



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRIESTE

CENTRO INTERDIPARTIMENTALE PER LA RICERCA DIDATTICA

Via A. Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia

Tel.: +39 040 558 2659

Fax: +39 040 558 2660 email: cird@units.it

CIRD

<http://www.units.it/cird>

12 dicembre 2013

Prof.ssa Marina Rocco

Storie di numeri: appunti e proposte didattiche. Parte Prima.

STORIE DI NUMERI

APPUNTI E PROPOSTE DIDATTICHE
PARTE I

Trieste, 12 dicembre 2013

Marina Rocco

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica

(Dip. di Geo-Scienze, Università di Trieste)

marina.rocco1@tin.it

I NUMERI NATURALI

A che cosa servono?

INVITO ALLA RIFLESSIONE

LE MELE DI MARIA

Nel cesto di Maria ci sono 10 mele. Sappiamo che 3 mele sono rosse, 4 mele hanno ancora la foglia.

Disegna le mele di Maria.

QUANTE SONO LE SOLUZIONI ACCETTABILI?

Prima di mettersi a contare,

bisogna sapere COSA si vuol contare!!!

COSA SONO LE OPERAZIONI?

COSA SONO GLI ALGORITMI DI CALCOLO?

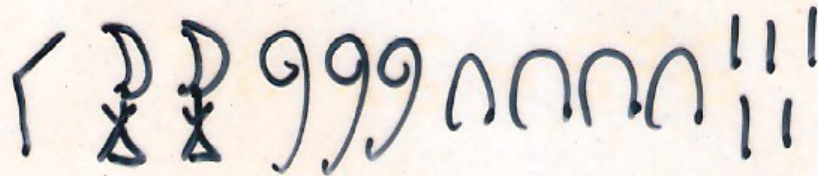
DIPENDENTI/INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI
NUMERAZIONE?

IL SISTEMA DI NUMERAZIONE

EGIZIO (~ 3000 a. C.)

