Misure di rischio

Misure di Rischio

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, ...), credito, operativo, ...
- utilizzo:
  - stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency
  - ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - comunicazione con i clienti
  - valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura
  - stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - stabilire limiti per i traders / unità operative
  - allocazione del capitale fra diversi rami / unità / ...
  - ...

Misure di rischio

- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-Risk
  - expected shortfall
  - misure basate su scenari
  - ...
- Proprietà/relazioni di queste misure?
- metodi di calcolo
  - analitico (parametrico)
  - storico / Monte Carlo
- Aggregazione di rischi (dipendenza) / Modelli per rischi estremi

Perdita

- Sia L una perdita; esempi:
  - variazione di valore di un titolo / portafoglio:

    $$L = -\text{P\&L}, \qquad \text{P\&L} = \text{profitto / perdita} = V(T) - V(t)$$

    con $V(t)$ valore del portafoglio in t
  - perdita su un singolo contratto assicurativo / portafoglio / ramo assicurativo / intera compagnia
- perdita relativa a un certo intervallo temporale (t, T): $L \equiv L_{t,T}$
- perdita lorda / netta (al netto degli assets messi a copertura)
- $L \geq 0$: rischio puro $L < 0 \cap L \geq 0$: rischio speculativo

Perdita

- L è una variabile aleatoria in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- misura di rischio di L:

$$\rho(L) = \text{ capitale da allocare a } L \text{ per renderlo accettabile}$$

  la perdita post-allocazione è $L - \rho(L)$
- Formalmente, sia $\mathcal{L}$ è un insieme di variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ contenente tutte le perdite di interesse
  - ⋆ $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale contenente le costanti
  - ⋆ misura di rischio: funzionale $\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$
- esempi di $\mathcal{L}$
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$tutte variabili aleatorie$\}$ (Value-at-Risk)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie integrabili$\}$ (Expected shortfall)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie quadrato integrabili$\}$ (varianza)

Misure di rischio basate su scenari

- Molto popolari nella pratica $\rightsquigarrow$ margini per opzioni e futures, stress testing
- Idea: dati un numero finito di scenari $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ e dei pesi $w_1, \ldots, w_n \in [0, 1]$

$$\rho(L) = \rho(L; \{\omega_i\}, \{w_i\}) = \max\{w_1 L(\omega_1), \ldots, w_n L(\omega_n)\}$$

- ad esempio
  - ⋆ $\omega_i =$ tassi d'interesse $\uparrow$ 6%, tassi di cambio $\downarrow$ 20%, volatilità $\uparrow$ 15%, ...
- Generalizzazione: date $P_1, \ldots, P_n$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\rho(L) = \max\{w_1 E^{P_1}(L), \ldots, w_n E^{P_n}(L)\}$$

Funzione di ripartizione

- Concentriamoci su misure di rischio invarianti rispetto alla distribuzione: per ogni L_1, $L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$, allora $\rho(L_1) = \rho(L_2)$; non è il caso delle misure basate su scenari!
- X variabile aleatoria; funzione di ripartizione: $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F_X(x) = P(X \leq x)$
- proprietà caratterizzanti:
  - F_X non decrescente
  - F_X continua a destra
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- altre proprietà:
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $\lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X < x)$
  - $F_X(x) - \lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X = x)$

Value-at-Risk

- Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
  Ingredienti:
  - un certo intervallo temporale (t, T)
  - un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$
- idea:
  - per un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento
    $$(L \leq x) = (L - x \leq 0)$$
    cioè il capitale allocato assorbe le perdite
    se $L = -\text{P\&L}$ è, allora l'evento è $(\text{P\&L} + x \geq 0)$
  - la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α
    $$P(L \leq x) \geq \alpha$$
  - si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:
    $$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ P(L \leq x) \geq \alpha\}$$

Quantile

▷ Data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile sinistro $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1,-}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q\}$$

il quantile $F_X^{-1,-}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q

▷ il q-quantile destro $(0 < q < 1)$ è

$$F_X^{-1,+}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > q\}$$

▷ In generale

$$F_X^{-1,-}(q) \leq F_X^{-1,+}(q)$$

e $F_X^{-1,-}(q) < F_X^{-1,+}(q)$ se e solo se la funzione di ripartizione è costante al livello q; in questo caso, ogni numero di questo intervallo è chiamato q-quantile della distribuzione

Gestione del Rischio Finanziario

Quantile

▷ Proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$, noto anche come inversa generalizzata della funzione di ripartizione F_X

