Def. Sia γ un cammino chiuso. Sia

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Per ogni $z \in \Omega$ poniamo

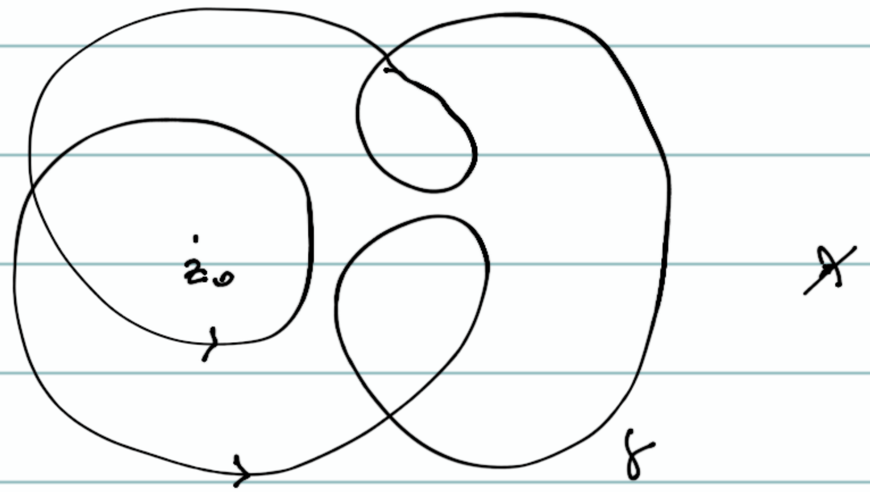
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

ovvero "l'indice di z rispetto a γ".

Es. $\gamma = e^{iN\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.
$N \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{iN \cancel{e^{iN\vartheta}}}{\cancel{e^{iN\vartheta}}} \, d\vartheta = N.$$



<u>Teorema</u> $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot) : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funz. a valori in $\mathbb{Z}$, è costante su ogni componente connessa di Ω.

$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ se z sta nella comp. illimitata di Ω.

<u>Oss.</u> $w \in \mathbb{C}$ è intero sse $e^{2\pi i w} = 1$

<u>Dim. del Teor.</u> Proviamo che

$$\exp\left\{ \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right\} = 1 \qquad \forall z \in \Omega$$

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt$$

(posto che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$).

Poniamo

$$\varphi(s) = \exp\left\{ \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt \right\}, \quad s \in [a,b].$$

$$\frac{d}{ds}\varphi(s) = \varphi(s)\,\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\varphi(s)}{\gamma(s)-z} \right) = \frac{\varphi(s)\,\gamma'(s)}{(\gamma(s)-z)^2} - \frac{\varphi(s)\,\gamma'(s)}{(\gamma(s)-z)^2} =$$

$$= 0$$

Cioè $\dfrac{\varphi(s)}{\gamma(s)-z}$ è costante a tratti e

continua, risp. a $s \in [a,b]$. Ovvero è costante

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} \implies \varphi(b) = \varphi(a)$$

$$\varphi(b) = \exp\left\{ \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right\} = \varphi(a) = \exp\left\{ \int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right\} =$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \in \mathbb{Z} .$$

$$\Omega \ni z \longrightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

è una funz. rappr. in serie di potenze, quindi

$\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot)$ è olomorfa su Ω.

Per continuità $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot)$ è costante su ogni comp. connessa di Ω.

γ^* è compatto $\Rightarrow \exists\, R > 0$ t.c. $\gamma^* \subset B_R(0)$

Quindi $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \subset \Omega$, sia Ω^∞ la comp. connessa che cont. $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$. Proviamo che $\forall\, z \in \Omega^\infty$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 ,$$

Supp. $|z| > R$:

Se $\xi \in \gamma^*$, $|\xi| < R$

$$|\xi - z| \geq |z| - R$$

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^b \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t) - z} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|\, dt}{|\gamma(t) - z|} \leq$$

$$\leq \mathrm{Cost.} \int_a^b \frac{dt}{|z| - R} = \frac{\mathrm{Cost.}\,[b-a]}{|z| - R} =$$

$$= \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad |z| \to \infty$$

Quindi $\exists\, \tilde{R} > R$ se $|z| > \tilde{R}$

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < \frac{1}{2} \implies \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$$

per continuità!

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \qquad \forall\, z \in \Omega^\infty \qquad \square$$

<u>Oss.</u> Sia γ un cammino, sia f una funzione continua su γ^*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \max_{\gamma^*} |f|\, L(\gamma)$$

dove

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}.$$

<u>Dim.</u>

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

$$\left| \quad '' \quad \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \max_{\gamma^*} |f| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \qquad \square$$

<u>Def.</u> Siano γ_1, γ_2 due cammini

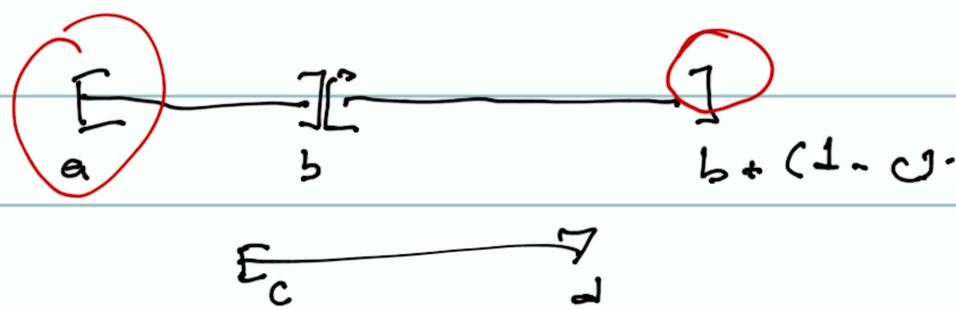
$$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$$

