# MODELLO DI SOPRAVVIVENZA CON PIÙ CAUSE DI ELIMINAZIONE

Sia una collettività di individui soggetta a $m$ cause di eliminazione, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, a due a due incompatibili ed esaustive.

Si definiscono i n.a.

$T_x$ durata di permanenza nella collettività per un individuo presente nella collettività all'età $x$

$C$ con determinazioni $1, \dots, m$, tale che $(C = j) \Leftrightarrow$ "l'individuo esce per la causa $\alpha_j$"

Si introduce un modello probabilistico per la coppia di n.a. $(T_x, C)$

Sia

${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \leq t, C = j)$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età $x$ esca dalla collettività per la causa $\alpha_j$ entro l'età $x+t$

${}_t q_x^{(\boldsymbol{\alpha})} = P(T_x \leq t)$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età $x$ esca dalla collettività entro l'età $x+t$ per una qualsiasi causa

${}_t p_x^{(\boldsymbol{\alpha})} = 1 - {}_t q_x^{(\boldsymbol{\alpha})}$ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età $x$ sia presente all'età $x+t$

Si ha

$$ {}_tq_x^{(\boldsymbol{\alpha})} = P(T_x \le t) = \sum_{j=1}^{m} P(T_x \le t, C = j) = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(\alpha_j)} $$

Si definisce **intensità di eliminazione per una qualunque causa**

$$ \mu^{(\boldsymbol{\alpha})}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T_x \le t + \Delta t | T_x > t)}{\Delta t} $$

Si ha

$$ {}_tp_x^{(\boldsymbol{\alpha})} = exp\left(-\int_0^t \mu^{(\boldsymbol{\alpha})}(x+u)du\right) $$

Si definisce **intensità di eliminazione per la causa** $\alpha_j$

$$ a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T_x \le t + \Delta t, C = j | T_x > t)}{\Delta t} $$

Si ha

$$ \mu^{(\boldsymbol{\alpha})}(x+t) = \sum_{j=1}^{m} a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) $$

Poiché

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T_x \le t+\Delta t, C = j | T_x > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t} \frac{1}{{}_t p_x^{(\boldsymbol{\alpha})}}$$

se esiste finito

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

e poniamo

$$f_{T,C}(t,j) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_t q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

la distribuzione congiunta della coppia di n.a. $(T_x, C)$, si ha

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \frac{f_{T,C}(t,j)}{{}_t p_x^{(\boldsymbol{\alpha})}} \qquad f_{T,C}(t,j) = {}_t p_x^{(\boldsymbol{\alpha})} a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

e quindi per la probabilità di eliminazione per la causa $\alpha_j$

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \le t, C = j) = \int_0^t f_{T,C}(u,j)du = \int_0^t {}_u p_x^{(\boldsymbol{\alpha})} a\mu^{(\alpha_j)}(x+u)du \quad j = 1, \dots, m$$

Osservazione

Per stimare la distribuzione della coppia di n.a. $(T_x, C)$ si dovrebbero stimare le intensità di eliminazione per le varie cause $a\mu^{(\alpha_j)}(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, mediante le quali è possibile valutare le probabilità: ${}_tq_x^{(\alpha_j)}$, $j = 1, \ldots, m$, ${}_tp_x^{(\boldsymbol{\alpha})}$ .

In pratica si segue invece un'altra strada: si stimano distinti modelli di sopravvivenza per le diverse cause di uscita. In particolare tratteremo la stima di un modello di sopravvivenza, in relazione alla mortalità, tenendo conto che sono presenti anche altre cause di uscita.

Siano i n.a.

$T_x^{(j)}$ durata di permanenza nella collettività per un individuo di età $x$ fino al verificarsi dell'uscita per la causa $\alpha_j$

Si ha

$$T_x = \min\left(T_x^{(1)}, \ \ldots, T_x^{(m)}\right) \qquad \text{e} \qquad (C = j) \Leftrightarrow \left(T_x = T_x^{(j)}\right)$$

In relazione alle distribuzioni marginali dei n.a. $T_x^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$ si definisce

Def.: **intensità marginale di eliminazione per la causa $\alpha_j$**

$$\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(j)} \le t + \Delta t \,\middle|\, T_x^{(j)} > t\right)}{\Delta t}$$

Def.: **probabilità assoluta di sopravvivenza** e, rispettivamente, **di eliminazione**

$${}_t p_x'^{(\alpha_j)} = \exp\left( -\int_0^t \mu^{(\alpha_j)}(x+u)\,du \right) \qquad {}_t q_x'^{(\alpha_j)} = 1 - {}_t p_x'^{(\alpha_j)}$$

<u>Osservazione</u>

Sono dette <u>probabilità relative di eliminazione</u> per le diverse cause

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P\left(T_x \le t, C = j\right) = \int_0^t f_{T,C}(u,j)\,du = \int_0^t {}_u p_x^{(\boldsymbol{\alpha})} a\mu^{(\alpha_j)}(x+u)\,du \quad j = 1, \dots, m$$

In generale si ha

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) \neq a\mu^{(\alpha_j)}(t) \qquad j = 1, \dots, m \quad t \geq 0$$

Nell'ipotesi

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) = a\mu^{(\alpha_j)}(t) \qquad j = 1, \dots, m \quad t \geq 0$$

sussiste la seguente **relazione di Karup**

$$ {}_tp_x^{(\boldsymbol{\alpha})} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp'^{(\alpha_j)}_x $$

e si ha allora

$$f_{T,C}(t,j) = {}_tp_x^{(\boldsymbol{\alpha})} a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \left(\prod_{j=1}^{m} {}_tp'^{(\alpha_j)}_x\right) \mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

Si dimostra che se i n.a. $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$ sono stocasticamente indipendenti allora

$$\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) \qquad t \geq 0$$

Nella realtà i n.a. $T_x^{(1)},\ \dots, T_x^{(m)}$ presentano delle relazioni di dipendenza.

Si può allora porre il problema se a partire dai dati osservati, che consentono di stimare la distribuzione congiunta di $(T_x, C)$, si è in grado di stimare pure la distribuzione congiunta di $\left(T_x^{(1)},\ \dots, T_x^{(m)}\right)$.

Senza introdurre ipotesi aggiuntive sui legami di dipendenza tra tali n.a., la risposta è negativa.

Sussiste infatti il problema della non identificabilità:

> Esistono diverse distribuzioni congiunte di $\left(T_x^{(1)},\ \dots, T_x^{(m)}\right)$ che danno luogo alla stessa distribuzione congiunta della coppia di n.a. $(T_x, C)$