- ⋆ $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra
- ⋆ limiti:

$$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\} =: \text{estremo inferiore di } X,$$

$$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\} =: \text{estremo superiore di } X$$

- ⋆ F_X^{-1} continua $\Leftrightarrow$ F_X crescente; F_X^{-1} crescente $\Leftrightarrow$ F_X continua; discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
- ⋆ se F_X è crescente e continua, allora tale è F_X^{-1} e coincide con l'inversa di F_X, definita da

$$F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$$

Quantile

- Altre proprietà
  - per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,

$$F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x)$$

conseguenza 1: per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$
conseguenza 2: per ogni $x \in \mathbb{R}$ riesce $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$; vale l'uguaglianza se F_X è crescente in x
  - Trasformata funzione di ripartizione: se F_X è continua, allora $F_X(X) \sim U(0,1)$
  - Trasformata funzione di ripartizione inversa: se $U \sim U(0,1)$, allora $F_X^{-1}(U) \sim F_X$
  - se g è non decrescente, continua a sinistra, allora

$$F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))$$

"il quantile di una trasformata è la trasformata del quantile"
- Proprietà simili sono verificate dal quantile destro

Value-at-Risk

- Il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L/inversa generalizzata di L:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$

- usando la distribuzione del profit/loss P&L $= -L$, è

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P(\mathrm{P\&L} < x) \leq 1 - \alpha\}$$

perdite superiori a VaR_α si possono verificare con probabilità inferiore a $1 - \alpha$
- nel caso in cui la distribuzione di P&L sia invertibile, la definizione richiede