SETTE SIMBOLI, UNO PER OGNUNA
DELLE PRIME POTENZE DI 10

12.345

⌋ 

LE CIFRE POSSONO ESSERE
DISPOSTE ANCHE IN ALTRI
ORDINI O ORIENTAMENTI

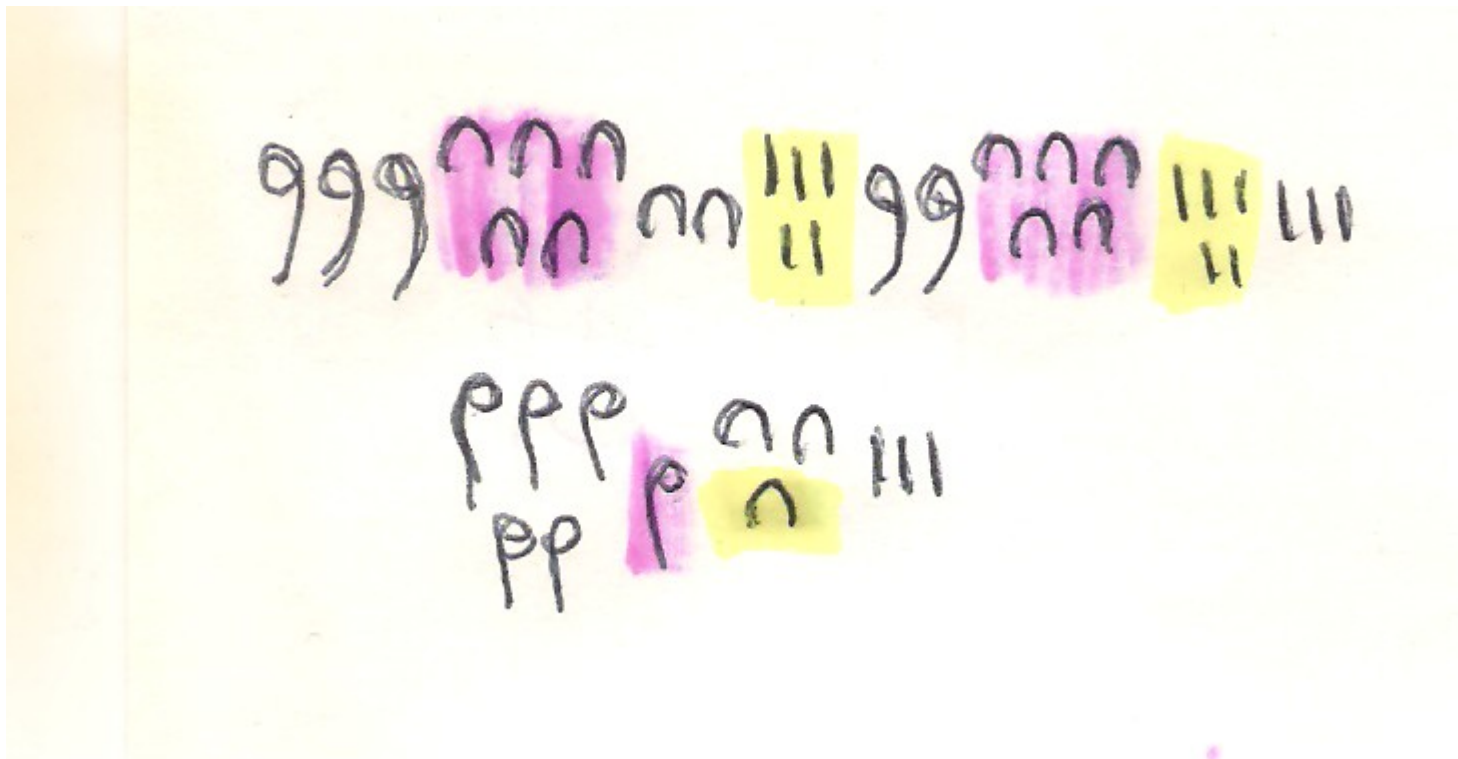
IL SISTEMA È IN BASE 10
ED È ADDITIVO

L'ADDIZIONE ASSUME UN
RUOLO PRIVILEGIATO TRA LE
OPERAZIONI

AD ESSA AD ESEMPIO SI
RICONDUCE LA MOLTIPLICAZIONE
(PAPIRO DI RHIND, circa 1650 a. C.)

ESEGUIAMO UN'ADDIZIONE

$$375+258$$



VANTAGGI DI UN SISTEMA ADDITIVO



LA MOLTIPLICAZIONE EGIZIA

Un esempio facile: 27×16

Usando la proprietà associativa della moltiplicazione,
posso trasformare in:

$$\begin{aligned} 27 \times (2 \times 8) &= \\ (27 \times 2) \times 8 & \end{aligned}$$

Quindi $27 \times 16 = 54 \times 8$

Proseguendo con successivi raddoppi del primo
fattore e dimezzamenti del secondo:

| | |
|-----|----|
| 27 | 16 |
| 54 | 8 |
| 108 | 4 |
| 216 | 2 |
| 432 | 1 |

$$27 \times 16 = 432$$

E quando nessuno dei due fattori è
una potenza di 2?

$$27 \times 24$$

$$24 = 8 + 16$$

Col metodo precedente calcolo 27×8 e 27×16
e sommo i risultati

Sempre più difficile...

$$27 \times 37$$

| | | | |
|-----|----|-----------|------------|
| 27 | 37 | $37=36+1$ | 27 |
| 54 | 18 | | |
| 108 | 9 | $9=8+1$ | 108 |
| 216 | 4 | | |
| 432 | 2 | | |
| 864 | 1 | | 864 |
| | | | 999 |

Scrivo il secondo fattore in base 2

$$37 = 32 + 4 + 1$$

$$32 = 2^5 \quad 4 = 2^2 \quad 1 = 2^0$$

Quindi 37 in base 2 si scrive:

100101

La posizione delle cifre 1 dice quali raddoppi sommare

Posso usare la tabella dei raddoppi del primo
fattore qualunque sia il secondo fattore

27x ...

| | |
|------|--------|
| 27 | =27x1 |
| 54 | =27x2 |
| 108 | =27x4 |
| 216 | =27x8 |
| 432 | =27x16 |
| 864 | =27x32 |
| 1728 | =27x64 |

$$\mathbf{56=32+16+8}$$

$$27x56=864+432+216$$

$$\mathbf{85=64+16+4+1}$$

$$27x85=1728+432+108+27$$

VANTAGGI DELLA MOLTIPLICAZIONE EGIZIA



LA DIVISIONE

$$400 : 17$$

Raddoppio il divisore finchè non supero 400:

$$\text{il divisore: } 17$$

$$2 \text{ volte: } 34$$

$$4 \text{ volte: } 68$$

$$8 \text{ volte: } 136$$

$$16 \text{ volte: } 272$$

$$400 = 16 \text{ volte il divisore} + 128$$

$$128 = 4 \text{ volte il divisore} + 60$$

$$60 = 2 \text{ volte il divisore} + 26$$

$$26 = 1 \text{ volta il divisore} + 9$$

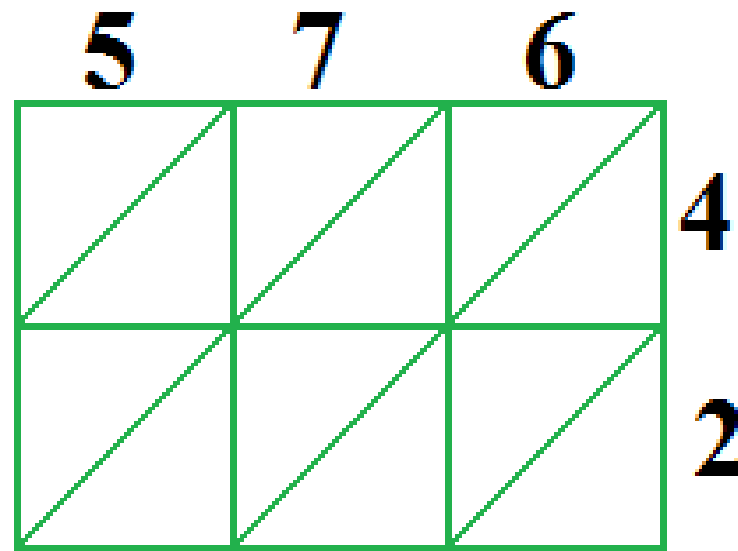
VANTAGGI DELLA DIVISIONE EGIZIA



MOLTIPLICAZIONE A GELOSIA

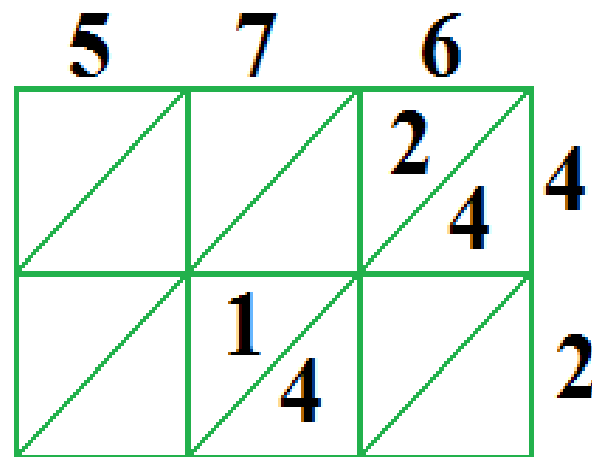
Presente in India almeno dal XII sec.

$$576 \times 42$$

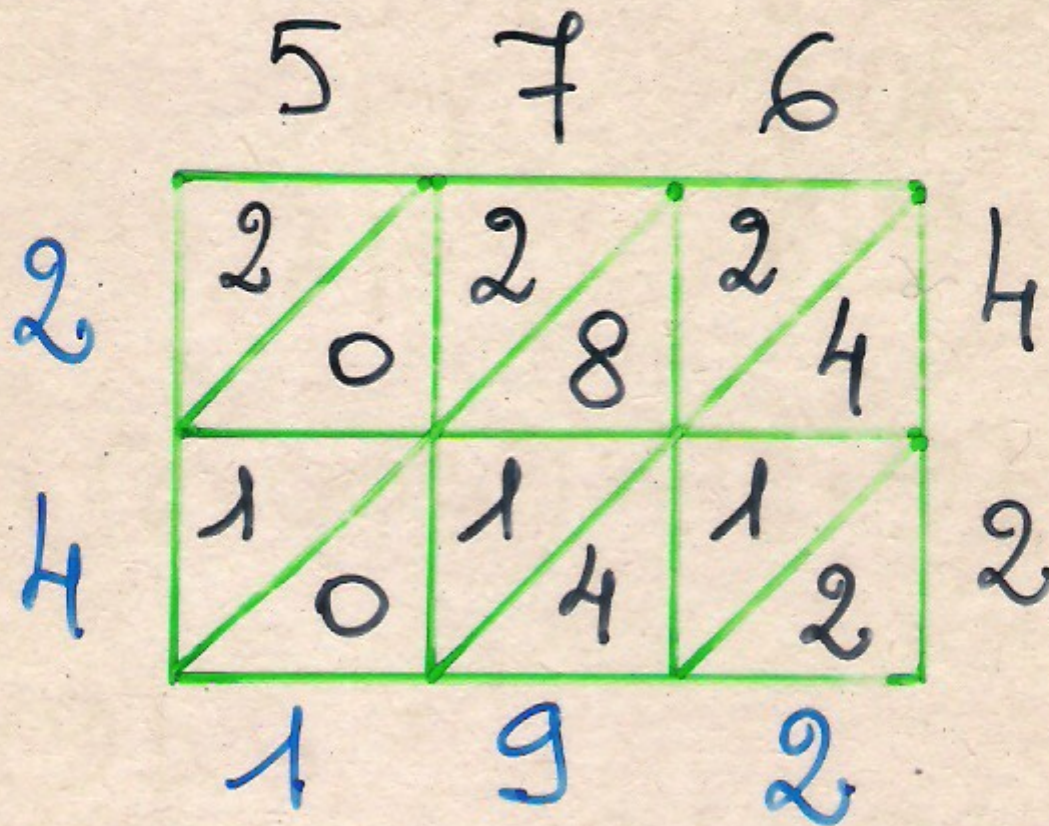


Riempio le caselle...

