SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DI CALCOLO COMBINATORIO

Esercizio 1. Se 10 caselle devono essere colorate con 3 colori, si hanno 3 scelte per ogni casella; quindi, complessivamente si hanno $3^{10} = 59049$ diversi modi di colorare le caselle.

Esercizio 2. Se si devono colorare 3 caselle con 6 colori, con il vincolo che ogni casella abbia un colore diverso, si hanno 6 scelte per la prima casella, 5 per la seconda casella e 4 per la terza casella; quindi, si hanno $\left|D_3^6\right| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diversi modi.

Esercizio 3. Non conta l'ordine di scelta dei 10 colori; si hanno quindi $\binom{13}{10} = 286$ diverse scelte.

Esercizio 4. Non conta l'ordine di estrazione delle 4 carte; si hanno quindi $\binom{40}{4} = 91390$ diverse estrazioni.

Esercizio 5. Le sequenze di testa e croce lunghe 5 sono tante quante le funzioni da $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $\{1, 2\}$; si hanno quindi $2^5 = 32$ diverse sequenze.

Esercizio 6. Non conta l'ordine di estrazione delle 5 palline; si hanno quindi $\binom{90}{5} = 43949268$ diverse estrazioni.

Esercizio 7. Se non si vogliono carte di denari, è come estrarre dal mazzo dopo aver tolto le 10 carte di denari; si hanno quindi $\binom{30}{4} = 27405$ diverse estrazioni.

Esercizio 8. Se nell'estrazione deve essere presente almeno un re, significa esattamente un re, oppure 2 re, oppure 3 re, oppure 4 re. Conviene sottrarre a tutte le possibili estrazioni quelle che non contengono nessun re: queste ultime sono ottenute da un mazzo con 36 carte e quindi sono $\binom{36}{4} = 58905$. Si hanno quindi $\binom{40}{4} - \binom{36}{4} = 91390 - 58905 = 32485$ diverse estrazioni.

Esercizio 9. Se 2 numeri sono fissati, si devono scegliere 3 numeri dai rimanenti 88; si hanno quindi $\binom{88}{3} = 109736$ diverse estrazioni.

Esercizio 10. Conviene ragionare come se le palline bianche fossero numerate da 1 a 10 e le rosse da 11 a 15. Si chiede quante siano le estrazioni di 5 palline in cui 2 palline abbiano numeri inferiori o uguali a 10 e 3 palline abbiano numeri superiori o uguali a 11. Si hanno $\binom{10}{2}$ scelte per le palline bianche e $\binom{5}{3}$ per le palline rosse; quindi, si hanno $\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{3} = 45 \cdot 10 = 450$ diverse estrazioni.

Esercizio 11. Se si devono disporre le 5 pedine senza alcun vincolo, poiché le caselle sulla scacchiera sono 25, si hanno $\binom{25}{5} = 53130$ diverse scelte. Se si vuole una pedina per riga e una per colonna, si hanno 5 scelte per la pedina sulla prima riga, 4 per la pedina sulla seconda riga, 3 per la pedina sulla terza riga, 2 per le pedina sulla quarta riga e una scelta obbligata per l'ultima pedina; quindi, si hanno $5! = 120$ diverse scelte.

Esercizio 12. Se si devono disporre 3 pedine rosse e 2 bianche, prima si fissano i posti sulla scacchiera che devono essere occupati dalle 5 pedine e poi, all'interno di questi posti, si stabiliscono le posizioni che devono essere occupate dalle pedine rosse e quelle che devono essere occupate dalle bianche. Quest'ultima operazione può avvenire in $\binom{5}{3} = 10$ modi diversi, poiché è sufficiente stabilire la posizione delle pedine rosse. Quindi, per quanto visto nell'esercizio 11, in assenza di ulteriori vincoli, si hanno $53130 \cdot 10 = 531300$ diverse scelte; invece, se si vuole disporre una pedina per riga e una per colonna, si hanno $120 \cdot 10 = 1200$ diverse scelte.

Esercizio 13. Se i punti sono a 3 a 3 non allineati, le rette sono individuate dalle coppie di punti e tali coppie devono essere scelte da un insieme che contiene 6 punti; si hanno quindi $\binom{6}{2} = 15$ diverse scelte.

Esercizio 14. I numeri di 7 cifre che si scrivono usando solo le cifre 1 e 2 sono $2^7 = 128$. Per individuare i numeri in cui compaiono esattamente 4 cifre 1 e 3 cifre 2, basta determinare le posizioni occupate dalle 4 cifre 1; si hanno quindi $\binom{7}{4} = 35$ diverse possibilità.

Esercizio 15. Se si vogliono assegnare 8 professori a 4 diverse scuole, si hanno 4 scelte per ciascuno degli 8 professori; quindi, si hanno $4^8 = 65536$ diverse assegnazioni. Se si vuole che ogni scuola riceva almeno un professore, per determinare il numero delle possibili assegnazioni, utilizziamo il principio di inclusione-esclusione. $\forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$, indichiamo con A_i l'insieme delle assegnazioni che lasciano vuota la scuola $i-$esima ed indichiamo con B l'insieme di tutte le possibili assegnazioni. L'insieme di cui dobbiamo determinare la cardinalità è quindi $B \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Si ha

$$\begin{gathered}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{gathered}$$

Inoltre, $\forall\ i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, con i, j e k diversi tra loro, si ha

$$\begin{aligned}
|A_i| &= 3^8,\ |A_i \cap A_j| = 2^8, \\
|A_i \cap A_j \cap A_k| &= 1,\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,
\end{aligned}$$

da cui

$$|B \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = 4^8 - (4 \cdot 3^8 - 6 \cdot 2^8 + 4) = 40824.$$