Def: Sia Ω aperto di $\mathbb{C}$.
$H(\Omega)$ indica la classe delle funz. olomorfe su Ω.

Oss: Se $f, g \in H(\Omega)$ allora $f+g$ e fg sono ancora in $H(\Omega)$.

Lemma: Se $f: \Omega \to G \subset \mathbb{C}$ è olomorfa e $g: G \to \mathbb{C}$ è olomorfa allora

$$g \circ f \in H(\Omega).$$

Dim Sia $z_0 \in \Omega$ e $z \in \Omega$, calcoliamo

$$\frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z - z_0}$$

poniamo $f(z) = w$, $f(z_0) = w_0$, $w, w_0 \in G$

$$\Rightarrow g(w) - g(w_0) = g'(w_0)(w - w_0) + \underline{o(|w - w_0|)}$$

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \underline{o(|z - z_0|)}$$

$$|w - w_0| = \underline{O(|z - z_0|)}$$

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = \underbrace{g'(f(z_0))\, f'(z_0)}(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(f(z_0))\, f'(z_0) + o(1)$$

$z \to z_0$

$\square$

<u>Prop.</u> Sia $f \in H(\Omega)$, sia $z_0 \in \Omega$ e sia $f'(z_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno di z_0 $B_r(z_0)$ t.c. $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ è invertibile e f^{-1} è olomorfa. Vale:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

<u>Dim.</u> $f = u + iv$, $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x$

Per C.R.:

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x^2 + u_y^2 .$$

$$f' = \frac{1}{2}(u_x - i u_y) \quad , \quad |f'|^2 = \frac{1}{4} |\nabla u|^2 = \frac{u_x^2 + u_y^2}{4}$$

Dato che $f'(z_0) \neq 0$, abbiamo

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} (x_0, y_0) \neq 0$$

$\exists\ r > 0$ t.c. $(u, v) : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$

è invertibile e l'inversa è dotata di deriv.
parziali continue. Sia $g = f^{-1}$

$$g \circ f(z) = z \qquad \forall\, z \in B_r(z_0)$$

$$\partial_{\bar z}(g \circ f) = \partial_{\bar z} z = 0$$

Sia $g = g(w)$, $f = f(z)$

$$0 = \partial_{\bar z}(g \circ f) = \partial_w g(f)\, \cancel{\partial_{\bar z} f} + \partial_{\bar w} g(f)\, \underbrace{\partial_{\bar z}(\bar f)}_{\neq 0}$$

$$\partial_{\bar z}(\bar f) = \overline{(\partial_z f)} \neq 0 \qquad (\bar f = u - iv)$$

$\Rightarrow$ $\partial_{\bar w} g = 0$ cioè g verifica C.R.

$\Rightarrow$ $g \in H(f(B_r(z_0)))$.

$$g \circ f(z) = z , \qquad \partial_z (g \circ f) = 1$$

$$\partial_w g(f)\, \partial_z f + \underbrace{\partial_{\bar w} g(f)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}\, \partial_z(\bar f) = 1$$

$$g'(f) = 1/f'$$

$$g'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \square$$

$$f(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \in H(\mathbb{C})$$

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in H(\mathbb{C})$$

$$\exp(z+w) - \exp(z) = \exp(z)(\exp(w) - 1)$$

$$\frac{\exp(z+w) - \exp(z)}{w} = \exp(z) \frac{\exp(w) - 1}{w}$$

$$\frac{\exp(w) - 1}{w} = \frac{1}{w}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{n!} \xrightarrow[w \to 0]{} 1$$

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Teor. Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente in $B_R(0)$, $R > 0$.

Allora $f \in H(B_R(0))$ e vale

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

Dim. Siano $z, w \in B_R(0)$, $z \neq w$, calcoliamo

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - w^n}{z - w}$$

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} = \left(z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots + w^{n-1} \right) \xrightarrow[w \to z]{} n\, z^{n-1}$$