$$P(L \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L)) = \alpha$$

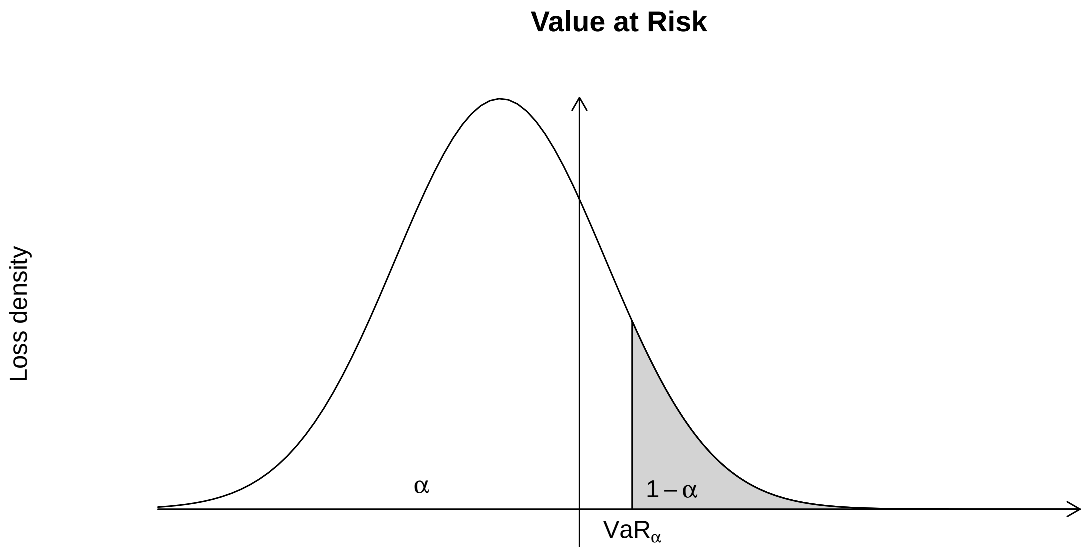
o

$$P(\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(L)) = 1 - \alpha$$

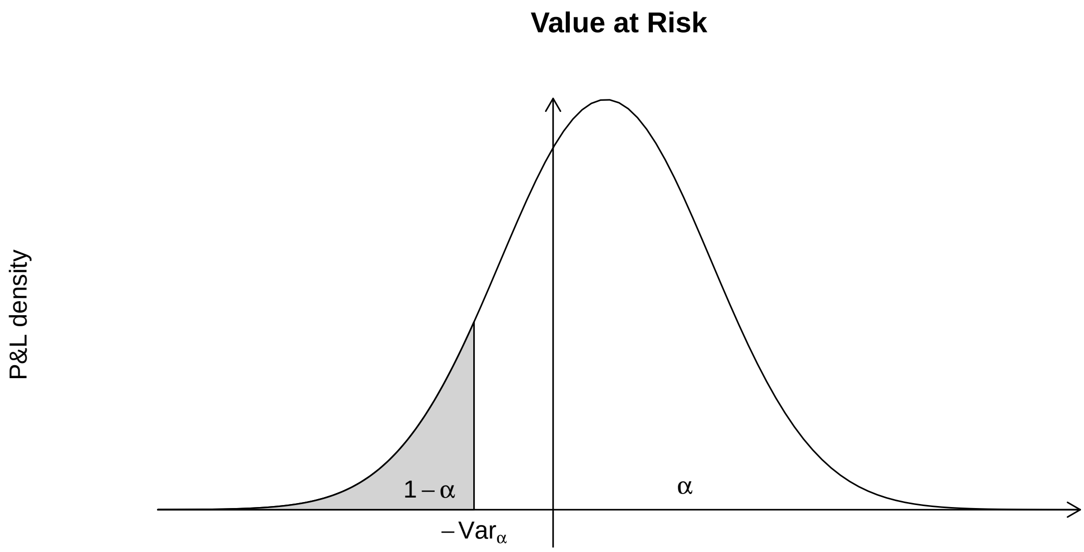
cioè

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1 - \alpha)$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



Value-at-Risk

- ▷ Elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - ⋆ orizzonte temporale $T - t$
  - ⋆ livello di confidenza α
  - ⋆ distribuzione di probabilità della perdita L o del profitto/perdita P&L
- ▷ Orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore in base al business
  - ⋆ scelte tipiche: 1 ora / 1 giorno / 10 giorni (2 settimane) / 1 anno
  - ⋆ portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - ⋆ trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - ⋆ Solvency, Basilea: 1 anno
  - ⋆ tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

- ▷ Livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - ⋆ usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - ⋆ trading floors: $\alpha = 90\%$
  - ⋆ calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% (evento "1 su 20", "1 su 200")
  - ⋆ il Value-at-Risk cresce con α
- ▷ la costruzione della distribuzione di probabilità di L o P&L è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - ⋆ parametrico
  - ⋆ non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - ⋆ semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

Approccio parametrico

- Approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) $F_L(\cdot;\theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ parametro (da stimare) poi calcolare

$$\rho(L;\theta) = \rho(F_L(\cdot,\theta))$$

analiticamente o numericamente

- Nel caso del Value-at-Risk, si deve calcolare

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha;\theta) \quad \text{o} \quad F_L(\mathrm{VaR}_\alpha(L);\theta) = \alpha \text{ se invertibile}$$

quindi si ottiene $\mathrm{VaR}_L(\alpha;\theta)$

- Problemi del metodo parametrico:
  - rischio di modello
  - rischio di parametro

Value-at-Risk

- VaR con distribuzione esponenziale $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)$$

- VaR condistribuzione normale: $L \sim N(\mu,\sigma^2)$
  - indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

  - Value-at-Risk $\uparrow \mu$, $\uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$)
  - $\rho(L) - E(L) =$ capitale di rischio (economico o imposto dal regolatore): capitale allocato in eccesso alla perdita attesa (riserva)
    nel caso di VaR normale: capitale di rischio
    $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E(L) = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \rightsquigarrow$ "VaR $= SD$" nel caso normale

Value-at-Risk

- Sia F una funzione di ripartizione; la famiglia scala-locazione è la famiglia di funzioni di ripartizione

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \; \mu \in \mathbb{R}, \; \sigma > 0$$

  - ⋆ se X ha funzione di ripartizione F, allora Y ha funzione di ripartizione $F_{\mu,\sigma}$ se e solo se Y e $\mu + \sigma X$ hanno la stessa distribuzione
  - ⋆ si dice che X e Y sono dello stesso tipo o che differiscono per un cambio di scala e locazione
- se $F_L = F_{\mu,\sigma}$ allora $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F^{-1}(\alpha)$

Gestione del Rischio Finanziario

Value-at-Risk

- Un'alternativa alla distribuzione normale è la distribuzione t di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, dove t_ν distribuzione t di Student con $\nu > 1$ gradi di libertà
  - ⋆ se ν intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2+\ldots+Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

    dove $Z, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sono normali standard indipendenti
  - ⋆ in generale, la densità di t_ν è

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \; x \in \mathbb{R}$$

    più piccolo è ν, più pesanti sono le code
  - ⋆ momenti: $E[t_\nu] = 0$, $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$ per $\nu > 2 \Rightarrow E[L] = \mu$, $var[L] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$