... anche a caso



Sommo “in diagonale”



$$576 \times 42 = 24192$$

LA MOLTIPLICAZIONE ORDINARIA

$$\begin{array}{rcccccc} 5 & 7 & 6 & \times & 4 & 2 \\ \hline & & 1 & 1 & 5 & 2 \\ & 2 & 3 & 0 & 4 & \\ \hline & 2 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array}$$

Passaggi nascosti...

$$\begin{aligned}576 \times 42 &= 576 \times (40 + 2) \\ &= 576 \times 40 + 576 \times 2\end{aligned}$$

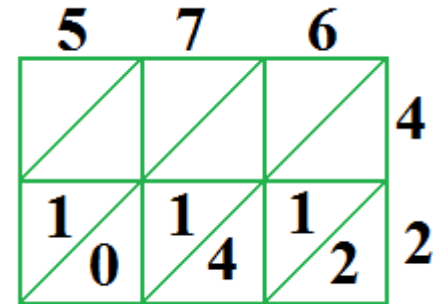
$$576 = 500 + 70 + 6$$

$$576 \times 2 = 500 \times 2 + 70 \times 2 + 6 \times 2$$

$$576 \times 40 = 500 \times 40 + 70 \times 40 + 6 \times 40$$

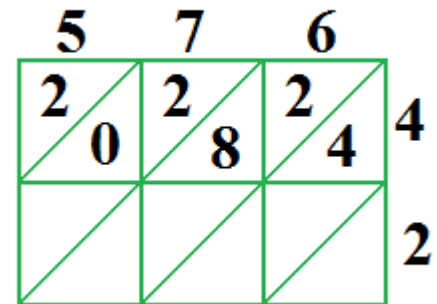
$$576 \times 2 = 500 \times 2 + 70 \times 2 + 6 \times 2$$

$$\begin{array}{r}
 6 \times 2 = \quad \quad 12 \\
 70 \times 2 = \quad \quad 140 \\
 500 \times 2 = \quad \quad 1000 \\
 \hline
 1152
 \end{array}$$



$$576 \times 40 = 500 \times 40 + 70 \times 40 + 6 \times 40$$

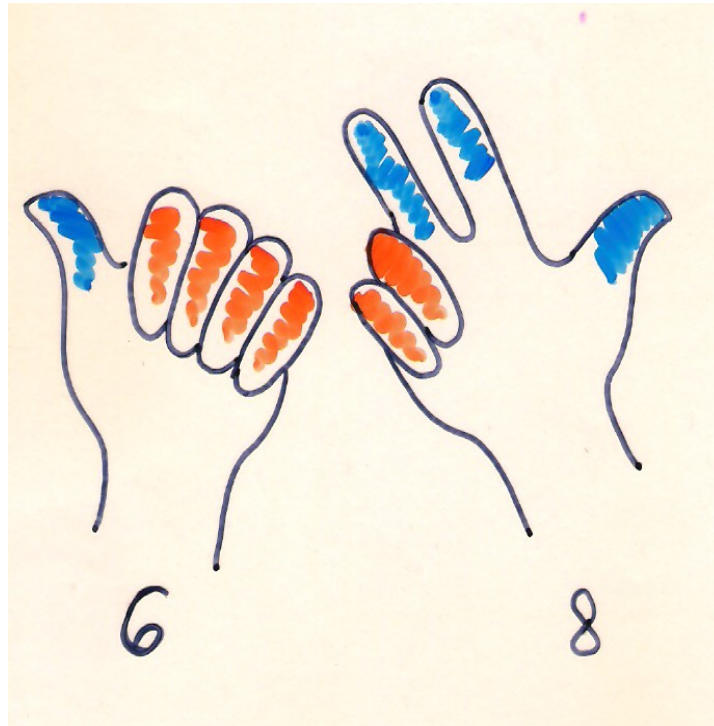
$$\begin{array}{r}
 6 \times 40 = \quad \quad 240 \\
 70 \times 40 = \quad \quad 2800 \\
 500 \times 40 = \quad \quad 20000 \\
 \hline
 23040
 \end{array}$$