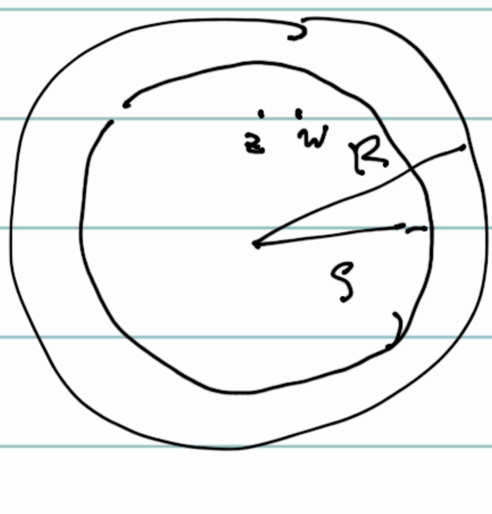
Poniamo

$$r_n = \left(z^{n-1} + \dots + w^{n-1} \right) - n z^{n-1} =$$

$$= \left(z^{n-2} w - z^{n-1} \right) + \left(z^{n-3} w^2 - z^{n-1} \right) + \dots + \left(w^{n-1} - z^{n-1} \right)$$

$$= z^{n-2}(w - z) + z^{n-3}(w^2 - z^2) + \dots + \left(w^{n-1} - z^{n-1} \right) =$$

$$r_n = (w - z)\Big[z^{n-2} + z^{n-3}(w + z) + \dots + \underbrace{\left(w^{n-2} + w^{n-3} z + \dots + z^{n-2} \right)}_{n-1 \text{ addendi}} \Big]$$



Sia ϱ t.c.

$|z| < \varrho < R$

Supp. anche

$|w| < \varrho < R$

$$|r_n| \leq |w-z| \left[\rho^{n-2} + 2\rho^{n-2} + \dots + (n-1)\rho^{n-2} \right]$$

$$|r_n| \leq |w-z| \, \rho^{n-2} \left(1 + 2 + \quad + (n-1) \right) =$$

$$= |w-z| \, \rho^{n-2} \, \frac{n(n-1)}{2} \, .$$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n a_n z^{n-1} + \underline{a_n r_n} \right)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right| \leq \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \right)}_{\text{Cost} < \infty} |w-z|$$

Sappiamo che

$$\sum a_n z^n \quad \text{conv. per } |z| < R$$

Quindi preso t, $\rho < t < R$ vale che

$$\sum |a_n| t^n \quad \text{è conv.}$$

Quindi $\sum a_n z^n$ ha raggio di conv. $\geq R$

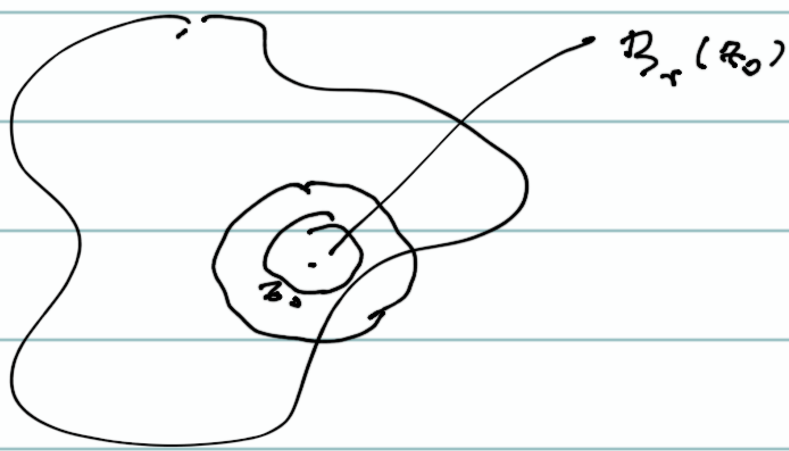
Idem $\sum n(n-1) a_n z^n$.

$$\lim_{w \to z} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad \square$$

<u>Def</u> $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice rappres. in serie di potenze se $\forall\, z_0 \in \Omega$ $\exists\, r>0$ t.c. $B_r(z_0) \subset \Omega$ e vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall\, z \in B_r(z_0)$$

e la serie ha raggio di conv. $R \geq r$.



<u>Teorema.</u> Sia $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un int. chiuso e limitato. Siano $g, \varphi : K \to \mathbb{C}$ funz. continue. Sia Ω aperto $\subset \mathbb{C}$ t.c.

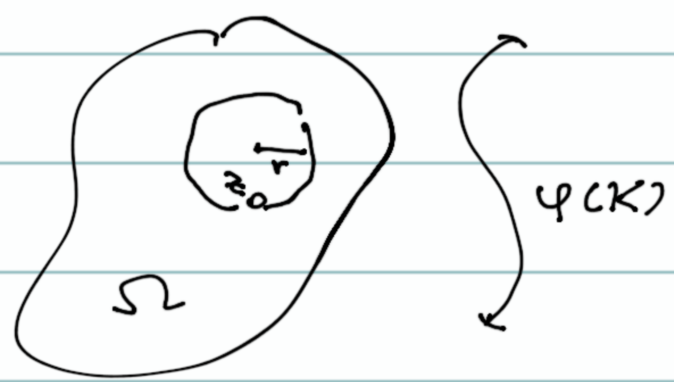
$$\Omega \cap \varphi(K) = \emptyset$$

Consid

$$f(z) = \int_a^b \frac{\varrho(x)\, dx}{\varphi(x) - z}, \quad z \in \Omega$$

Si ha che f è rapp. in serie di potenze

Dim.