Supp. che $\quad \gamma_1(b) = \gamma_2(c)$

si def. $\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b], \\ \gamma_2(t - b + c) & t \in [b, (d-c)+b] \end{cases}$$



Abbiamo

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Def. Preso un cammino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

Poniamo

$$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$$

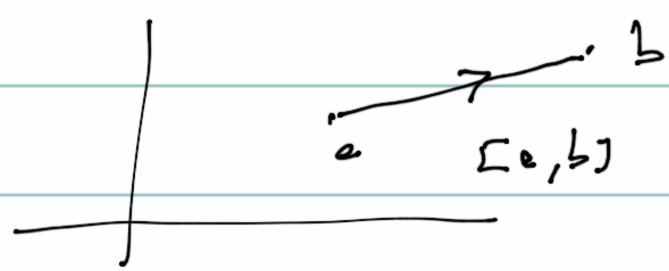
Cammino inverso di γ:

$$\gamma_1(t) = \gamma(b+a-t) \qquad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

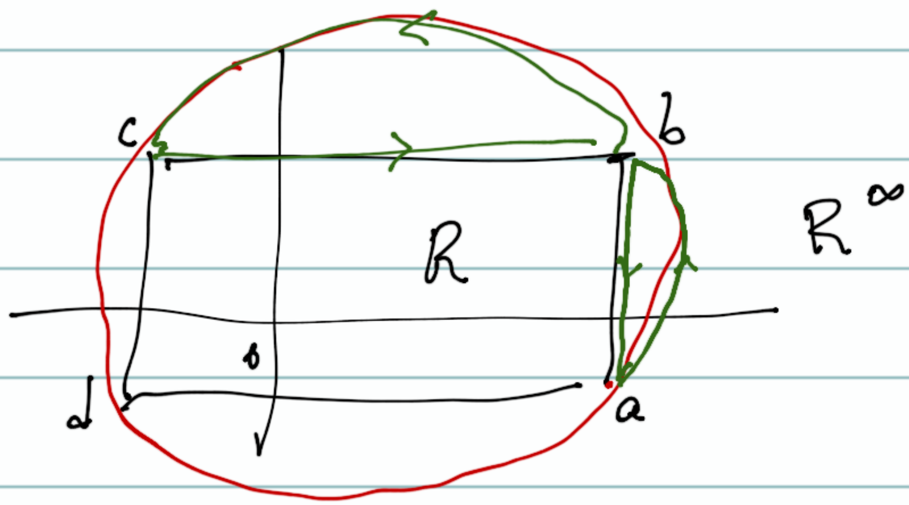
<u>Def.</u> Presi $a, b \in \mathbb{C}$ indichiamo con $\gamma = [a,b]$ il segmento orientato di estremi a e b risp. con la parametrizz.

$$\gamma(t) = a(1-t) + bt, \qquad t \in [0,1]$$



<u>Es.</u> $L([a,b]) = |b-a|$

Esercizio Sia $R \subset \mathbb{C}$ il rettangolo di vertici a, b, c, d



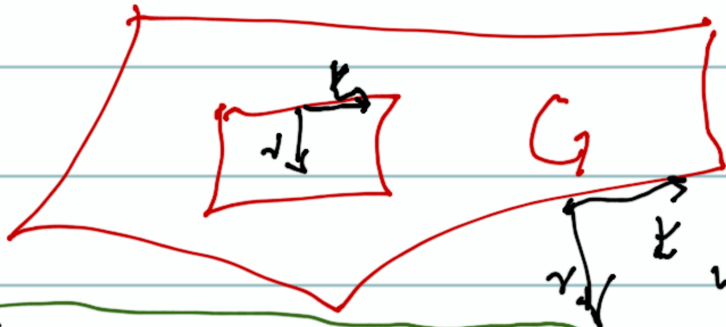
Sia $\gamma = [a,b] + [b,c] + [c,d] + [d,a]$.

Calcolare per ogni $z \in \mathring{R}$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1 \quad \text{Provare!}$$

— · —

<u>Def.</u> Sia G un aperto $\subset \mathbb{C}$, limitato. Diciamo che G ha frontiera reg. a tratti se ∂G è unione finita di cammini chiusi disg., ciasc. reg. a tratti. Per convenzione, orientiamo



questi cammini di modo che la normale ν punti sempre verso l'esterno.

Formule di Gauss-Green

Sia G aperto limitato con frontiera reg. a tratti.

Sia $u \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R})$ vale

$$\left[\begin{aligned} \int_G \partial_x u \, dx\,dy &= \int_{\partial G} u \, dy \\ \int_G \partial_y u \, dx\,dy &= -\int_{\partial G} u \, dx \end{aligned}\right]$$

Versione complessa Se $u \in C^1(\overline{G}, \mathbb{C})$

$$\boxed{\int_G \partial_{\bar z} u \, dx\,dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} u \, dz} \qquad \text{Es.}$$

$$\int_G \partial_z u \, dx\,dy = \frac{-1}{2i} \int_{\partial G} u \, d\bar z$$

(Qui : $d\bar{z} = dx - i\,dy$)