VANTAGGI DELLA MOLTIPLICAZIONE A GELOSIA



MOLTIPLICAZIONE RUSSA O “DEL CONTADINO”



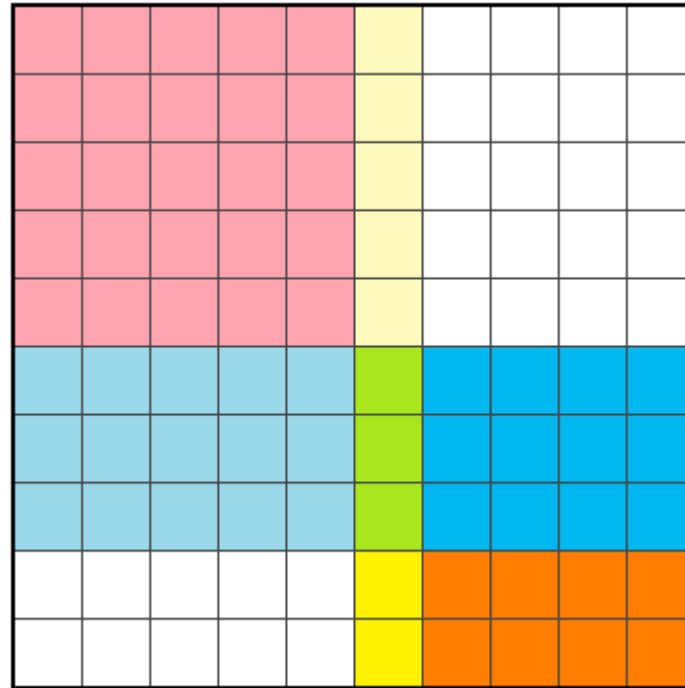
$$6 \times 8$$

Alzo tante **dita** quante ogni fattore diminuito di 5

Sommo le **dita alzate**: è la “cifra” delle decine

Moltiplico le **dita piegate**: è la “cifra” delle unità

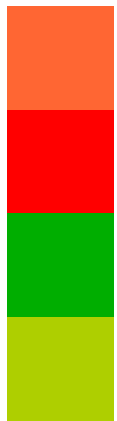
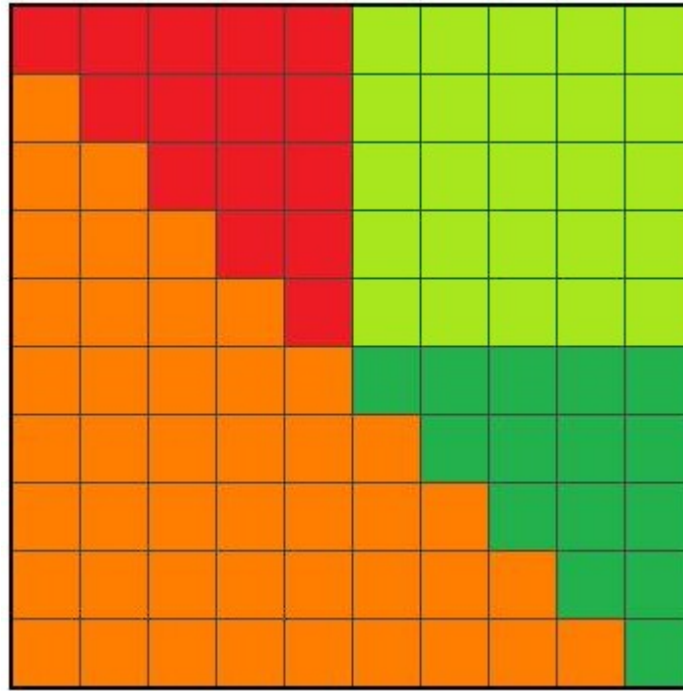
ATTENZIONE! **7X6?**



Vedi pagine 131, 132

VANTAGGI DELLA MOLTIPLICAZIONE RUSSA





Si ricava con la proprietà commutativa

Si deve studiare

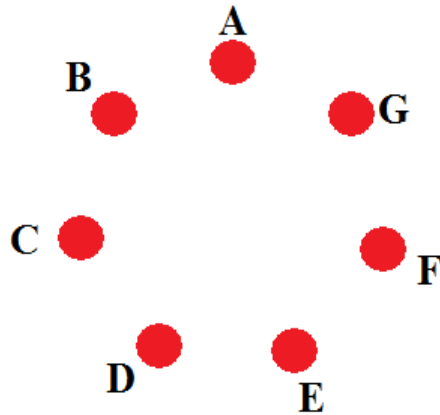
Si ricorre alla moltiplicazione russa

Si può modificare la regola ma conviene studiare

INTERVALLO

CARAMELLE AI BAMBINI

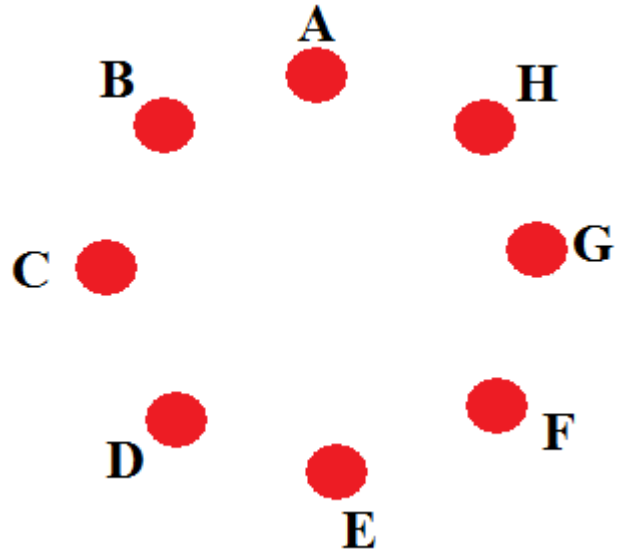
Ho 56 caramelle che voglio distribuire fra 7 bambini secondo una procedura un po' bizzarra...



Li faccio sedere intorno ad un tavolo rotondo e spiego che, a cominciare da Aldo, darò una caramella alla volta: 1 a lui, salto il vicino alla sua destra, 1 al prossimo, ... e così via fino ad esaurire le caramelle.

È UNA DISTRIBUZIONE EQUA? (57 caramelle?)

DURANTE LA SPIEGAZIONE...



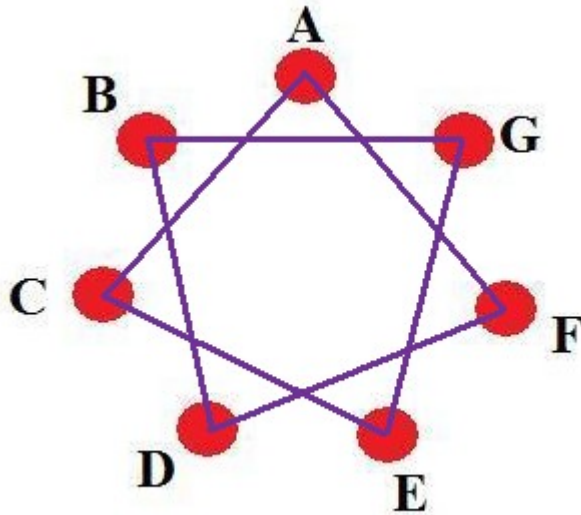
Un altro bambino si siede a tavola

***LA DISTRIBUZIONE È
ANCORA EQUA?***

Quanti bambini posso “saltare” nella prima o nella seconda situazione affinché la distribuzione sia equa?

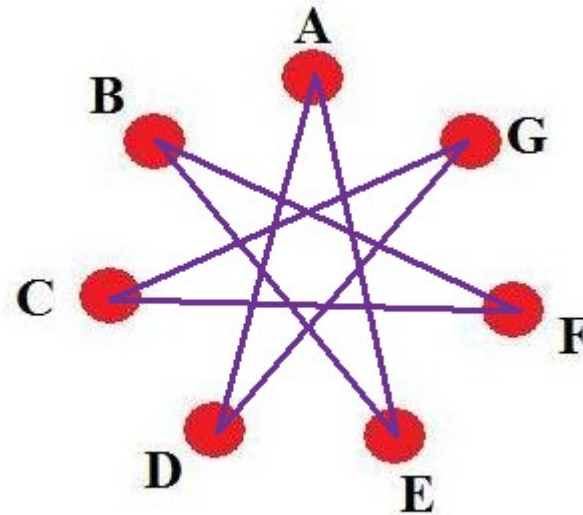
Esiste una relazione tra il numero di bambini e il numero di “salti”?

CON 7 BAMBINI



“salto” 1 b:
ACEGBDF

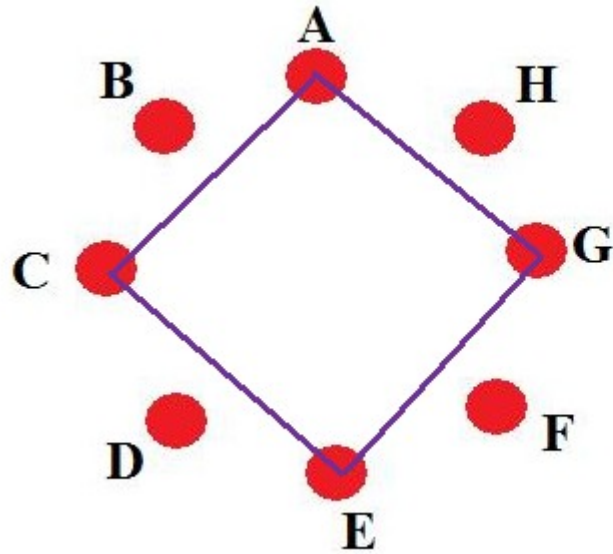
“salto” 4 b:
AFDBGEC



“salto” 2 b:
ADGCFBE

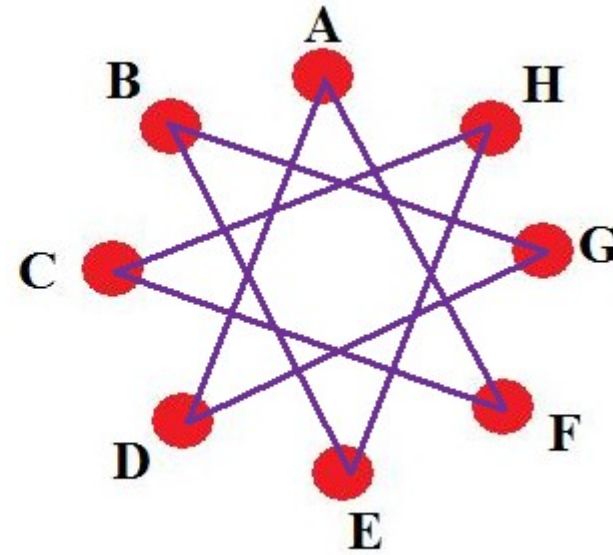
“salto” 3 b:
AEBFCGD

CON 8 BAMBINI



“salto” 1 b: ACEG

“salto” 5 b:
AGEC



“salto” 2 b:
ADGBEHCF

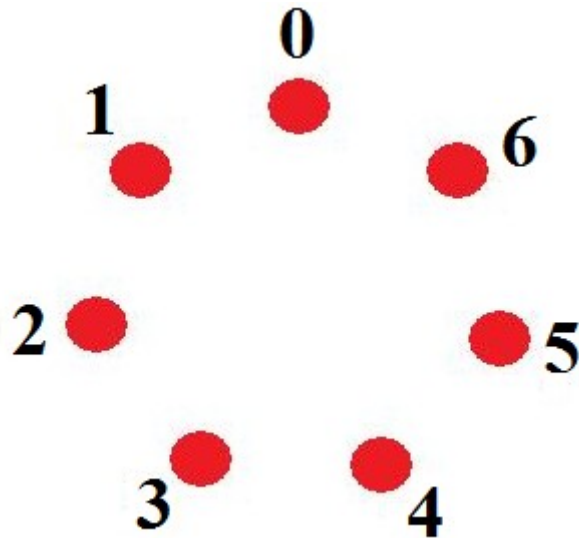
“salto” 4 b:
AFCHEBGD

ARITMETICHE “DELL'OROLOGIO”

Avrei potuto costruire degli “orologi”

Invece di dire “salto 1 bambino”,
devo dire “sommo 2”...

Cioè *calcolo i multipli di 2*



COSTRUIAMO LA TAVOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE mod7

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

COSTRUIAMO LA TAVOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE mod8

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 |
| 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| 5 | 0 | 5 | 2 | 7 | 4 | 1 | 6 | 3 |
| 6 | 0 | 6 | 4 | 2 | 0 | 6 | 4 | 2 |
| 7 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

CAUSE DEI COMPORTAMENTI

7 è un numero primo, 8 no

2, 4, 6 hanno fattori in comune con 8

NUMERI PRIMI, NUMERI PRIMI TRA LORO

DIPENDENTI/INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI
NUMERAZIONE?

CRITERI DI DIVISIBILITÀ

DIPENDENTI/INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI
NUMERAZIONE?

Esempio: “un numero è divisibile per 2 se lo è la cifra
delle unità”

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Base 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Base 3 | 0 | 1 | 2 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | 100 | 101 | 102 | 110 | 111 |
| Base 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 | 11 | 12 | 13 | 20 | 21 | 22 | 23 | 30 | 31 |
| Base 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| Base 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 20 | 21 |

Si direbbe:

- Se la base è pari, il criterio funziona.
- Se la base è dispari, come potrebbe diventare?

COME SI GIUSTIFICA?

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 9

Un numero è divisibile per 9 se lo è la somma delle sue cifre.

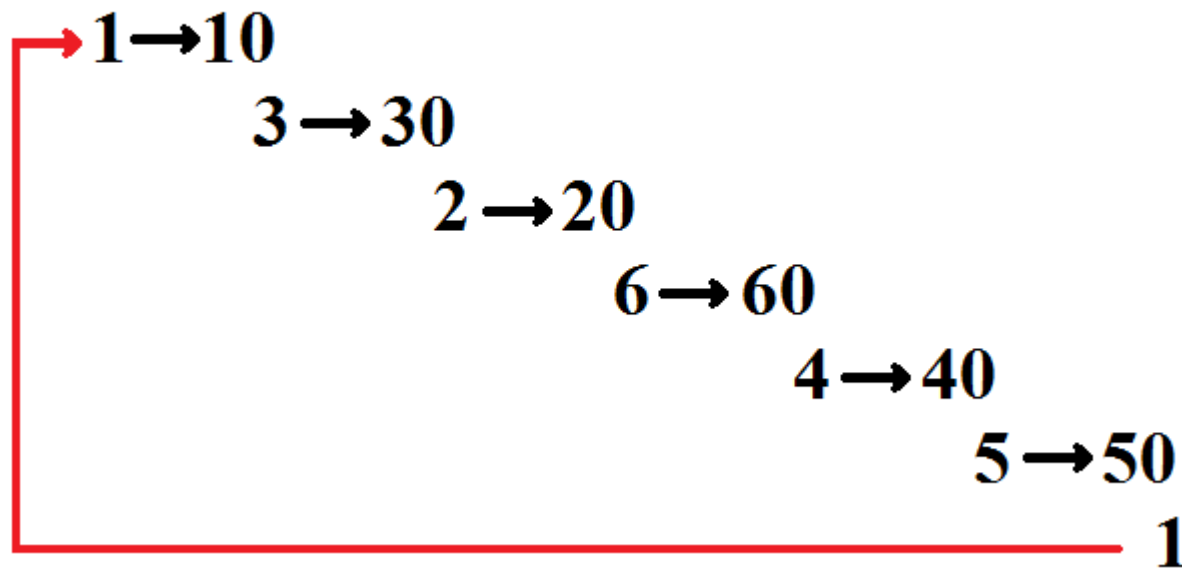
COME SI GIUSTIFICA?

COME SI GENERALIZZA?

NUMERI PERIODICI

DIPENDE/NON DIPENDE DAL SISTEMA DI
NUMERAZIONE?

$$1 : 7 = 0,142857$$

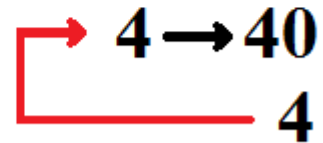


Si suggerisce di provare anche $2:7$; $3:7$; $4:7$; ...

$$1 : 12 = 0,083$$

$$1 \rightarrow 10$$

$$10 \rightarrow 100$$

$$4 \rightarrow 40$$


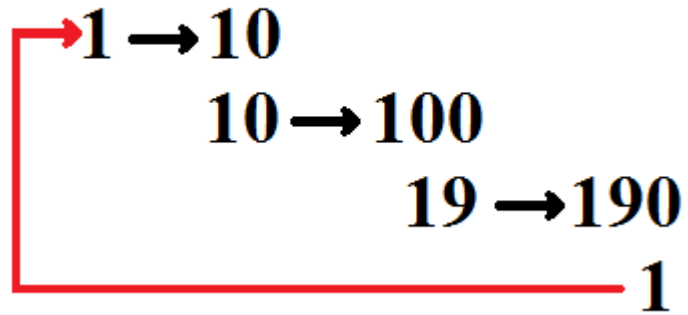
Compare un “antiperiodo” di 2 cifre: perchè?

$$1 : 12 = 0,5 \quad \text{in base 60}$$

$$1 \rightarrow 60$$

$$0$$

$$1 : 27 = 0,037$$



$$1 : 27 = 0; 2, 13, 20 \text{ in base } 60$$

$$1 \rightarrow 60$$
$$6 \rightarrow 360$$
$$9 \rightarrow 540$$
$$0$$

QUANDO SI GENERA UN NUMERO PERIODICO?

Qualunque sia la base b di numerazione, sono primi tra loro:

$$b \text{ e } b-1$$

$$b \text{ e } b+1$$

$$1 : (b-1) = ?$$

$$1 : (b+1) = ?$$