Sia $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ t.c. $B_r(z_0) \subset \Omega$

Quindi

$$|\varphi(x) - z_0| \geq r$$

$\forall x \in K$.

Sia $z \in B_r(z_0)$

$$\Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{\varphi(x) - z_0} \right| < \frac{r}{r} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\varphi(x) - z_0} \right)^n$$ è convergente. Idem!

$$\sum^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\ldots)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(x) - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\ldots}} \right) =$$

$n=0 \quad (\varphi(x)-z_0) \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \varphi(x)-z_0$

$$= \frac{1}{\varphi(x)-z_0}\,\frac{\varphi(x)-z_0}{\varphi(x)-z_0-z+z_0} = \frac{1}{\varphi(x)-z}$$

$$f(z)=\int_a^b \frac{g(x)}{\varphi(x)-z}\,dx = \int_a^b g(x) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\varphi(x)-z_0)^{n+1}}}_{\text{conv. unif. su } x\in[a,b]} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b g(x)\,\frac{1}{(\varphi(x)-z_0)^{n+1}}\,dx\right](z-z_0)^n$$

Oss. Lo stesso risultato si ottiene se g e φ sono continue a tratti.

Def. Un'appl. continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice curva. L'immagine di γ: $\gamma([a,b])$ si indica con γ^* e si chiama sostegno della curva.

Una curva γ si dice chiusa se $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Si dirà <u>cammino</u> una curva γ che sia C^1 a tratti.

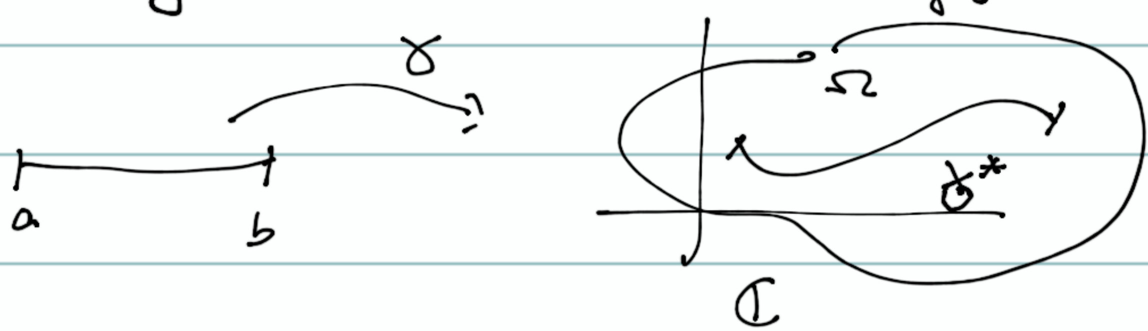
Un cammino si dirà <u>regolare a tratti</u> se $\frac{d}{dx}\gamma(x) \neq 0$ su ogni tratto chiuso dove γ è deriv.

<u>Def.</u> Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto t.c. $\gamma^* \subset \Omega$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funz. continua. Poniamo

$$\underline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_a^b f(\gamma(x))\,\gamma'(x)\,dx$$

$\gamma'(x) = \alpha' + i\beta'$



$\gamma(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$

$$\underline{\int_\gamma A\,dx + B\,dy} = \int_a^b [A(\gamma(x))\,\alpha'(x) \quad B(\gamma(x))\beta'(x)]\,dx$$

$$dz = dx + i\,dy$$

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma f\,dx + i f\,dy$$

Def. Dati due cammini $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\gamma_1 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, γ e γ_1 si dicono

equivalenti se esiste

$$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$$

C^1 a tratti, invertibile $(\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b)$

tale che

$$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$$

Prop. Se γ e γ_1 sono equiv.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Dim.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a f(\gamma(x))\,\gamma'(x)\,dx =$$

$$\underset{x=\varphi(y)}{=} \int_\alpha^\beta f(\underbrace{\gamma\circ\varphi(y)}_{\gamma_1})\,\underbrace{\gamma'(\varphi(y))\,\varphi'(y)}_{\gamma_1'(y)}\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \qquad \square$$