MATEMATICA

Piano pluriennale di aggiornamento
sui programmi didattici per la scuola elementare

IRRSAE
FRIULI-VENEZIA GIULIA

3

ISTITUTO REGIONALE DI RICERCA, SPERIMENTAZIONE
E AGGIORNAMENTO EDUCATIVI

34127 TRIESTE - Via Cantù, 10 - Tel. (040) 571054
SPEDIZIONE IN ABB. POSTALE - GR. IV/70 SEMESTRALE N. 28
Supplemento al Bollettino 1/89

STORIE DI NUMERI: APPUNTI E PROPOSTE DIDATTICHE

MARINA ROCCO

1. Algoritmi di calcolo

La moltiplicazione. Il sistema usato per scrivere i numeri influisce sugli algoritmi di calcolo. Così un sistema additivo porta a ricorrere ad addizioni anche per eseguire moltiplicazioni, come è stato per gli Egizi (papiro di Rhind o di Ahmes, circa 1650 a.C.).

Si può eseguire una moltiplicazione per raddoppi successivi di uno dei fattori, dimezzando contemporaneamente l'altro fattore. Ad esempio, calcoliamo $27 \cdot 16$:

raddoppi successivi del fattore 27		*dimezzamenti del fattore 16*
il doppio	54	8
il quadruplo (doppio del doppio)	108	4
8 volte (doppio del...)	216	2
16 volte (doppio del...)	432	1

Naturalmente può essere che nessuno dei due fattori sia una potenza di 2. Allora si può procedere come indicato negli esempi seguenti.

Calcoliamo $27 \cdot 24$

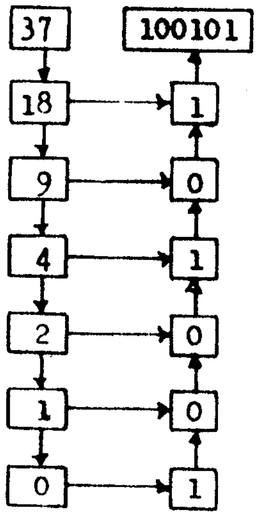
il doppio	54	
il quadruplo	108	
8 volte	216	24 volte $= (8+16)$ volte
16 volte	432	$27 \cdot 24 = 216+432=648$

Calcoliamo $27 \cdot 37$

il doppio	54	
il quadruplo	108	
8 volte	216	37 volte $= (32+4+1)$ volte
16 volte	432	$27 \cdot 37 = 864+108+27=999$
32 volte	864	

Il metodo diventa di più facile applicazione se uno dei due fattori viene trascritto in base 2. Ad esempio, in $27 \cdot 37$ scriviamo 37 in base 2.

il numero in base 10



il numero in base 2

i successivi quozienti nella divisione per 2

i successivi resti

La posizione delle cifre 1 indica quali "raddoppi" si devono sommare:

$37_{(10)} = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_{(2)}$

una volta

quadruplo

32 volte

Un altro modo per eseguire una moltiplicazione attraverso raddoppi viene descritto dalle seguenti consegne:

(a) decidi quale numero è il I° e quale il II° fattore
(b) se il II° fattore è dispari: togli 1 dal II° fattore, scrivi a parte il valore del I° fattore
(c) se il II° fattore è pari: raddoppia il I° fattore, dimezza il II°
(d) se il valore del II° fattore è maggiore di 0: torna in (b)
(e) se il valore del II° fattore è 0: somma i numeri trascritti a parte e trovi il risultato

Esempio: $27 \cdot 37$

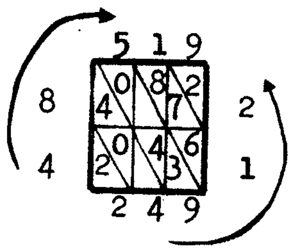
valori del I° fattore	valori del II° fattore	numeri da sommare
27	37 (dispari)	
	36	27
54	18	
108	9 (dispari)	
	8	108
216	4	
432	2	
864	1 (dispari)	
	0	864
		999 (risultato)

Osserviamo che $27_{(10)} = 11011_{(2)}$ e $37_{(10)} = 100101_{(2)}$, sicché eseguendo la moltiplicazione con l'algoritmo ordinario ma in base 2 e completando con gli zeri dovuti al valore posizionale delle cifre, possiamo scrivere:

$11011 \cdot 100101$	trascrizione riga per riga in base 10	$27 \cdot 37$
11011		27
1101100		108
1101100000		864
1111100111		999

Utilizzando questi esempi si ha l'occasione per qualche applicazione di calcoli in base 2 e per avviare, attraverso la descrizione e l'esecuzione di algoritmi, la "mentalità informatica".

L'invenzione della scrittura posizionale conduce all'algoritmo attuale attraverso il metodo indiano, in uso almeno dal XII secolo. Si osservi l'esempio: $519 \cdot 48$



$519 \cdot 48 = 24912$

Nel reticolo sono presenti tante righe di quadretti quante le cifre del primo fattore e tante colonne di quadretti quante le cifre del secondo fattore. Ogni quadretto conterrà il prodotto della cifra della sua riga per la cifra della sua colonna e tale prodotto deve sempre esser scritto in modo che la cifra delle decine stia nel triangolo in basso e quella delle unità nel triangolo in alto. Per ottenere il risultato si sommano le cifre contenute nei triangoli appartenenti alla stessa "fascia diagonale", facendo attenzione ai riporti.

Val la pena di confrontare questo algoritmo con quello attuale, che comunque andrebbe acquisito non solo in modo mnemonico ma anche analizzato sottolineando le proprietà utilizzate nell'eseguirlo.

Calcoliamo: $519 \cdot 48$ (i)

- scrivo il secondo fattore evidenziando il valore posizionale delle cifre: $48 = 40 + 8$
- sostituisco in (i) ottenendo: $519 \cdot (40+8)$ (ii)
- applico la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione ottenendo $519 \cdot 40 + 519 \cdot 8$ (iii)
- scrivo il primo fattore evidenziando il valore posizionale delle cifre: $519 = 50+10+9$
- sostituisco nella (iii): $(500+10+9) \cdot 40 + (500+10+9) \cdot 8$
- applico la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $500 \cdot 40 + 10 \cdot 40 + 9 \cdot 40 + 500 \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 9 \cdot 8$
- applico la proprietà associativa della moltiplicazione $(5 \cdot 4) \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + (9 \cdot 4) \cdot 10 + (5 \cdot 8) \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 8$
  rispettando le priorità delle operazioni calcolo:
  $20000 + 400 + 360 + 4000 + 80 + 72$ (iv)

- metto in colonna per ricavare la somma:

$$\left.\begin{array}{r} \boxed{2\;0}\,0\;0\;0 \\ \boxed{4}\,0\;0 \\ \boxed{3\;6}\,0 \end{array}\right\} \text{ confronta con la II riga del metodo indiano}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boxed{4\;0}\,0\;0 \\ \boxed{8}\,0 \\ \boxed{7\;2} \end{array}\right\} \text{ confronta con la I riga del metodo indiano}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2\;4\;9\;1\;2 \end{array}$$

Oppure, nella (iv) applico la proprietà associativa dell'addizione:
20760+4152
- metto in colonna per ricavare la somma e confronto con l'algoritmo ordinario;

$$\begin{array}{r} 20760 \\ 4152 \\ \hline 24912 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 519\cdot 48 \\ \hline 2076 \\ 4152 \\ \hline 24912 \end{array}$$

La divisione. Anche per eseguire una divisione si può ricorrere a raddoppi successivi: si può lavorare sul divisore finché il risultato si mantiene inferiore al dividendo per ripetere il procedimento sul "resto".
Ad esempio, calcoliamo 400:17
raddoppi successivi del divisore

17 (il divisore)
34 (il doppio)
68 (il quadruplo)
136 (8 volte)
272 (16 volte)

400=272+128 = 16 volte il divisore + 128
128= 68+ 60 = 4 volte il divisore + 60
60= 34+ 26 = 2 volte il divisore + 26
26= 17+ 9 = 1 volta il divisore + 9

400:17 = 23 con resto 9

L'ordinario algoritmo manuale che consente di ricavare quoziente e resto in una divisione fra numeri naturali è basato su proprietà di "aritmetica modulare" che si possono riadattare per esempi più semplici.

Indichiamo con $m \in N_0$ il dividendo, con $k \in N$ il divisore. Allora, se q è il quoziente ed r il resto, si ha per definizione $m=q\cdot k+r$, essendo q il massimo numero naturale che realizza l'uguaglianza ed essendo per conseguenza $0 \leq r < k$. Se infatti fosse $r \geq k$ si potrebbe scrivere $r=k+r_1$ con $0 \leq r_1 < r$ e quindi $m=q\cdot k+(k+r_1)=(q+1)\cdot \mathrm{k}+\mathrm{r}_1$ sicché q non sarebbe il massimo numero naturale che realizza l'uguaglianza. (Simbolismo a parte, questa dimostrazione è accessibile a bassi livelli di conoscenze e di abilità logiche. Ciò però comporta che mentre a livello adulto essa deve essere esplicitata, per contro - risultando evidente - è sconcertante per gli allievi).

Quanto ora detto corrisponde alla tecnica di calcolare quoziente e resto per sottrazioni successive, contando quante operazioni si riescono ad eseguire.

Consideriamo ora le divisioni di due diversi dividendi m_1 ed m_2 per uno stesso divisore k e ricaviamo quoziente e resto nella divisione di (m_1+m_2) per k. Osserviamo gli esempi:

a) $m_1 = 11 \times \cdot m_2 = 16 \cdot k = 7$

$m_1 = q_1 \cdot k + r_1 \quad 11 = 1 \cdot 7 + 4 \quad m_2 = q_2 \cdot k + r_2 \quad 16 = 2 \cdot 7 + 2$

$m_1 + m_2 = 27 = 3 \cdot 7 + 6$ cioè $q = q_1 + q_2$ e $r = r_1 + r_2$

b) $m_1 = 19 \quad m_2 = 17 \quad k = 7$

$m_1 = q_1 \cdot k + r_1 \quad 19 = 2 \cdot 7 + 5 \quad m_2 = q_2 \cdot k + r_2 \quad 17 = 2 \cdot 7 + 3$

$m_1 + m_2 = 36 = 5 \cdot 7 + 1$ cioè $q = q_1 + q_2 + 1$ e $r = 1$

Per conciliare a) con b), si osservi che in b) $r_1 + r_2 = 8 > k$ e quindi si può porre $r_1 + r_2 = 8 = 7 + 1 = k + r$ da cui:

$m_1 + m_2 = q_1 \cdot k + r_1 + q_2 \cdot k + r_2 = (q_1 + q_2) \cdot k + (r_1 + r_2) = (q_1 + q_2) \cdot k + (k + r) =$
$(q_1 + q_2 + 1) \cdot$
$\cdot k + r$

Tuttavia, con opportuna interpretazione di $r_1 + r_2$, si può scrivere:

$m_1 = q_1 \cdot k + r \quad , \quad m_2 = q_2 \cdot k + r \quad \rightarrow \quad m_1 + m_2 = (q_1 + q_2) \cdot k + (r_1 + r_2) \qquad (x)$

Da ciò si ricava:

$n \cdot m = n \cdot q \cdot k + n \cdot r \quad (xx)$

con analoga interpretazione di $n \cdot r$.

Servendoci di un esempio, vediamo come la *(x)* e la *(xx)* vengono utilizzate nell'algoritmo manuale nel caso in cui il divisore sia un numero naturale minore di 10 e diverso da 0.

Si debba eseguire 863:6 ricavando quoziente e resto. Conviene scomporre 863 nella somma di due numeri in modo che per il primo di essi sia applicabile la *(xx)*:

$863 = 800 + 63 = 100 \cdot 8 + 63 = 100 \cdot (6 + 2) + 63 = 100 \cdot 6 + 200 + 63 = 100 \cdot 6 + 263$

Ripeto il procedimento per 263 ricavando:

$263 = 260 + 3 = 10 \cdot 26 + 3 = 10 \cdot (4 \cdot 6 + 2) + 3 = 40 \cdot 6 + 20 + 3 = 40 \cdot 6 + 23$

Poiché $23 = 3 \cdot 6 + 5$ si ha:

$863 = 100 \cdot 6 + 40 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 5 = 143 \cdot 6 + 5$

Confrontiamo quanto su scritto con il metodo ordinario, avendo però cura di completare lo schema con quanto di solito resta sottinteso:

863:6 =	100 +
263	40 +
23	3 =
5	143

Supponiamo ora che il divisore k sia un numero naturale maggiore di 9, ad esempio sia un numero di 2 cifre: allora posso scirvere $k = d + u$, dove u corrisponde alla cifra delle unità. Ne deriva, per semplici calcoli, che se $m = q \cdot k + r$ allora $m = q \cdot d + q \cdot u + r$. Ad esempio, se $m = 257$ e $k = 32$ ho $d = 30$, $u = 2$ e $257 = 8 \cdot 32 + 1 = 8 \cdot 30 + 8 \cdot 2 + 1$ con $q = 8$ ed $r = 1$.

Allora, tenendo presente che la *(xx)* può anche essere vista così

$n \cdot m = q \cdot (n \cdot k) + n \cdot r \quad (xx')$

per calcolare 257:32 procedo nel modo seguente:

- da $257=250+7$ e $32=30+2$ ricavo $257:32=(250+7):(30+2)$
- calcolo allora $250:30$ e poiché $25=8\cdot3+1$ dalla *(xx')* si ha $250=8\cdot30+10$ da cui, sostituendo $257=250+7=8\cdot30+10+7=8\cdot30+17$
- poiché $17=8\cdot2+1$, posso scrivere $257=8\cdot30+8\cdot2+1=8\cdot(30+2)+1$

Se cerco di percorrere la stessa via per la divisione $263:53=(260+3):(50+3)$ ricavo $260=5\cdot50+10$ e $263=5\cdot50+10+3=5\cdot50+13$. Ma $13=4\cdot3+1$ cioè non ho trovato uno stesso q per 50 e per 3: si è quindi costretti a scrivere $263=4\cdot50+50+4\cdot3+1=4\cdot50+4\cdot3+51$ da cui $263=4\cdot53+51$.

L'insistenza su questi esempi può sembrare superflua (ed anche anacronistica, vista la diffusione delle calcolatrici tascabili), ma è giustificata dalle seguenti motivazioni:
- tanto più gli algoritmi di calcolo sono acquisiti in modo meccanico, mnemonico e non ragionato, tanto più portano a ricerche per tentativi;
- una buona consapevolezza di come e perché funzionano tali algoritmi instaura le basi per una "mentalità informatica" che, magari ad altri livelli, consente di escogitare procedimenti risolutivi adatti a superare l'uso banale della calcolatrice (ad esempio, si ricavi il valore esatto di $573963521\cdot753454628$; si ricavino le 13 cifre del periodo del numero decimale dato da $263:53$).

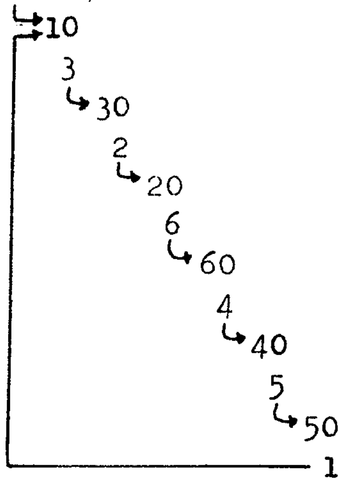
2. I calcoli dei babilonesi

Quale eredità del sistema di numerazione usato in Mesopotamia, conserviamo tuttora la misura degli angoli in gradi sessagesimali.

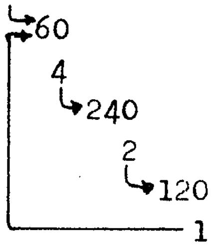
Tra i reperti archeologici vi sono numerose tavolette (II millennio a.C.) che possono paragonarsi alle odierne tavole numeriche, contenenti i valori già calcolati di n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $1/n$. Può incuriosire il fatto che nelle tavole dei reciproci mancano alcune righe, ad esempio quella corrispondente al reciproco di 7. Ciò potrebbe dipendere dal fatto che, come in base 10, da 1/7 si ricava un numero periodico anche in base 60:

in base 10:	in base 60:
1:7=0,142857...	1:7=0;0,34,17,.,.,...

1:7=0,142857...



1:7=0;0,34,17,.,.,...



il ; separa la parte intera da quella frazionaria
le , separano le "cifre" sessagesimali

Con i precedenti calcoli si giustifica il fatto che 1/7 è periodico sia in base 10 che in base 60, la qual cosa del resto è prevedibile prima di eseguire le divisioni. Si potrebbe credere che una "dimostrazione ostensiva" come questa sia assolutamente convincente (anche se, ovviamente non generalizzabile). Tuttavia ancora entro tutto il triennio di scuola media, se in classe qualcuno esegue la divisione con qualche errore, ciò induce la maggioranza degli allievi a ritenere che non sia certa la periodicità del numero decimale corrispondente ad 1/7; inoltre il ripetersi del resto 1 non è sempre garanzia sufficiente, dal punto di vista dei ragazzi, del ripetersi dell'intera sequenza e ciò soprattutto nelle classi iniziali. Anche quando una dimostrazione a priori risulti convincente, al momento dell'esecuzione dei calcoli essi ricadono nell'atteggiamento precedente.

La riga corrispondente ad 1/7 è la prima mancante: 1/3 e 1/6 sono periodici in base 10 ma non lo sono in base 60. Infatti né 10 né alcuna sua potenza è divisibile per 3 (o per 6) mentre lo è 60. Analogamente, mentre 3^n non è divisore di alcuna potenza di 10, lo è di 60^n: quali sono in generale i numeri che non hanno reciproci periodici in base 10 e quali in base 60? In base 60 vi sono 25 numeri minori della base i cui reciproci non sono rappresentati in forma periodica e di essi 12 non hanno reciproci periodici neppure in base 10.

I numeri che non hanno reciproci periodici in una data base costituiscono un'interessante successione, facilmente costruibile se il lavoro viene organizzato con ordine e se viene assegnata la regola generatrice.

Calcoliamo ora il risultato di 1:59 in base 60:

```
1 : 59 = 0; 1, ...
1
 60
 1
```

Questo risultato somiglia, formalmente, a quanto si ottiene calcolando 1:9 in base 10. Si può pensare a generalizzare per una base b qualunque:

```
1 : (b-1) = 0; 1,....
1
 b
 1
```

Come leggiamo la divisione se $b=2$? Esistono numeri periodici in base 2? I bambini tendono a generalizzazioni infondate e questa è una delle ragioni per cui non sentono necessità di dimostrazioni. In questo come in altri casi può esser utile l'uso di controesempi. Ripetiamo l'itinerario precedente eseguendo 1:61 in base 60 (si pensi di dividere un angolo di 1° in 61 parti uguali), confrontando il risultato con ciò che si ottiene da 1:11 in base 10, generalizzando poi con $1:(b+1)$ per una base b qualunque:

```
1 : (b+1) = 0; 0, (b-1),...
1
 ↳b
  b
  ↳ b² = (b²-1)+1 = (b+1)·(b-1)+1
                            1
```

Come si leggono quest'ultima divisione ed il suo risultato se $b=2$? Esistono numeri periodici in base 2?

3. Numeri irrazionali

La scoperta dei numeri irrazionali fu conseguenza del teorema di Pitagora attraverso problemi del tipo seguente: si può esprimere la misura della diagonale di un quadrato rispetto al suo lato mediante il rapporto fra due interi, ossia mediante un numero razionale? Poiché, se assumiamo il lato come unità di misura, dal teorema di Pitagora si ottiene che la misura della diagonale è $\sqrt{2}$, ciò equivale a chiedersi se $\sqrt{2}$ è razionale. Più in generale, si possono considerare le misure dei lati di un triangolo rettangolo qualunque rispetto ad uno dei suoi lati ed osservare che non sempre esse sono tutte esprimibili come rapporto fra due interi.

Se $\sqrt{2}$ fosse razionale, si potrebbe scrivere $\sqrt{2}=p/q$ con $p \in N_0$, $q \in N_0$ o p e q primi fra loro. Da ciò si ricaverebbe $2 \cdot q^2 = p^2$.

Ora, i due numeri naturali p e q possono essere:

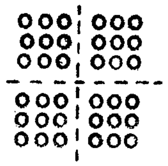
a) entrambi pari
b) entrambi dispari
c) p dispari e q pari
d) p pari e q dispari

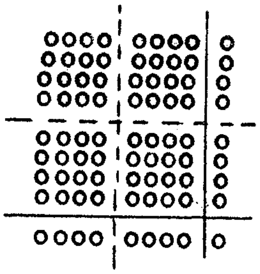
Il caso *a)* è escluso dalla condizione p e q primi fra loro: se fossero entrambi pari il loro MCD sarebbe almeno 2.

•	P	D
P	P	P
D	P	D

Discutiamo il caso *b*: se un numero è dispari lo è anche il suo quadrato e si avrebbe p^2 dispari mentre $2 \cdot q^2$ è pari (si confronti con la tabella di moltiplicazione nell'insieme {P,D}) il che rende assurda l'uguaglianza. Analogamente, utilizzando la stessa tabella, per il caso *c)* si ricava che p^2 (dispari per dispari) è dispari, mentre $2 \cdot q^2$ (pari per pari per pari) è pari. Invece (caso *d*) se p è pari lo è anche p^2 come è pari $2 \cdot q^2$ (pari per dispari per dispari). Benché ora l'uguaglianza sia compatibile con la tabella di moltiplicazione in {P,D} essa risulta ancora impossibile. Infatti, se rappresento un numero pari p con uno schieramento lineare, esso si può dividere in due schieramenti lineari uguali: ooo|ooo. Allora p^2 si può rappresentare con uno schieramento quadrato con p righe e

p colonne, ciascuna delle quali uguale allo schieramento lineare precedente. Dividendo ogni schieramento lineare in due schieramenti uguali, si ottiene la figura a lato che mostra come p^2 sia scomponibile in 4 schieramenti quadrati uguali, ossia p^2 è divisibile per 4. Consideriamo ora il numero dispari q: la sua rappresentazione mediante uno schieramento lineare si può ricavare aggiungendo un elemento allo schieramento che rappresenta un numero pari, sicché si può disegnare: ooo|ooo|o. Allora lo schieramento quadrato che rappresenta q^2 risulta scomponibile così: 4 schieramenti quadrati uguali, 2 schieramenti lineari uguali ciascuno di $q-1$ elementi, 1 elemento singolo.





Se rappresento $2 \cdot q^2$ mediante l'accostamento due schieramenti quadrati come quello a lato, lo schieramento rettangolare risultante si può scomporre in 8 schieramenti quadrati uguali, 4 schieramenti da $q-1$ elementi ed ancora 2 elementi, ossia $2 \cdot q^2$ non è divisibile per 4. Pertanto non può essere $2 \cdot q^2 = p^2$.

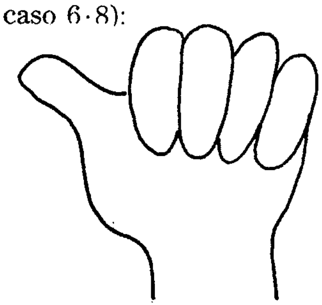
La dimostrazione qui esposta si può sintetizzare dicendo che $2 \cdot q^2$ e p^2 hanno necessariamente un diverso numero di fattori 2, da cui l'impossibilità dell'uguaglianza.

4. Giochi matematici

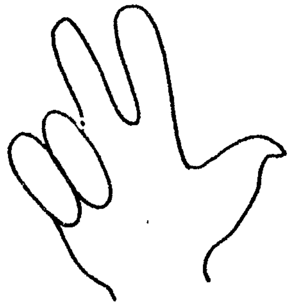
Questi esempi non hanno carattere di "indovinello", ma si prestano ad attività manipolative (di diverse difficoltà ed a più livelli) e sono orientati a suggerire possibilità di collegamenti fra varie parti del programma; inoltre cercano di dare un contributo a due punti specifici del programma di matematica:

- **"formazione di alcuni automatismi... per una più rapida ed essenziale organizzazione degli algoritmi di calcolo"**
- **"scrivere una successione di numeri naturali partendo da una regola data; viceversa, scoprire una regola che generi una data successione"**

Tabelline facili. Si può aiutare la memorizzazione dei prodotti di due numeri naturali e minori di 10 ricorrendo ad una regoletta utile nel caso in cui i due fattori siano entrambi maggiori di 5. Si devono seguire le consegne (illustrate per il caso $6 \cdot 8$):



- dalla mano sinistra chiusa a pugno, alza tante dita quanto il primo fattore diminuito di 5 (poiché $6-5=1$, alzo il pollice)

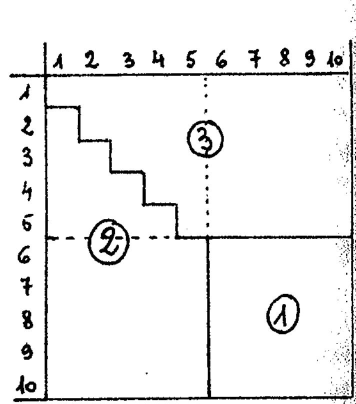


- dalla mano destra chiusa a pugno, alza tante dita quanto il secondo fattore diminuito di 5 (poiché $8-5=3$, alzo pollice, indice e medio);

- somma le dita alzate: il risultato dà la cifra delle decine ($1+3=4$: nel risultato 4 è la cifra delle decine)
- moltiplica le dita rimaste piegate: il risultato dà la cifra delle unità ($4 \cdot 2=8$: nel risultato 8 è la cifra delle unità)
- leggi il numero così composto (nel nostro caso 48)

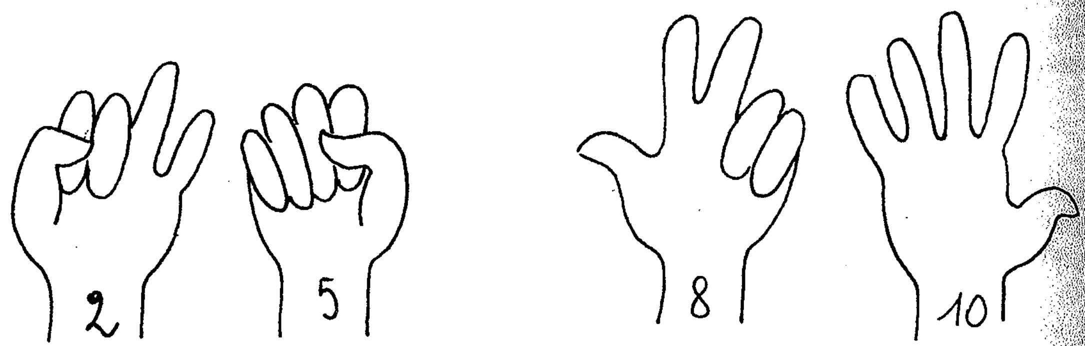
Ovviamente in certi casi le consegne vanno reinterpretate: vedi ad esempio $6 \cdot 6$.

La regola comunque richiede che si conoscano i risultati delle moltiplicazioni $n \cdot m$ con n ed m minori o uguali a 5, ma, momentaneamente, consente di "ignorare" un quarto della tavola pitagorica (ovvero viene in aiuto nella fase di memorizzazione della stessa).



Poiché è indifferente rappresentare un numero sulla mano destra o sulla sinistra, ci si può ricollegare alla proprietà commutativa della moltiplicazione, il che porta per ora ad essere costretti a memorizzare $n \cdot m$ con $n \leq 5$, cioè solo 40 risultati sui 100 iniziali. Riferendoci alla figura, le caselle della tavola pitagorica raggruppate in (1) sono riempibili con la "regoletta", quelle di (2) sfruttando la proprietà commutativa, mentre per quelle di (3) occorre studiare i risultati.

Per risparmiare ancora la nostra memoria occorre decidere come rappresentare su una mano coerentemente col resto del discorso i numeri minori di 5.



Le figure mostrano una soluzione: se alzo dita consecutive a partire dal mignolo rappresento numeri minori di 5, se alzo dita consecutive a partire dal pollice rappresento numeri maggiori di 5; se voglio rappresentare 5 tengo la mano con le dita chiuse, se voglio rappresentare 10 tengo la mano con le dita aperte.

Occorre ora completare la regola di calcolo:

1° caso: tutti e due i fattori sono maggiori di 5; rientra nella regola iniziale;

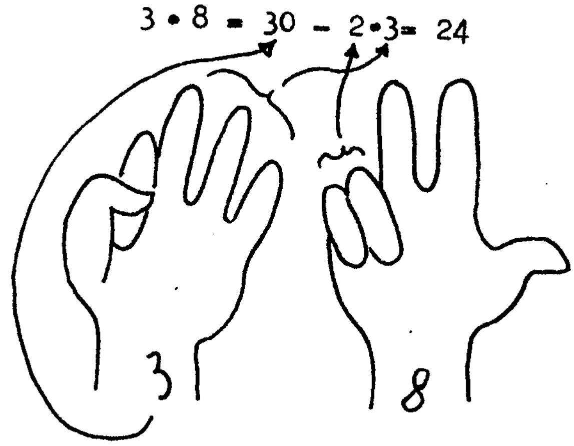
2° caso: tutti e due i fattori sono minori di 5; devono conoscere il risultato (anche perché mi serve nel 1° caso);

3° caso: uno dei fattori è minore o uguale a 5, l'altro è 5; conviene conoscere il risultato;

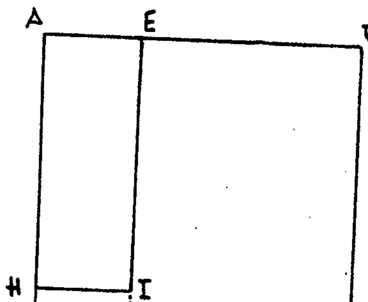
4° caso: uno dei fattori è maggiore di 5, l'altro è minore di 5; la regola va modificata in questo modo:

- si prendono tante decine quanto indicato dal minore dei due fattori
- si toglie il prodotto delle dita tenute come i mignoli

Ad esempio



Le regole che abbiamo visto hanno una giustificazione geometrica basata sull'equiestensione di aree. Infatti si consideri il quadrato ABCD di lato 10 unità e si voglia rappresentare, mediante l'area di un rettangolo in esso contenuto, il prodotto 3·8: il rettangolo in questione è AEIH che si può considerare ricavato da AEFD togliendo HIFD. Ma AEFD ha base di 3 unità ed altezza di 10, mostra cioè "tante decine quanto indicato dal minore dei due fattori", mentre HIFD ha base di 3 unità ed altezza di 2, cioè la sua area corrisponde al "prodotto delle dita tenute come i mignoli".



Per il prodotto 6·8 e la relativa regola, si consideri il quadrato ABCD di lato 10 unità e le parti in cui è diviso nella figura. Il rettangolo LEFM ha altezza di 10 unità e base di 1 unità (=6—5) mentre il rettagono ONGH ha base di 10 unità e altezza di 3 unità (=8—5). La somma delle loro aree corrisponde a "somma le dita alzate: il risultato dà la cifra delle decine". Invece

IGCF ha base di 4 unità e altezza di 2 unità, cioè la sua area corrisponde a "moltiplica le dita rimaste piegate: il risultato dà la cifra delle unità". In sostanza si deve provare la seguente uguaglianza fra aree:

AEIH = (LEFM + ONGH) + IGCF

Osserviamo che i quadrati ALPO e PNCM sono uguali e che:

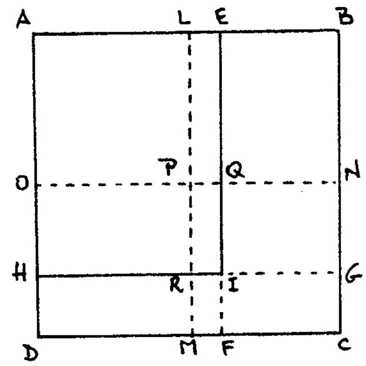
AEIH = ALPO + LEQP + PQIR + OPRH

LEFM = LEQP + PQIR + RIFM

ONGH = OPRH + PQIR + QNGI

PNCM = PQIR + QNGI + RIFM + IGCF

Queste uguaglianze giustificano, per sostituzione, quella da provare.



Numeri poligonali. Si assegnino le seguenti successioni:

