Ricaviamo alcune conseguenze del Teor degli zeri.

Teor. Principio di unicità (I)

Sia Ω aperto connesso. Siano $f, g \in H(\Omega)$.
Se l'insieme

$$\{ z \in \Omega \mid f(z) = g(z) \}$$

ha almeno un punto di accumulazione $z_0 \in \Omega$
allora $f \equiv g$.

Dim Sia $F = f - g \in H(\Omega)$, per il teorema degli zeri o F ha zeri isolati oppure è identicamente nulla. Per l'ipotesi fatta, z_0 è un punto di accumulazione di zeri di F, quindi non è isolato.

quindi: $F \equiv 0$. $\square$

<u>Esempio</u> Sia $m = 1, 2, 3, \ldots$. Poniamo

$$r_m(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-k+1\right)}{k!}\, \zeta^k$$

usando il criterio della radice si verifica che la serie di potenze a II membro ha raggio di convergenza 1. Quindi $r_m \in H(B_1(0))$.
Proviamo la seg. identità:

$$\boxed{\left(r_m(\zeta)\right)^m = 1+\zeta \quad , \forall\, \zeta \in B_1(0).}$$

Consideriamo intanto $\zeta \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$, $\zeta = \xi \in (-1,1)$
Scriviamo la serie di Taylor della funz.

$$\sqrt[m]{1+\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-k+1\right)}{k!}\, \xi^k$$

Sia allora

$$F(\xi) = (r_m(\xi))^m - (1+\xi)$$

Avremo $F \in H(B_1(0))$ e poi:

$$F(\xi) = 0 \quad \forall \ \xi \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$$

Quindi l'insieme degli zeri di F ha punti di accumulazione interni a $B_1(0)$, pertanto

$$F \equiv 0 .$$

Di conseguenza, r_m ci dà una determinazione olomorfa della radice m-sima di $1+\xi$ per $|\xi| < 1$.

<u>Teor</u> <u>Principio di unicità (II)</u> Sia Ω aperto connesso. Siano $f, g \in H(\Omega)$. Se esiste $z_0 \in \Omega$ t.c.

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad \forall \ k = 0, 1, 2, \dots$$

allora $f \equiv g$.

<u>Dim.</u> Sia $F = f - g$, se F non è identic. nulla esiste $m = 0, 1, 2, \dots$ t.c. $F^{(m)}(z_0) \neq 0$

Cioè

$$f^{(m)}(z_0) \neq g^{(m)}(z_0)$$

contro all'ipotesi fatta. Quindi $F \equiv 0$, cioè $f \equiv g$ $\square$

Ricapitolando, alla base del teor. degli zeri, e dei principi di unicità appena formulati, sta la seg. formula: se Ω è connesso, $f \in H(\Omega)$ e f non è id. nulla, $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists m = 0, 1, 2, \dots$ t.c.

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m \left(1 + g(z)\right)$$

dove g è olomorfa in un intorno di z_0 e vale

$$g(z) = O(|z - z_0|) \text{ per } z \to z_0, \text{ e}$$

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Da questa formula si ricava anche un'altro importante risultato:

Teorema della mappa aperta.

Sia Ω aperto connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ non costante. Allora per ogni aperto $A \subset \Omega$, $f(A)$ è aperto.

Dim. È suff. dimostrare che $\forall z_0 \in \Omega$ e per ogni $B_r(z_0)$, con r suff. piccolo,

$$f(B_r(z_0)) \text{ è aperto.}$$

Se f non è costante allora $f(z)-f(z_0)$ non è identic. nulla, quindi $\exists\, m = 1, 2, \dots$ t.c.

$$f(z)-f(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m (1+g(z))$$

con $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ e $g(z) = O(|z-z_0|)$.

Quindi se $z-z_0$ è suff. piccolo, $|g(z)| < 1$.

Poniamo $a \neq 0$ t.c. $a^m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$, e ricordiamo la funzione r_m introdotta prima. Si ottiene

$$f(z) - f(z_0) = a^m (z-z_0)^m \left(r_m(g(z))\right)^m$$

Quindi

$$f(z) - f(z_0) = \left(a(z-z_0)\, r_m(g(z))\right)^m.$$

Poniamo

$$\varphi(z) = a(z-z_0)\, r_m(g(z)).$$

Ora: $\varphi \in H(B_r(z_0))$, per $r>0$ suff. piccolo e

$$\varphi(z) = a(z-z_0)\left(1 + O(|z-z_0|)\right)$$

quindi

$$\varphi'(z_0) = a \neq 0$$

cioè, eventualmente prendendo r ancora più piccolo, φ è invertibile su $B_r(z_0)$, pertanto φ^{-1} è continua e quindi $\varphi : B_r(z_0) \to U$ è aperta dove U è un intorno di 0.

Allora $f(z) - f(z_0) = (\varphi(z))^m$

è la composizione di φ con la potenza m-sima

$$P_m(\xi) : \xi \longrightarrow \xi^m$$

Ora $P_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è aperta. Infatti P_m

manda intorni dello 0 in intorni dello 0 e

se si fissa $w_0 \neq 0$ $\frac{d}{d\xi} P_m(w_0) \neq 0$, quindi

P_m è invertibile vicino a w_0, e quindi trasforma

intorni di w_0 (suff. piccoli) in aperti.

In conclusione f è localmente composiz. di

mappe aperte, quindi è aperta. $\square$

<u>Teor.</u> (Principio del massimo modulo) Sia Ω aperto

connesso. Sia $f \in H(\Omega)$, se esiste $z_0 \in \Omega$ t.c.

$$|f(z_0)| = \sup \{ |f(z)| \mid z \in \Omega \}$$

allora f è costante.

In altri termini: se f non è costante,

$\forall\, z_0 \in \Omega$ vale

$$|f(z_0)| < \sup_{\Omega} |f|$$

Dim. Sia $M = \sup_{\Omega} |f|$. Allora

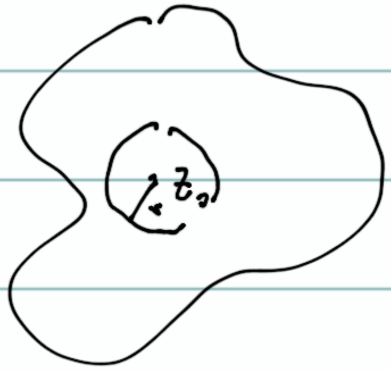
$$f(\Omega) \subset \overline{B_M(0)}$$

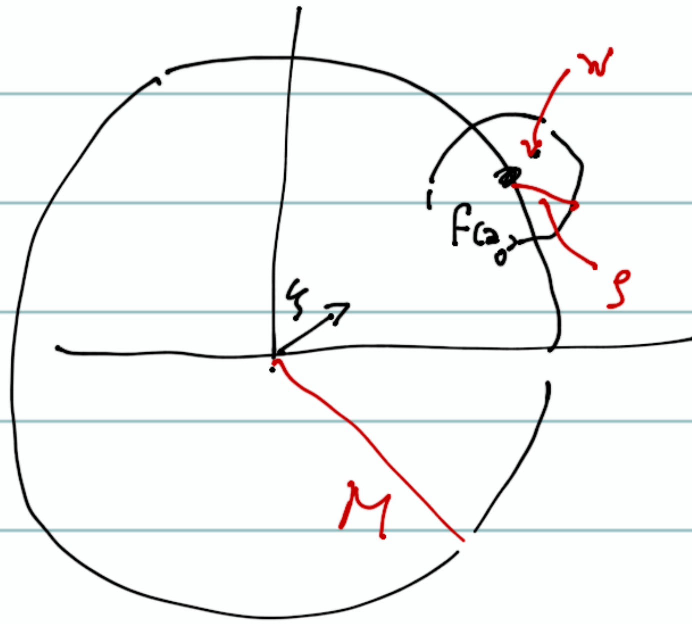
Se $|f(z_0)| = M$, significa che

$$f(z_0) \in \partial B_M(0)$$

Supp. per ass. f non costante, allora è una mappa aperta, quindi se $r>0$ è t.c. $B_r(z_0) \subset \Omega$ si ha che $U = f(B_r(z_0))$ è aperto. Quindi esiste $\rho>0$ t.c. $B_\rho(f(z_0)) \subset U \subset f(\Omega)$.

Sia $\xi = \dfrac{f(z_0)}{M}$, $w = f(z_0) + \frac{\rho}{2}\xi \in B_\rho(f(z_0))$.





Ora $|w| = M + \frac{\rho}{2} > M$ quindi $f(\Omega) \not\subset \overline{B_M(0)}$.
Cioè abbiamo raggiunto una contraddizione con l'ipotesi f non costante. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia Ω aperto connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ e sutt.

$$\inf \{ |f(z)| \mid z \in \Omega \} > 0$$

Se $\exists\, z_0 \in \Omega$ t.c. $|f(z_0)| = \inf \{ |f(z)| \mid z \in \Omega \}$ allora f è costante.

— . —

Riportiamo ora dalle limitazioni sulle derivate di una funzione olomorfa ricavate dalla formula di Cauchy.

Ricordiamo che se $f \in H(B_R(z_0)) \cap C(\overline{B_R(z_0)})$ e

$$M = \max\{|f(z)| \mid |z - z_0| = R\}$$

abbiamo

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!\,M}{R^k} \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Ricordiamo il seg. Lemma

<u>Lemma</u> Sia $f \in H(B_R(z_0))$ e sia

$$M = \sup\{|f(z)| \mid |z - z_0| < R\}$$

allora

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!\,M}{R^k} \qquad \forall k.$$

<u>Dim.</u> Sia $0 < \rho < R$, allora

$$\max_{\partial B_\rho(z_0)} |f| \leq M$$

Quindi si ricava:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!\, M}{\rho^k} \qquad \forall\ k,$$

e facendo il limite per $\rho \to R^-$, segue la tesi. $\square$

Teorema di Liouville. Sia $f \in H(\mathbb{C})$. Se f è limitata allora è costante.

Dim. Sia $M \geq 0$ t.c.

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall\ z.$$

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato e si consideri $B_R(z_0)$, $\forall\ R > 0$. Allora:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \longrightarrow 0 \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Quindi $f' \equiv 0$ su tutto $\mathbb{C}$. Di conseguenza $f^{(k)} \equiv 0$ $\forall\ k \geq 1$, quindi $\forall\ z, z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = f(z_0) + 0$$

Il resto della S. di Taylor è banale

Cioè f è costante. $\square$

Dal Teor. di Liouville si ricava la seg. importante conseguenza.

<u>Teor. Fondamentale dell'Algebra</u> Sia

$$P_N(z) = a_N z^N + \dots + a_0$$

un polinomio di grado $N > 0$ $(a_N \neq 0)$. Allora P_N ha almeno uno zero.

<u>Dim.</u> Per assurdo supp. $P_N(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Poniamo $f(z) = \dfrac{1}{P_N(z)}$, $f \in H(\mathbb{C})$.

Proviamo che f è limitata. Sia $|z| = R$ con R suff. grande

$$|P_N(z)| \geq |a_N| R^N - \sum_{j=0}^{N-1} |a_j| R^j =$$

$$= |a_N| R^N \left(1 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|a_j|}{|a_N|} R^{j-N}\right) =$$

$$= |a_N| R^N \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) \quad \text{per} \quad R \to \infty$$

Allora $|f(z)| = O\left(\frac{1}{R^N}\right)$ per $R \to \infty$

Cioè $|f(z)|$ è una funzione continua su $\mathbb{C}$ infinitesima all'∞. In particolare $\exists R > 0$ t.c. $|f(z)| \leq 1$ se $|z| > R$.

Sia

$$M = \max\{|f(z)| \mid |z| \leq R\}$$

Quindi

$$|f(z)| \leq M + 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

cioè f è limitata, quindi per Liouville, costante: $f(z) = f(0)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Quindi

$$P_N(z) = \frac{1}{f(0)} = P_N(0) = a_0$$

il che contraddice l'ipotesi che P_N abbia grado $N > 0$. $\square$

Variante al Teor di Liouville

Sia $f \in H(\mathbb{C})$ t.c. esistono $N = 0, 1, 2, \ldots$, $C > 0$ e $R > 0$ t.c.

$$|f(z)| \leq C |z|^N \qquad \forall z \text{ t.c. } |z| \geq R.$$

Allora f è un polinomio di grado al più N.

Dim. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $\rho > 0$ t.c.

$$B_\rho(z_0) \supset \overline{B_R(0)}.$$

$$|f^{(N+1)}(z_0)| \leq \frac{(N+1)! \max_{\partial B_\rho(z_0)} |f|}{\rho^{N+1}}$$

Se $z \in \partial B_\rho(z_0)$

$$|f(z)| \leq C |z|^N$$

$$|z - z_0| = \rho \quad , \quad |z| \leq |z - z_0| + |z_0|$$

quindi

$$\max_{\partial B_\rho(z_0)} |f| \leq C\left(\rho + |z_0|\right)^N$$

$$|f^{(N+1)}(z_0)| \leq \frac{(N+1)!}{\rho^{N+1}} C\left(\rho + |z_0|\right)^N \to 0 \quad \rho \to \infty.$$

Quindi $f^{(N+1)} \equiv 0$. Allora lo sviluppo di Taylor di f centrato in ogni punto si arresta al termine N-esimo. Cioè è un polinomio di grado $\leq N$. $\square$