k)\text{''}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ecco gli enunciati:

Definiamo $\mathcal{P}$ il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{\ f\ ,\ \ p\ ,\ \ q\ ,\ \ r\ ,\ \ s\ ,\ \ p'\ ,\ \ q'\ ,\ \ r'\ ,\ \ s'\ ,\ \ p''\ ,\ \ \ldots\ \}$$

tale che per ogni coppia α, β di parole <u>in $\mathcal{P}$</u> anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a $\mathcal{P}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un linguaggio provvisorio per la logica proposizionale è dato dalla seguente grammatica:

Regole di produzione EBNF:

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid (\ \langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{Bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \longrightarrow
\end{array}
$$

ove la categoria sintattica principale è l'*enunciato*, $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$.

Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$):

Regole di produzione EBNF :

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid (\ \langle\,\text{Uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
 & & \mid (\ \langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{Bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
 & & \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \mid v \\
\langle\,\text{Uop}\,\rangle & ::= & \neg \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +
\end{array}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$):

Regole di produzione EBNF oppure, ambiguam. . . :

$$\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid \langle\,\text{Uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle \\
 & & \mid \langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{Bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle \mid (\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,) \\
 & & \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \mid v \\
\langle\,\text{Uop}\,\rangle & ::= & \neg \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +
\end{array}$$

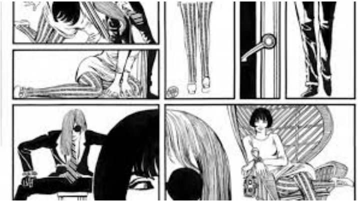
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Introduzione di costrutti 'derivati'

In $\mathcal{P}$ possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti di **negazione**, **disgiunzione**, **congiunzione**, **biimplicazione**, ecc.:

$$
\begin{array}{rcll}
\neg\alpha & =_{\text{Def}} & \alpha \Rightarrow f\,, & \\
v & =_{\text{Def}} & \neg f\,, & \\
\alpha \vee \beta & =_{\text{Def}} & (\neg\alpha) \Rightarrow \beta\,, & \\
\alpha \,\&\, \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)\,, & \\
\alpha \leftrightarrow \beta & =_{\text{Def}} & (\alpha \Rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \Rightarrow \alpha)\,, & \\
\alpha \mid \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \,\&\, \beta)\,, & \text{“ NAND ”} \\
\alpha \downarrow \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \vee \beta)\,, & \text{“ NOR ”} \\
\alpha > \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \Rightarrow \beta)\,, & \\
\alpha + \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\,. & \text{“ XOR ”}
\end{array}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



Semantica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ecco la tabella dell'implicazione:

		$\Rightarrow$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

Osserviamo che ogni funzione

$$\mathfrak{I} \in \{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}^{\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}}$$

ne *induce* un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathfrak{I}}$ definita *per tutti* gli enunciati α, in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

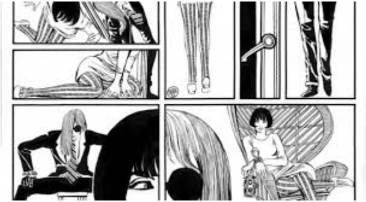
In particolare: $f^{\mathfrak{I}} = \mathbf{f}$, $(f \Rightarrow f)^{\mathfrak{I}} = \mathbf{v}$ e,
per ogni enunciato α, $(\alpha \Rightarrow f)^{\mathfrak{I}}$ è il contrario di $\alpha^{\mathfrak{I}}$

Scriveremo che

$$A \models \vartheta ,$$

(dove $A \subseteq \mathcal{P}$ e $\vartheta \in \mathcal{P}$) se:

> in tutte le interpretazioni $\mathfrak{I}$ tali che
>
> $$\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathbf{v} \quad \text{vale per ogni} \quad \alpha \in A ,$$
>
> vale anche che
>
> $$\vartheta^{\mathfrak{I}} = \mathbf{v} .$$



Apparato deduttivo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

i.	$\big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$
ii.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
iii.	$\big((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)\big) \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow \alpha\big)$

Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Scriveremo che

$$A \ \vdash \ \vartheta \ ,$$

se c'è una sequenza

$$\delta \ = \ \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

che costituisce $\boxed{\textbf{dimostrazione} \text{ di } \vartheta \text{ da } A}$ in quanto:

1) $\delta_h = \vartheta$;

2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in $\mathcal{P}$ che o:

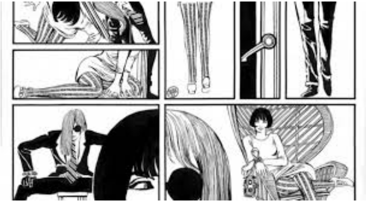
- $\star$ appartiene ad A, oppure
- $\star$ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure
- $\star$ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \Rightarrow p$ da $\emptyset$, come segue:

		Ax.			Prem.
1.	$f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]			
2.	$(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4.	$((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5.	$f \Rightarrow f$	[3, 4]
6.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7.	$(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8.	$((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9.	$f \Rightarrow p$	[7, 8]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



Guardando avanti. . .

Ecco *assiomi propri* espressi in *logica predicativa*

$ab \equiv pq \;\&\; ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
$\exists\, x\big(\, B\, qax$	$\&$	$ax \equiv bc\,\big)$	(SC)
$a \neq b \;\&\; B\, abc \;\&\; B\, a'b'c' \;\&\; ab \equiv a'b' \;\&$			(FS)
$bc \equiv b'c' \;\&\; ad \equiv a'd' \;\&\; bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$dc \equiv c'd'$	
$B\, aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
$B\, apc \;\&\; B\, bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \big(\, B\, pxb \;\&\; B\, qxa\,\big)$	(IP)
$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c\big(\neg B\, abc$	$\&$	$\neg B\, bca \quad \& \quad \neg B\, cab\,\big)$	(Lo$_2$)
$p \neq q \;\&\; ap \equiv aq \;\&\; bp \equiv bq \;\&\; cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\, abc \vee B\, bca \vee B\, cab$	(Up$_2$)
$B\, adt \;\&\; B\, bdc \;\&\; a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \exists\, y\, \big(\, B\, abx \;\&\; B\, acy \;\&\; B\, xty\,\big)$	(Eu)
$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y\, \big(\, x \in X \;\&\; y \in Y \;\rightarrow\; B\, axy\,\big)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y\, \big(\, x \in X \;\&\; y \in Y \;\rightarrow\; B\, xby\,\big)$	(Co)

(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS) Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
(IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo$_2$) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up$_2$) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) Assioma di continuità

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE