U N I V E R S I T A’ D E G L I S T U D I D I T R I E S T E

CENTRO INTERDIPARTIMENTALE PER LA RICERCA DIDATTICA
Via A. Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia
Tel.: +39 040 558 2659
*Fax: +39 040 558 2660*email: cird@units.it

CIRD
http://www.units.it/cird

19 dicembre 2013
Prof.ssa Marina Rocco
Storie di numeri: appunti e proposte didattiche. Parte seconda.

STORIE DI NUMERI

APPUNTI E PROPOSTE DIDATTICHE
PARTE II

Trieste, 19 dicembre 2013

Marina Rocco
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
(Dip. di Geo-Scienze, Università di Trieste)
marina.rocco1@tin.it

DI NUOVO CONTARE...

Alcuni amici si danno appuntamento e ciascuno saluta gli altri con una stretta di mano.

Quante strette di mano verrebbero scambiate se gli amici fossero 7? e se fossero 20?

Strategie per risolvere

•Ciascuno stringe la mano ai rimanenti: se sono 7, ciascuno stringe la mano a 6 amici. Ma in questo modo...

•Non arrivano tutti insieme! Il primo non ha mani da stringere; il secondo stringe una mano, il terzo ne stringe due; ...

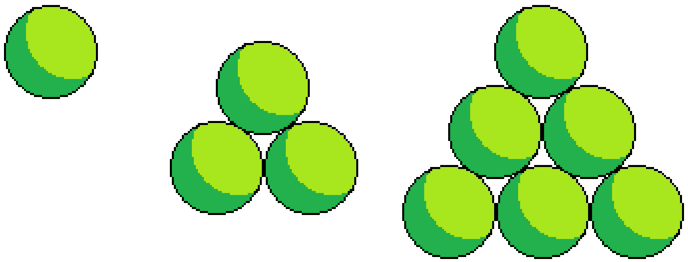
Problemi associati

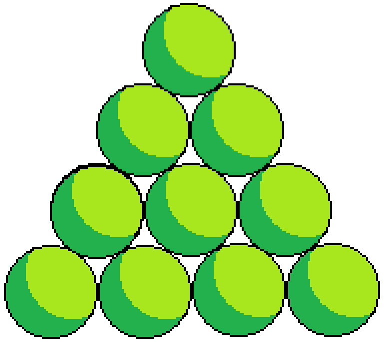
- Quanti segmenti hanno estremi in *n* punti assegnati?
- Quante diagonali ha un poligono di *n* vertici?

Ho un certo numero di sfere tutte uguali...

… con cui voglio costruire un “tetraedro”.

Quante me ne occorrono se la struttura
ha 7 strati?





- Il primo strato ha 1 sfera
- Il secondo ne ha 1+2
- Il terzo ne ha 1+2+3
- Il quarto ne ha 1+2+3+4
- ecc

MarinaRocco

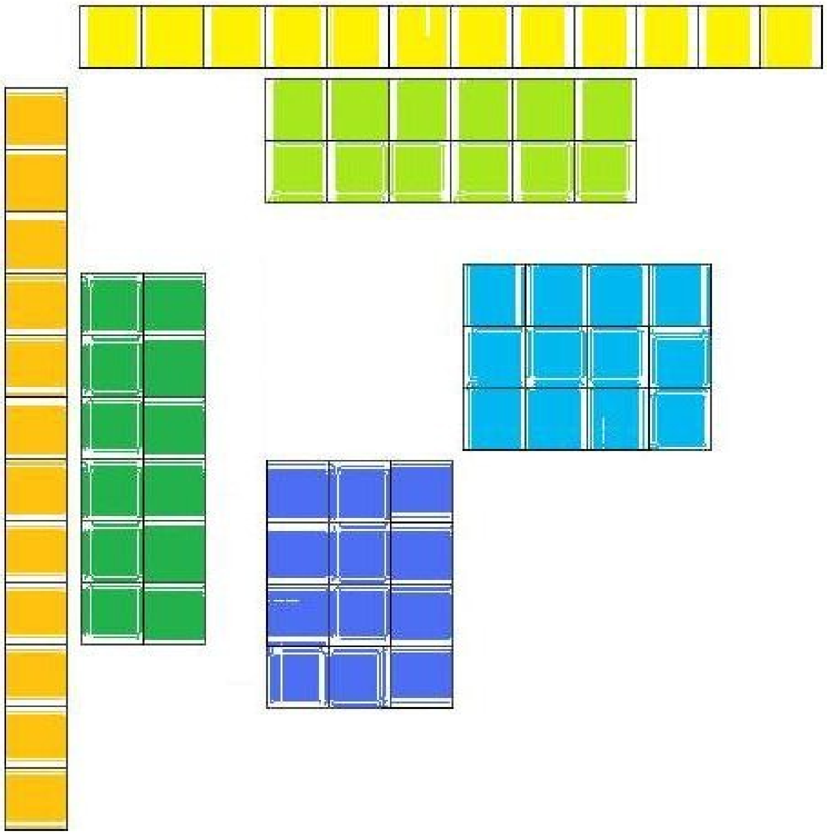
Ho un certo numero di piastrelle tutte uguali...

Quante configurazioni rettangolari posso ottenere con 12 piastrelle?

E se le piastrelle fossero 36?

… o qualunque altro numero?

Con 12 piastrelle



Come rettangoli, sono a due a due congruenti...

… ma se chiedete al piastrellista...

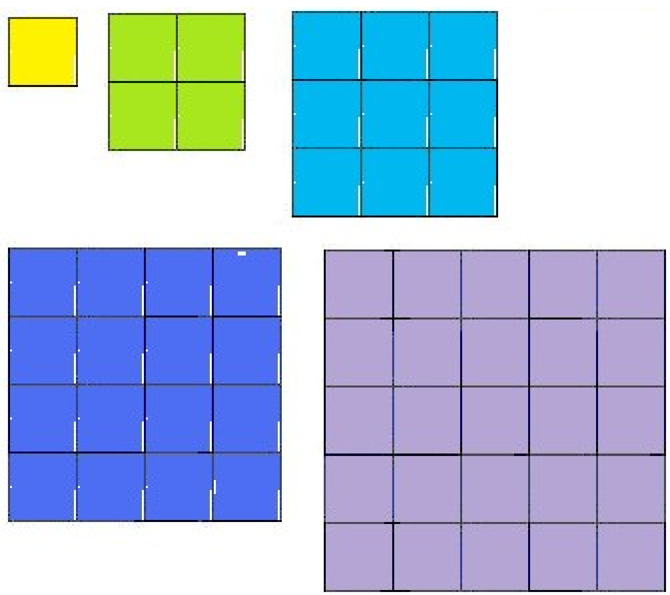
IN GENERALE

- Ci sono numeri (come 36) per le quali una configurazione è un quadrato.
- Ci sono numeri (come 37) per i quali trovo solo l'allineamento e l'incolonnamento.
- Trovo tante configurazioni quante le coppie moltiplicative del numero dato.

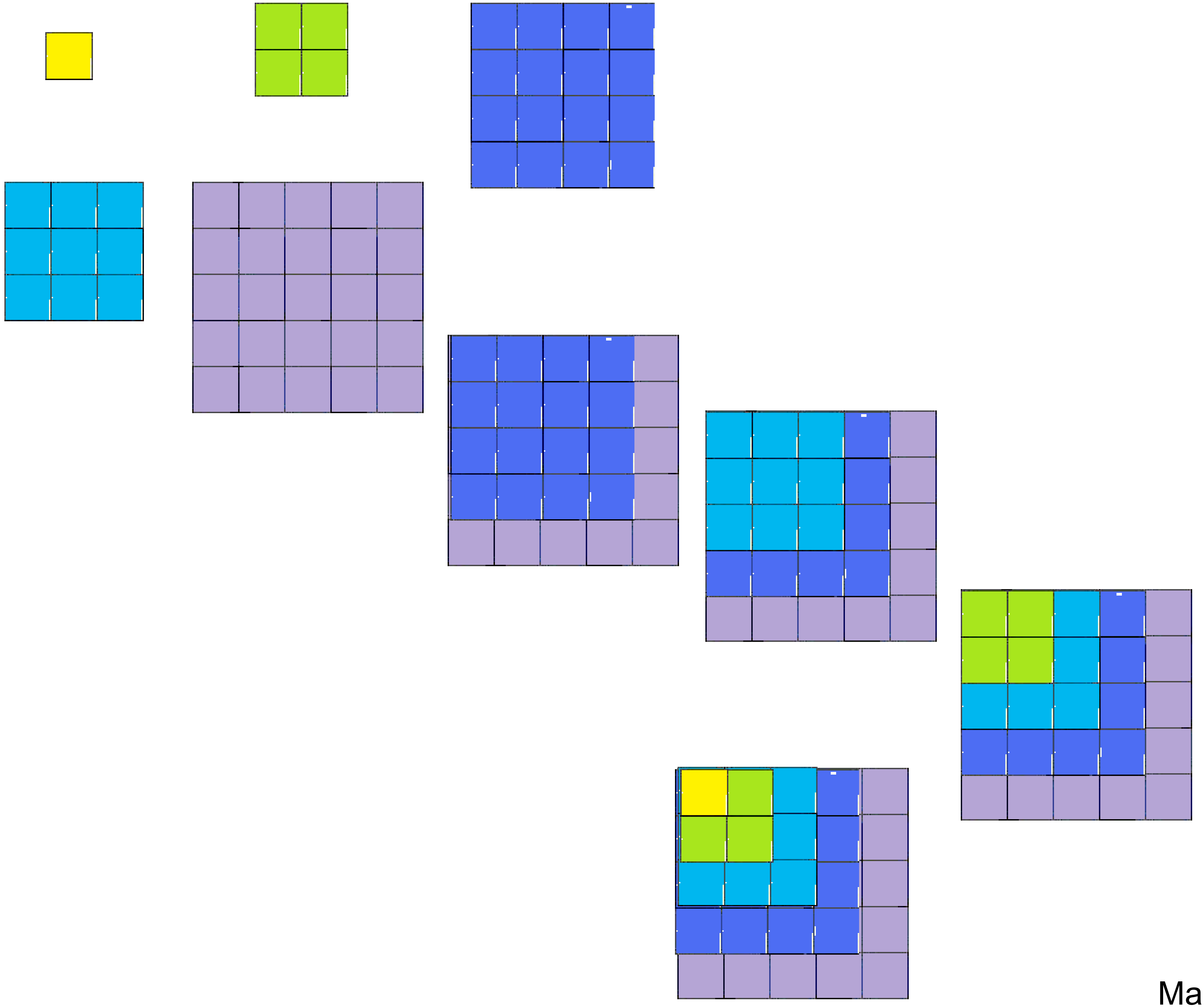
Ma quante sono?

I NUMERI QUADRATI

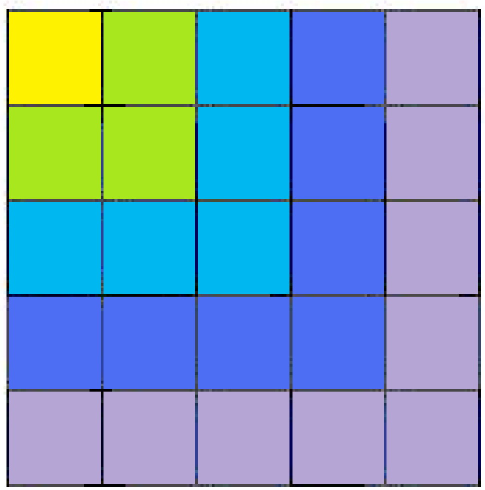
Come 36, anche altri numeri ammettono una configurazione quadrata.



Sovrapponiamo questi quadrati, col più grande di sotto...



MarinaRocco



Da ciascun quadrato sporge
una parte di quello sottostante

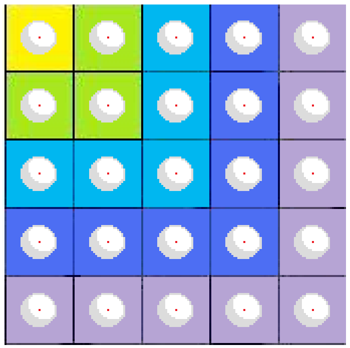
Si vede così che:

4=1+3

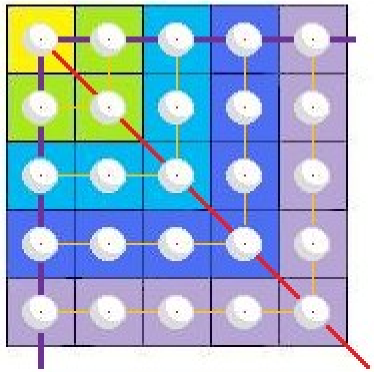
9=4+5

16=9+7

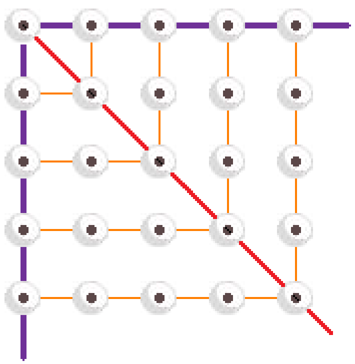
25=16+9



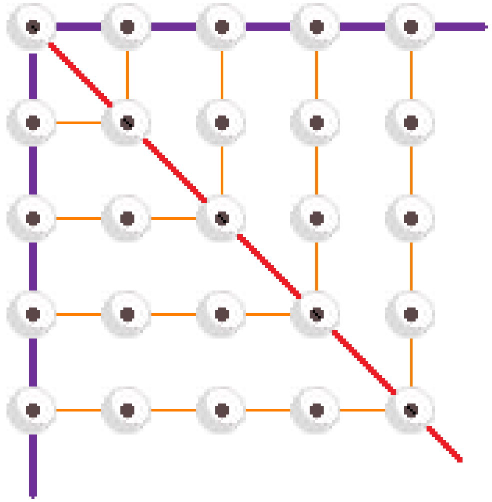
In ciascun quadrato mettiamo una perlina …



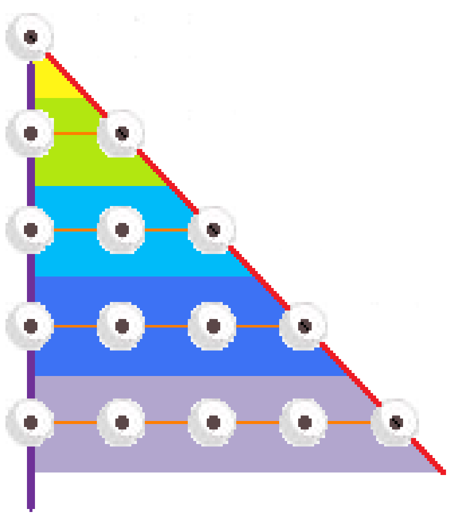
… poi leghiamole con dei fili.



Leviamo i quadrati e teniamo le “collane”.

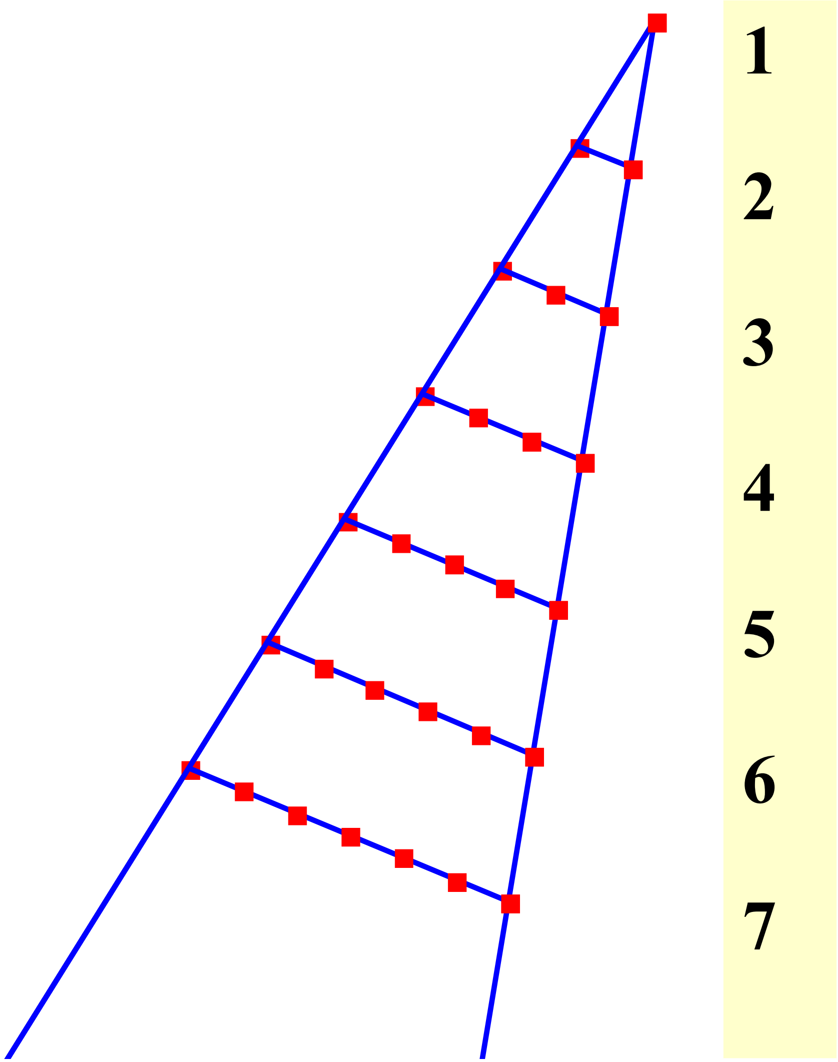


La somma di ***n*** numeri dispari consecutivi (a partire da 1) è un numero quadrato.

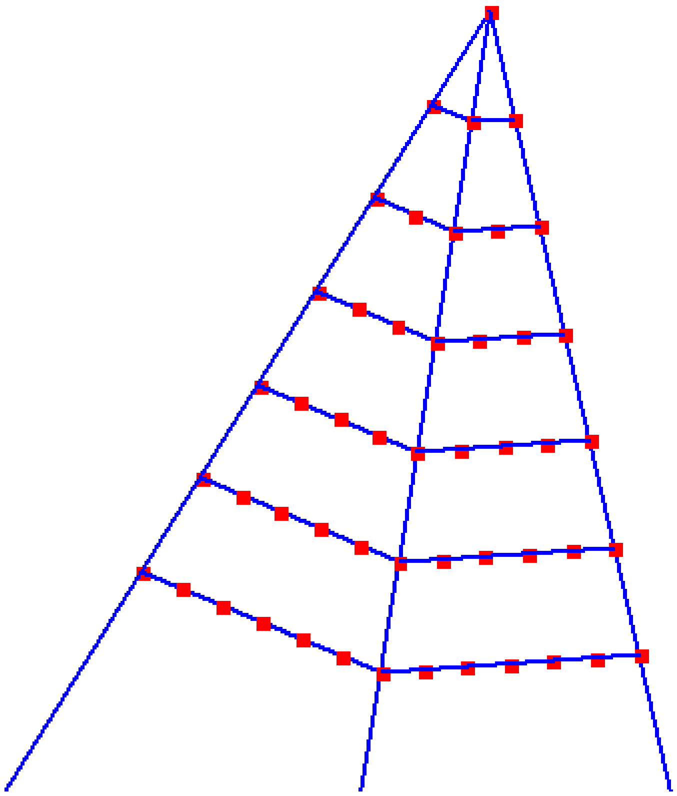


La somma di ***n*** numeri consecutivi (a partire da 1) è un numero triangolare.

Prendiamo una configurazione triangolare...



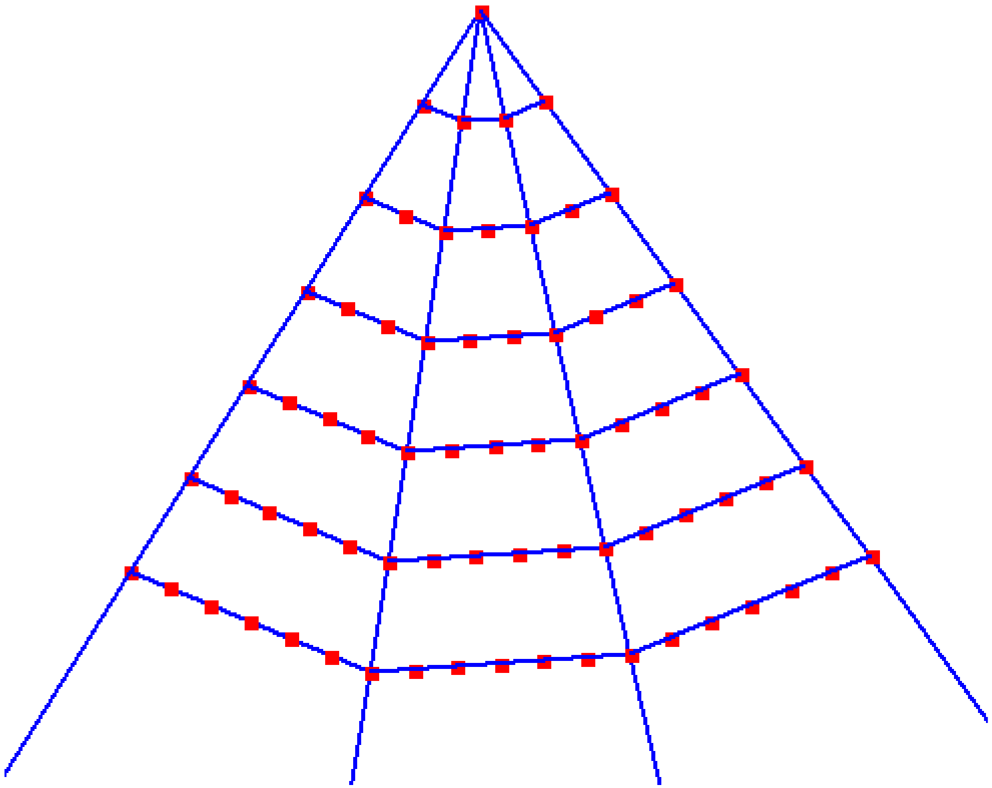
… gliene accostiamo un'altra
sopprimendo le perle “doppie”



1
3
5
7
9
11
13

MarinaRocco

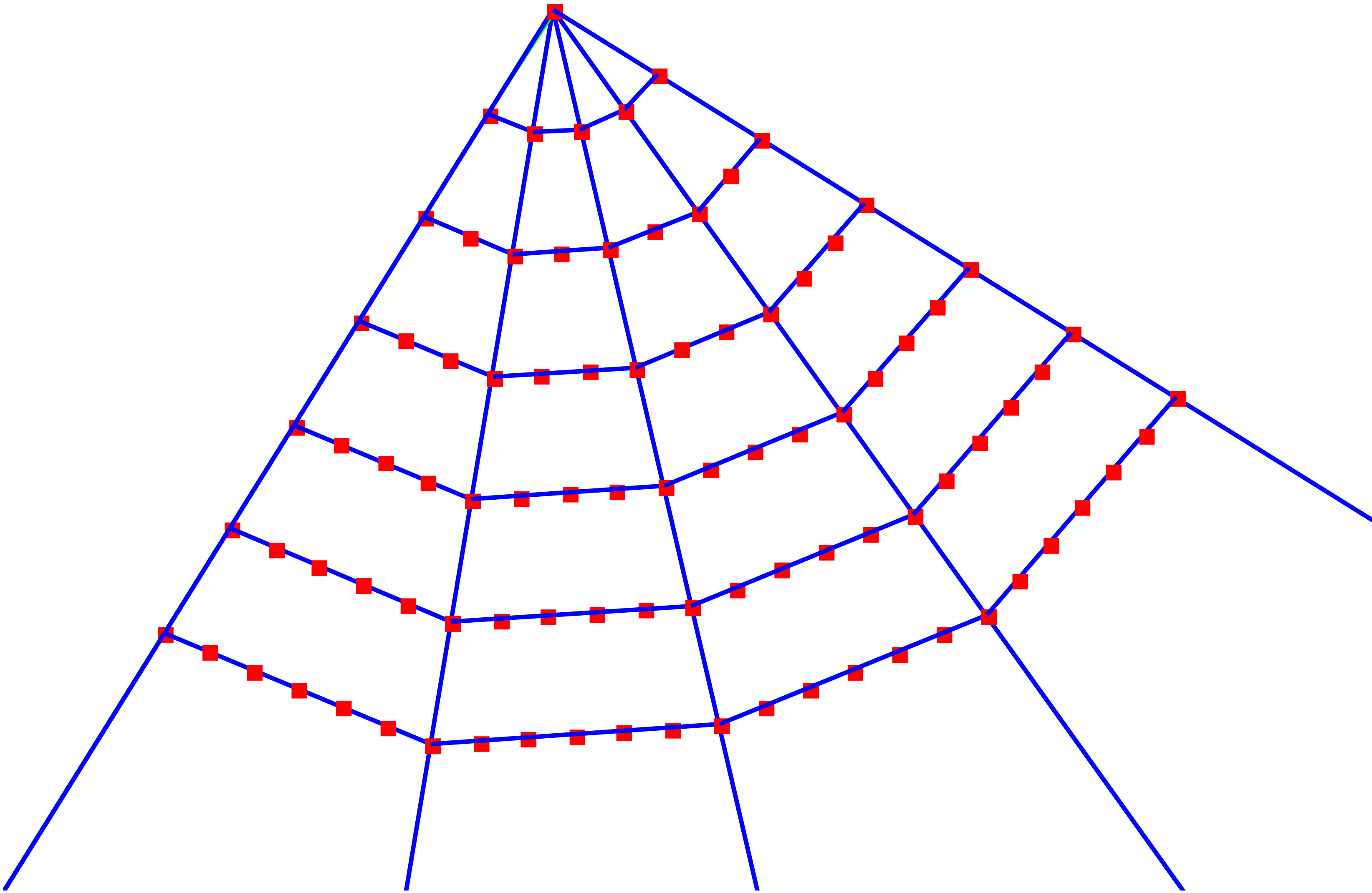
… poi un'altra ancora
sempre sopprimendo le perle “doppie”



Adesso le perle, livello per livello, sono:
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

Sommando via via:
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, …
che sono numeri pentagonali

E così via!



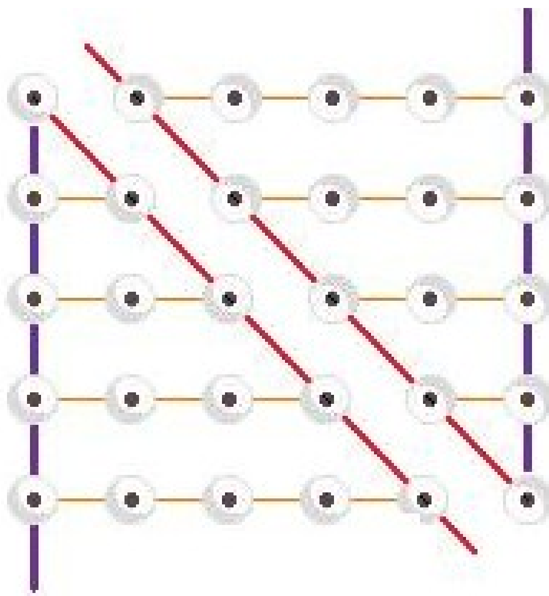
MarinaRocco

Che numeri sommare per ottenere

Num. triangolari	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...
Num. quadrilateri	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...
Num. pentagonali	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...
Num. esagonali	1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

E se volessi il 60-simo numero triangolare?

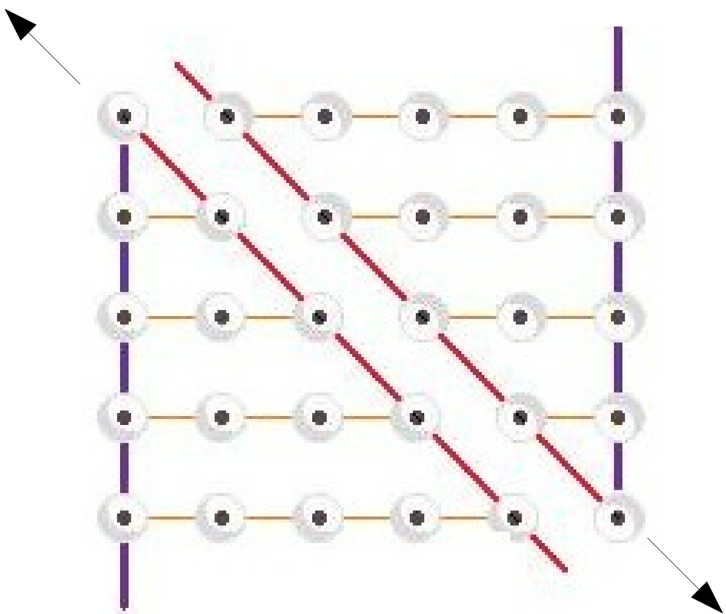
Se avvicino due configurazioni triangolari di "orientamento opposto" ...



… vedo che il quinto numero triangolare si ottiene sommando il primo e l'ultimo livello (1+5), poi moltiplico per i livelli (5) e divido per 2.

Risultato 15!

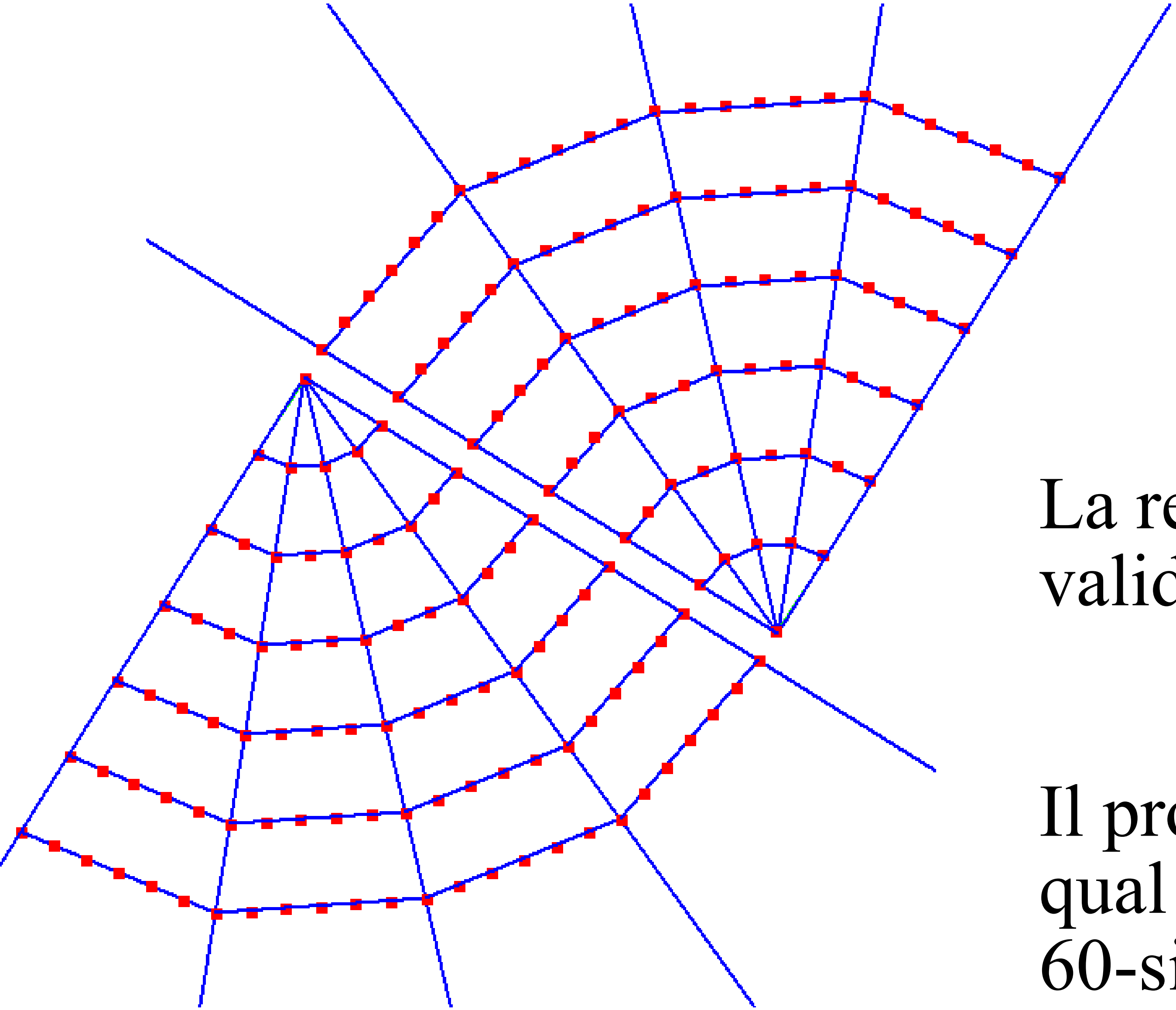
Se voglio il 60-simo numero triangolare...



… faccio scorrere le due configurazioni fino a che il primo livello di una corrisponde al 60-simo dell'altra.

La regola vale ancora!

E se volessi il 60-simo numero esagonale?



La regola è sempre valida!

Il problema è sapere qual è il numero del 60-simo livello.

MarinaRocco

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

Questi sono i numeri di perle, livello per livello, in una configurazione esagonale.

Essi costituiscono una ***successione numerica***.

Siccome ogni numero si ottiene dal precedente aggiungendo 4, si dice che è una ***progressione aritmetica di ragione 4***.

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

Togliamo 1 da ciascun termine della successione:

0, 4, 8, 12, 16, 20, ...

Ho ottenuto la successione dei multipli di 4.
Mettiamo in corrispondenza con i numeri naturali:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...		***n***
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	...		**?**

Il termine generico della successione dei multipli di 4 è

$$4(\boldsymbol{n}-1)$$

dove ***n*** indica il posto del termine che ci interessa.

Quindi nella successione dei numeri da sommare per avere un numero esagonale, il termine generico è

$$4(\boldsymbol{n}-1) + 1$$

Volevamo il 60-simo numero esagonale...

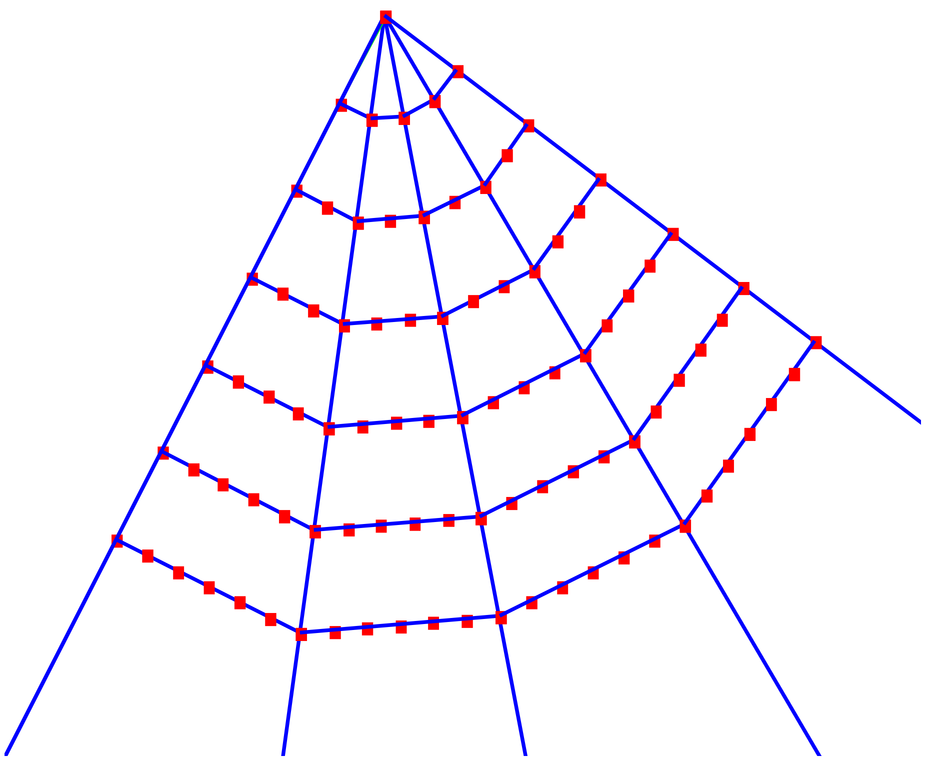
Il 60-simo numero nella configurazione è:

$$4x(60-1) + 1 = 236 + 1 = 237$$

Applico la regola per la somma dei primi 60 numeri della successione:

$$(237+1)x60 : 2 = 14280 : 2 = 7140$$

Oppure:



I numeri esagonali si ottengono accostando 4 configurazioni triangolari.
Il 60-simo numero triangolare è:
(60+1)x60 : 2 = 1830
che va moltiplicato per il numero di configurazioni ma poi bisogna togliere le “perle doppie”:
1830x4 - 3x60

Un po' di calcolo letterale dimostra l'equivalenza delle due formule

$$\sqrt{729}$$

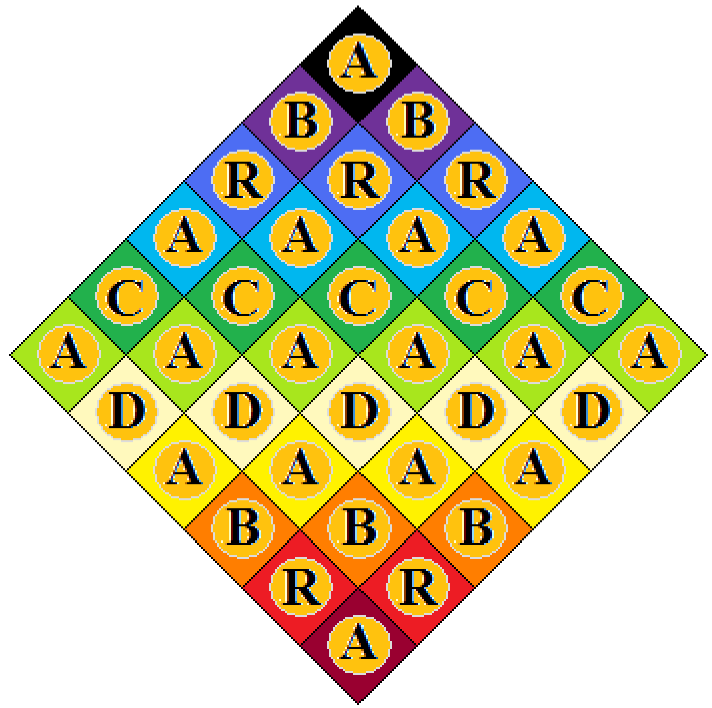
Il fatto che i numeri quadrati si possano considerare come somma di un segmento iniziale della successione dei dispari, consente di estrarre radici quadrate per sottrazioni successive:

729-1=728 728-3=725 725-5=720 720-7=713
713-9=704 704-11=693 …
153-49=104 104-51=53 53-53=0

$\sqrt{729}$ è il numero di addendi usati, cioè ...

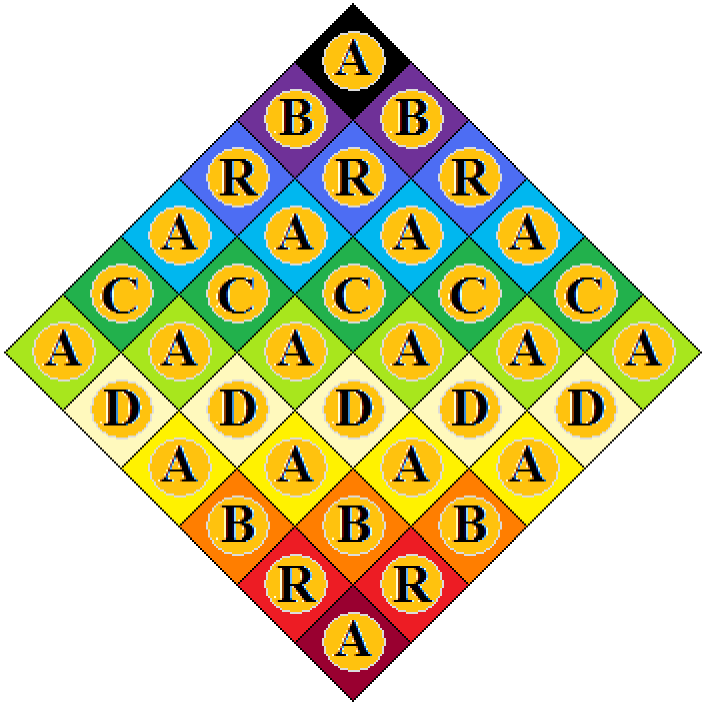
MarinaRocco

MAGIE!!!



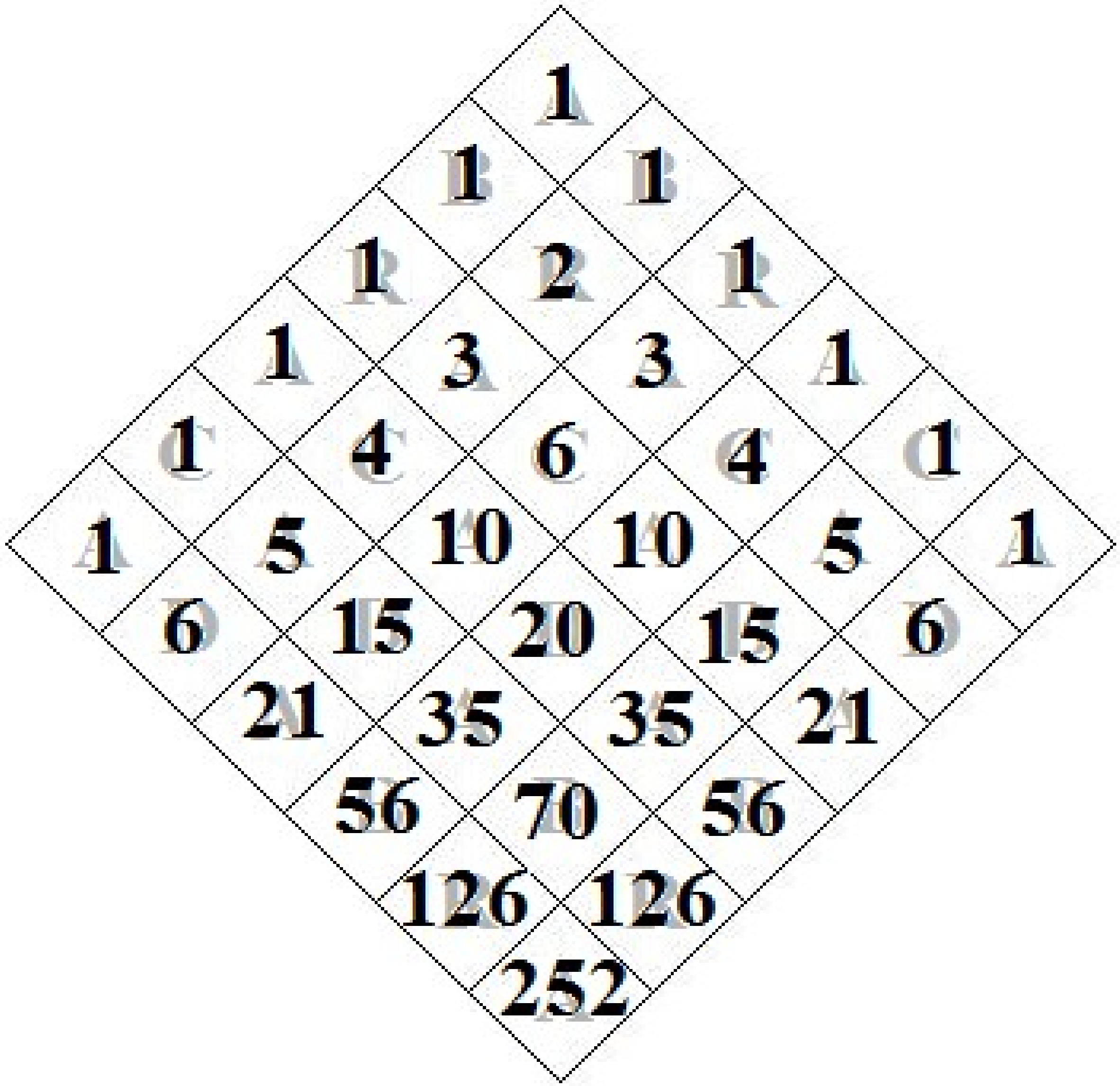
In quanti modi posso leggere ABRACADABRA?

MarinaRocco



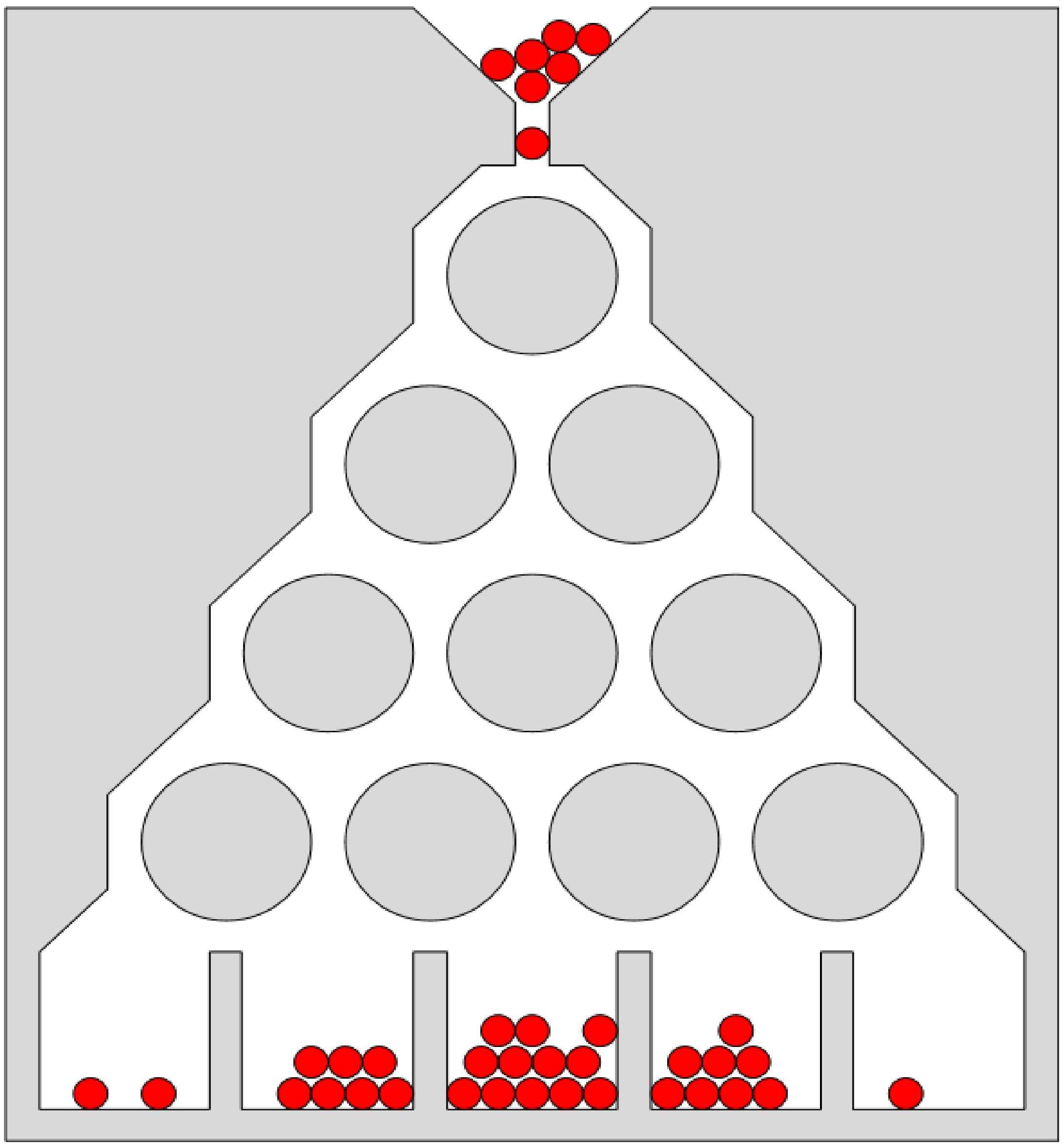
Una B viola si raggiunge in 2 modi e da qui ci sono 2 strade per una R blu; da ciascuna di esse, 2 strade per una A azzurra; ...

MarinaRocco



MarinaRocco

PROBLEMI ASSOCIATI



MarinaRocco

ANCORA SULLE SUCCESSIONI

Le successioni seguenti continuano ciascuna con la regola che si ricava osservando come iniziano; aggiungi in ognuna ancora 3 termini:

3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
1, 8, 15, 22, 29, 36, ...
1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...
n+2, n+4, n+6, n+8, ...
7+a, 7+2a, 7+3a, ...
b+1, 2b+2, 3b+3, ...

Compito in classe in I media

MarinaRocco

Considera le seguenti successioni:

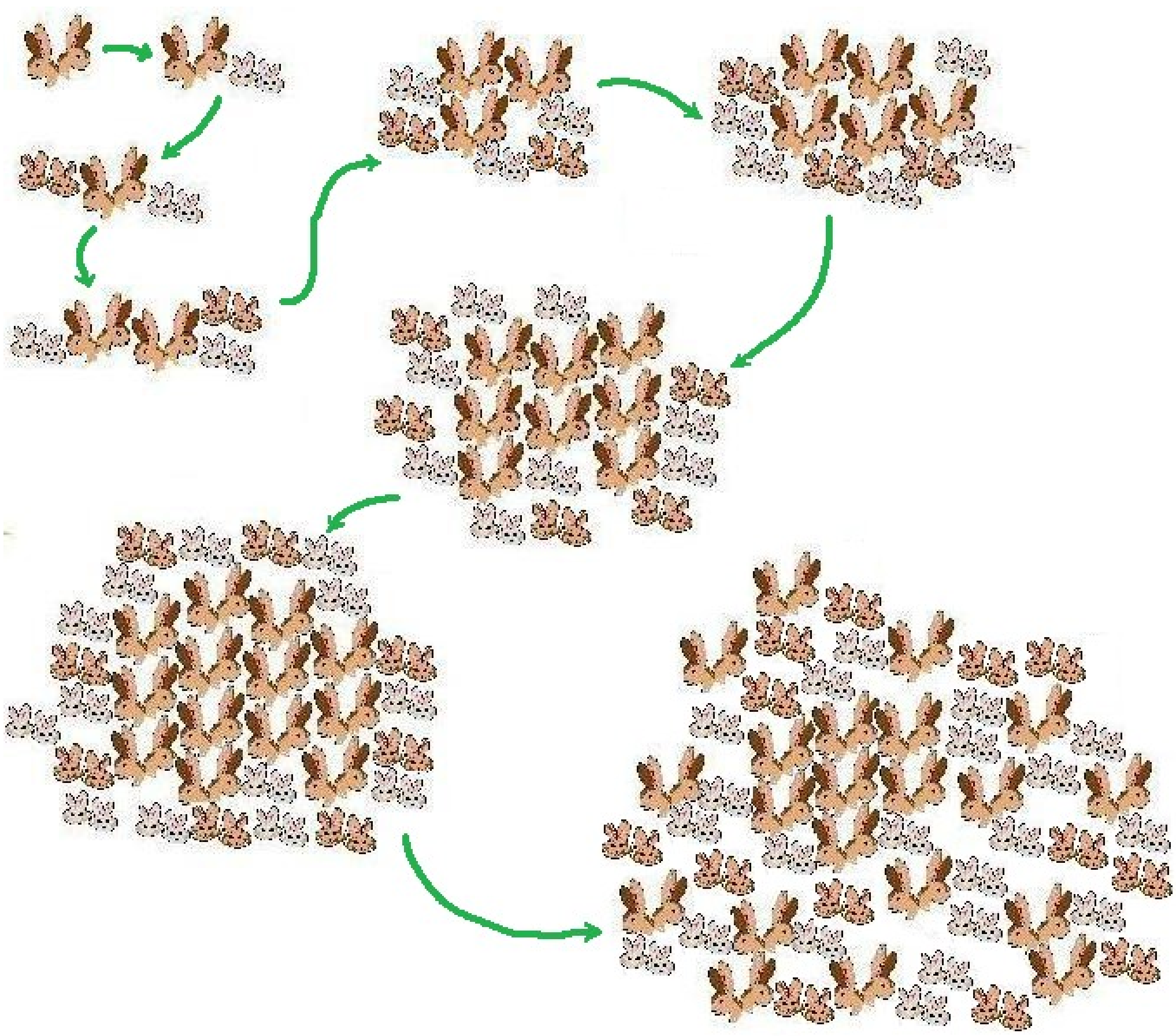
2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, …
2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, …
2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, …
2, 2, 4, 12, 48, 240, 1440, …

Riconosci tra esse una progressione aritmetica? E una progressione geometrica?
Aggiungi ad ognuna delle successioni date altri due termini. Esprimi a parole e con formule il modo per ricavare altri termini in ciascuna successione.

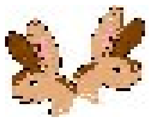
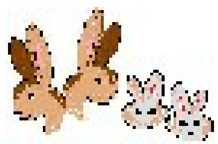
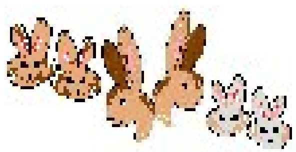
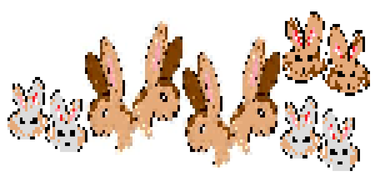
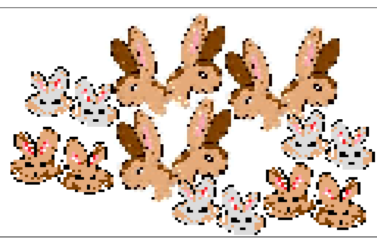
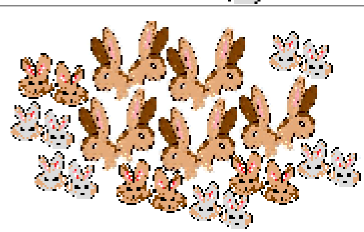
Un antico problema

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia genera una nuova coppia che diventa produttiva il mese successivo?

Leonardo Pisano

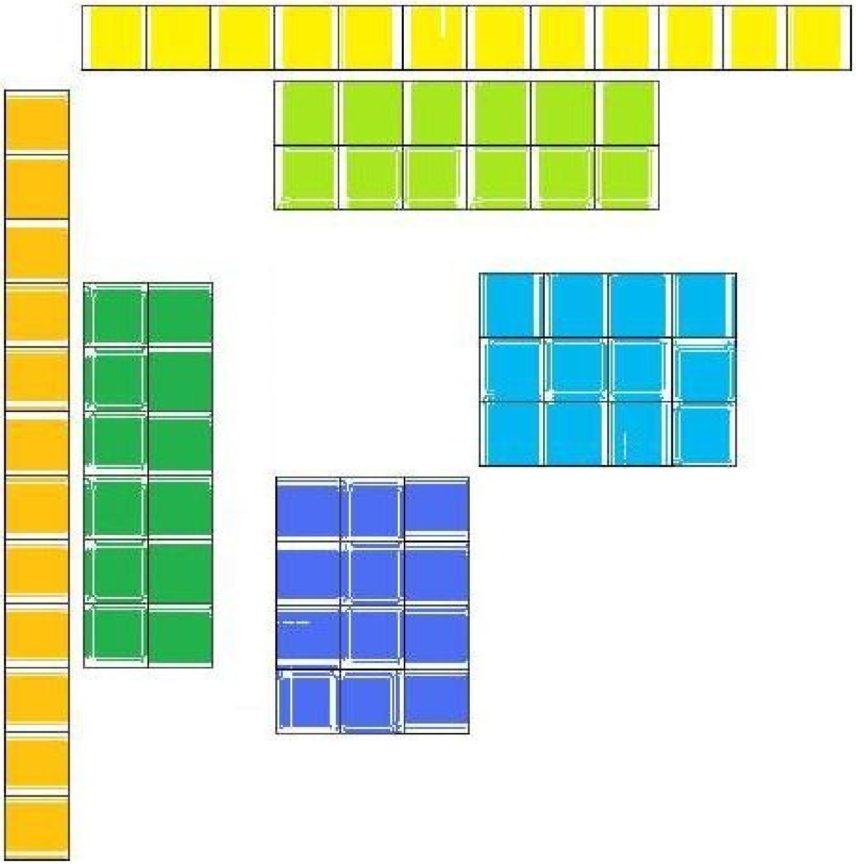


MarinaRocco

	tempo	fertili	giovani	neonati	totale
	0	1	0	0	1
	1	1	0	1	2
	2	1	1	1	3
	3	2	1	2	5
	4	3	2	3	8
	5	5	3	5	13

MarinaRocco

TORNIAMO INDIETRO...



Quante configurazioni rettangolari con ...?

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	6	2	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8	2

Stiamo costruendo la successione di Eulero

36 ha 9 coppie moltiplicative

MarinaRocco

1986

Piano pluriennale di aggiornamento sui Programmi didattici per la Scuola Elementare

anno di "formazione dei formatori"

Carl B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori, 1980