Value-at-Risk

▷ VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$

- ⋆ quando ν è grande, $t_\nu \approx N(0,1)$
- ⋆ con calcolo simile al caso normale,

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)$$

▷ Esempio: confronto tra $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	12.82	16.45	23.26	25.76	30.90
t Student - ν					
10.0	12.27	16.21	24.72	28.35	37.06
4.0	10.84	15.07	26.49	32.56	50.72
2.5	7.74	11.44	23.94	32.04	61.81
2.1	4.03	6.17	14.25	20.00	43.36

Value-at-Risk

▷ VaR per una distribuzione lognormale, $L = \exp(N(\mu, \sigma^2))$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha))$$

▷ VaR per una distribuzione Pareto, $L \sim \mathrm{Pareto}(\beta, \lambda)$

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta, \; x \geq 0,$$

con $\lambda > 0$, $\beta > 0$Riesce

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \lambda\left[(1-\alpha)^{-1/\beta} - 1\right]$$

Value-at-Risk: limiti

- ▷ il Value-at-Risk non è subadittivo: esistono perdite L_1, L_2 tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ $\rightsquigarrow$ non è coerente
- ▷ similmente, il Value-at-Risk non è convesso: esistono perdite L_1, L_2 e $0 < \lambda < 1$ tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) > \lambda \,\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$
- ▷ il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita
- ▷ il Value-at-Risk non è robusto: variazioni piccole in F_L possono risultare in variazioni importanti del Value-at-Risk
- ▷ di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte $\Rightarrow$ Expected-Shortfall viene usata spesso in pratica come alternativa al Value-at-Risk
- ▷ diverse dei limiti elencati sopra vengono a mancare se ci si restringe a opportuni insiemi di perdite $\mathcal{L}$

Value-at-Risk e subadditività

- ▷ Il Value-at-Risk non soddisfa la subadditività (e convessità) $\Rightarrow$ esistono L_1, L_2 tali che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

  aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente
- ▷ Esempio: due bond soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
  - ⋆ prezzo 90
  - ⋆ valore facciale 100
  - ⋆ perdita totale in caso di default
  - ⋆ probabilità di default 4%
  - ⋆ il default del primo e secondo bond sono indipendenti
  - ⋆ riesce $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = -10$ mentre $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1 + L_2) = 80$
- ▷ problema: la distribuzione della perdita è fortemente asimmetrica
- ▷ Esempio: mostrare che per ogni $0 < \lambda < 1$, $\mathrm{VaR}_{95\%}(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) > \lambda \,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) + (1 - \lambda) \,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)$

Value-at-Risk "blindness to the tail"

- Il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita
  - il VaR_α stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad $\alpha \Rightarrow$ non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano $\text{VaR}_\alpha(L)$
  - due perdite L_1, L_2 possono avere lo stesso Value-at-Risk, $\text{VaR}_\alpha(L_1) = \text{VaR}_\alpha(L_2)$ mentre le perdite in eccesso ($\equiv$ conditional tail expectation) possono essere diverse

$$E[L_1 | L_1 \geq \text{VaR}_\alpha(L_1)] \neq E[L_2 | L_2 \geq \text{VaR}_\alpha(L_2)]$$

  - ESEMPIO:

$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \qquad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\text{VaR}_{95\%}(L_1) = \text{VaR}_{95\%}(L_2) = 50,$$

$$E[L_1 | L_1 \geq \text{VaR}_{95\%}(L_1)] = 54, \qquad E[L_2 | L_2 \geq \text{VaR}_{95\%}(L_2)] = 126$$

Value-at-Risk "blindness to the tail"

- ESEMPIO: perdita $L \sim \exp(1/100)$. Confrontare $\text{VaR}_{99\%}(L)$ con $\text{VaR}_{99\%}(M)$, dove

$$M = \min\{L, 500\}$$

M = ritenzione in un trattato riassicurativo stop-loss

  - si trova

$$\text{VaR}_{99\%}(M) = \text{VaR}_{99\%}(L) = -100 \log(0.01) = 460.5$$

  - VaR invariato rispetto allo spostamento della probabilità nella coda della distribuzione
  - stesso VaR anche se $P[L \geq M] = 1$
  - Osserviamo che

$$\text{VaR}_{99.5\%}(L) = -100 \log(0.005) = 529.8$$

mentre

$$\text{VaR}_{99.5\%}(M) = 500$$

Value-at-Risk e dominanza stocastica

- Nell'esempio precedente una delle due perdite domina (è sempre più grande) l'altra
- una condizione più debole è la dominanza stocastica: L_1 domina stocasticamente L_2 se

$$F_{L_1}(x) \leq F_{L_2}(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

cioè

$$P(L_1 > x) \geq P(L_2 > x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi L_1 comporta perdite superiori ad ogni livello fissato con probabilità più elevata

- dalla definizione di value-at-risk segue che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

per ogni α: L_1 è più rischiosa di L_2 $\rightsquigarrow$ richiede più capitale

Altre misure di rischio

- Altri esempi di misure di rischio
  - varianza: $\rho(L) = E[L] + \lambda var[L]$, $\lambda > 0$
  - deviazione standard: $\rho(L) = E[L] + \lambda\sqrt{var[L]}$, $\lambda > 0$ $\rightsquigarrow$ simmetriche
  - massimo: $\rho(L) =$ estremo superiore di $X = \inf\{x \in \mathbb{R} | \, F_L(x) = 1\}$ $\rightsquigarrow$ elimina la rovina, ma troppo oneroso
  - misure di scenario
  - $\rho(L) = E[(L-c)_+]$ con c livello di perdita dato e $(x)_+ = \max\{x, 0\}$; ad esempio,

$$\rho(L) = E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$$

si osservi che

$$\begin{aligned} \rho(L) =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \\ =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \end{aligned}$$

(dove $E[X; A] = E[X 1_A]$ per ogni v.a. integrabile X e evento A) tale misura è collegata all'expected shortfall

Expected Shortfall

- Expected shortfall: dato L con $E[|L|] < +\infty$ ed un livello di confidenza $0 < \alpha < 1$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(L)\mathrm{d}\beta$$

  - a volte chiamato Tail-Value-at-Risk, $\mathrm{TVaR}_\alpha(L)$
  - media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a α di assorbire le perdite
  - per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR
- Terminologia non uniforme: a volte si chiama expected shortfall la quantità $E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$

Expected Shortfall

- proprietà dell'Expected shortfall
  - è sub-additiva (e coerente)
  - $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$, ES_α funzione nondecrescente e continua di α
  - limiti:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \mathrm{ES}_\alpha = E[L]$$
$$\lim_{\alpha\uparrow 1} \mathrm{ES}_\alpha = \text{estremo superiore di } L = \inf\{x \in \mathbb{R} |\, F_L(x) = 1\}$$

  - $\mathrm{ES}_\alpha(g(L)) = g(\mathrm{ES}_\alpha(L))$ se g lineare, non decrescente
  - $\mathrm{ES}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ se L_1 domina stocasticamente L_2
- Tuttavia, VaR esiste sempre, ES richiede speranza finita

Expected Shortfall

- Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente (facile da ottenere nel caso di F_L invertibile):

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \frac{E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]}{1-\alpha}$$

da questa espressione si deduce che

$$E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \leq \mathrm{ES}_\alpha(L) \leq E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

dove $E[X|A] = E[X 1_A]/P(A)$; la quantità a destra è chiamata conditional tail expectation

- se la distribuzione di L è continua,

$$\mathrm{ES}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

$\Rightarrow$ ES = perdite attese sopra il VaR

Expected Shortfall

- Se si adotta l'expected shortfall come capitale, $C = \mathrm{ES}_\alpha(L)$, allora

$$E[L - C|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = 0$$

$\rightsquigarrow$ perdite attese nulle sopra il VaR

- ES con distribuzione esponenziale, $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1-\alpha))$$

- Per una famiglia scala-locazione, $L \sim \mu + \sigma\widetilde{L}$ ($\widetilde{L} \sim F$ e quindi $L \sim F_{\mu,\sigma}$), allora

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\,\mathrm{ES}_\alpha(\widetilde{L})$$

Expected Shortfall

- ▷ approccio parametrico: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ⋆ $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$
  - ⋆ caso normale standard: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)$, se $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-z^2/2}$ è la densità della normale standard

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

  - ⋆ nel caso generale, $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Expected Shortfall

- ▷ approccio parametrico: se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$ dove t_ν è t di student con $\nu > 2$ gradi di libertà, densità f_{t_ν} e funzione di ripartizione F_{t_ν}
  - ⋆ un calcolo diretto mostra che

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{f_{t_\nu}(F_{t_\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\,\frac{\nu + F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)^2}{\nu - 1}$$

- ▷ Esempio: confronto tra $\mathrm{ES}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	17.55	20.63	26.65	28.92	33.67
t Student - ν					
10.0	17.79	21.54	30.08	33.84	43.05
4.0	17.67	22.65	36.92	44.72	68.49
2.5	14.94	20.56	40.66	53.97	103.32
2.1	8.71	12.49	27.53	38.42	82.88