Notazione sulla derivata composta

Prendiamo una funzione

$$f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto f(x) \tag{1}$$

che associa a ogni numero x un numero $f(x)$.

La derivata di f è una funzione anch'essa da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che chiamiamo f':

$$f'\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto f'(x) \tag{2}$$

che ad ogni numero x associa il numero $f'(x)$.

La funzione derivata è indicata anche col simbolo $\frac{df}{dx}$, cioè per ogni numero $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) \tag{3}$$

Per esempio, se $f(x) = x^2$, $\frac{df}{dx}(x) = 2x$. La funzione derivata può essere valuta su ogni numero reale, per esempio $\frac{df}{dx}(2) = 4$.

Ora componiamo f con la funzione g, dove g associa a ogni numero t il numero $g(t)$. La funzione composta è

$$f \circ g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad t \mapsto f(g(t)) \tag{4}$$

Calcoliamo la funzione derivata di $f \circ g$:

$$\frac{df \circ g}{dt}(t) = f'(g(t))g'(t) \tag{5}$$

cioè facciamo la derivata di f rispetto al suo argomento, la valutiamo in $g(t)$ e poi la moltiplichiamo per la derivata di g rispetto al suo argomento. Usando l'altra notazione, dove $f'(...) = \frac{df}{dx}(...)$ e $g'(...) = \frac{dg}{dt}(...)$, si può scrivere

$$\frac{df \circ g}{dt}(t) = \frac{df}{dx}(g(t))\frac{dg}{dt}(t) \tag{6}$$

Quando abbiamo funzioni di più variabili, la notazione f' non è più disponibile, in quanto dobbiamo dire rispetto a che argomento di f stiamo derivando. Prendiamo per esempio

$$L\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad (q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q}) \tag{7}$$

La derivata di L rispetto al primo argomento è la funzione

$$\frac{\partial L}{\partial q}\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad (q, \dot{q}) \mapsto \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) \tag{8}$$

Definiamo le funzioni

$$\varphi\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad (\alpha, q) \mapsto \varphi(\alpha, q) \tag{9}$$

$$\psi\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad (\alpha, q, \dot{q}) \mapsto \psi(\alpha, q, \dot{q}) \tag{10}$$

Possiamo quindi definire la funzione composta $L \circ (\varphi, \psi)$

$$L \circ (\varphi, \psi)\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad (\alpha, q, \dot{q}) \mapsto L(\varphi(\alpha, q), \psi(\alpha, q, \dot{q})) \tag{11}$$

e possiamo calcolarci la derivata rispetto al primo argomento, cioè $\frac{\partial L \circ (\varphi, \psi)}{\partial \alpha}$. Questa funzione nelle note di Benettin et al è indicata semplicemente come $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$. Applicando la regola della funzione composta, analogamente a quello fatto in (6), otteniamo

$$\frac{\partial L \circ (\varphi, \psi)}{\partial \alpha}(\alpha, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}(\varphi(\alpha, q), \psi(\alpha, q, \dot{q})) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\varphi(\alpha, q), \psi(\alpha, q, \dot{q})) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\alpha, q, \dot{q}) \tag{12}$$

Questa notazione molto pesante è semplificata nelle note in

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \tag{13}$$