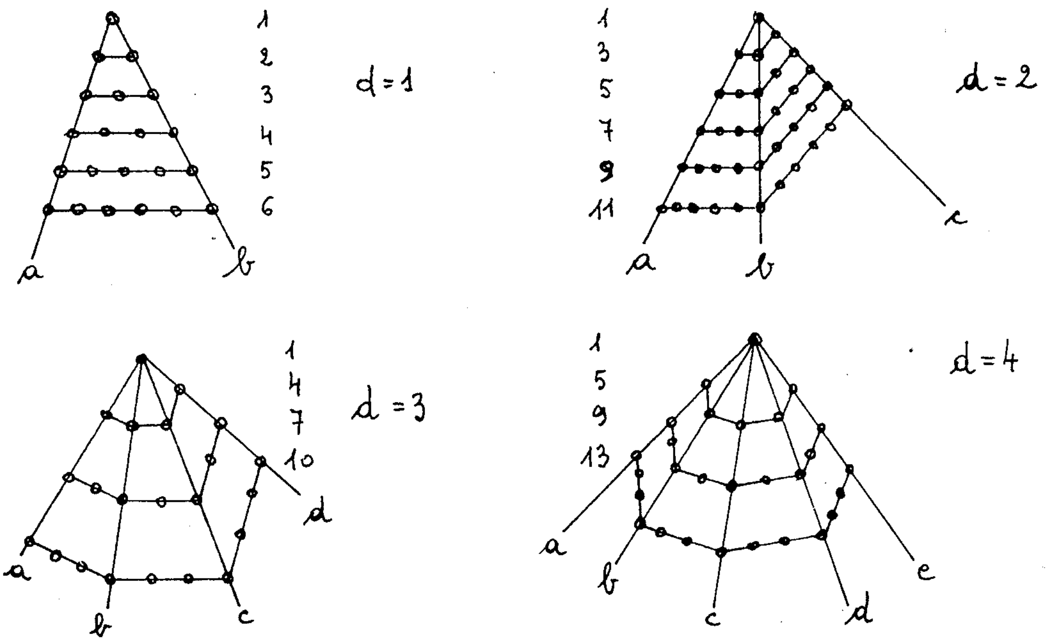
a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... $2 \cdot n+1$

c) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... $3 \cdot n+1$

d) 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... $4 \cdot n+1$

Cominciamo col ricavare la legge che genera ognuna delle successioni: in ogni caso si parte da 1 e si ottiene un termine dal precedente aggiungendo una quantità costante detta ragione; nel primo caso è $d=1$, nei successivi è rispettivamente $d=2$, $d=3$, $d=4$. I Pitagorici (circa 540 a.C.) rappresentavano queste successioni mediante "configurazioni poligonali" nel modo seguente:



Si osservi che la configurazione ricavata per $d=2$ si può ottenere accostandone due di quelle ottenute per $d=1$ ed analogamente se $d=k$ occorrono k configurazioni ciascuna ottenuta con $d=1$.

Supponiamo di conoscere $S_n^{(1)}$, somma dei primi n termini della successione che ha $d=1$, e si voglia calcolare $S_n^{(k)}$, somma dei primi n termini della successione che ha $d=k$. Immagino di generare la configurazione di ragione 2 con due configurazioni di ragione 1 che hanno in comune i "grani" lungo b, sicché $S_n^{(2)}=2\ S_n^{(1)}-n$ e generalizzando $S_n^{(k)}=k\cdot S_n^{(1)}-(k-1)\cdot n$.

Per ricavare $S_n^{(1)}$ si può ricorrere ad $S_n^{(2)}$: disponendo la corrispondente configurazione in modo che i "grani" siano situati in schieramenti quadrati, si vede che $S_n^{(2)}=n^2$ e poiché $S_n^{(2)}=2\cdot S_n^{(1)}-\ n$ si ha $S_n^{(1)}=\dfrac{n^2+n}{2}=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$.

I risultati si possono adattare per successioni che non iniziano da 1 e per valori qualunque di d.

Da una successione all'altra. Se i "grani" di una configurazione triangolare sono palle che si toccano, esse si dispongono a triangolo equilatero. Se su un lato del triangolo contro n palle, per tutto il triangolo sono state usate $S_n^{(1)}$ palle. Inoltre, costruendo con palle uguali i triangoli equilateri che hanno $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 palle su un lato, tali triangoli risultano sovrapponibili formando una configurazione a tetraedro regolare. Quante palle si usano in tutto se lungo lo spigolo del tetraedro contro n palle? Dal modo in cui è stata costruita la configurazione, si deve calcolare $T_n=S_1^{(1)}+S_2^{(2)}+S_3^{(1)}+\ldots+S_n^{(1)}$. Con considerazione nello spazio analoghe a quelle già fatte nel piano, si ricava che

$$T_n=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$$

Scriviamo su righe sovrapposte i primi valori di $S_n^{(1)}$ e di T_n

1 3 6 10 15 21 ... $S_n^{(1)}$

1 4 10 20 35 56 ... T_n

Osserviamo che, a partire da T_2, ogni valore di T_n si può ottenere sommando al numero che gli sta a sinistra il numero che gli sta sopra:

1 3 6 10 15 21 ... $S_n^{(1)}$

1 4 10 20 35 56 ... T_n

Sovrapponiamo altre due righe coerenti con quest'ultima osservazione:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...

I numeri della seconda riga possono rappresentare le palle usate nelle file successive di una configurazione triangolare, mentre i numeri della terza riga possono rappresentare le palle usate negli strati successivi all'interno di una configurazione tetraedrica. Nella prima e nelle righe successive a quelle già scritte si perde la possibilità di una interpretazione geometrica.

Le somme dei primi n termini in ogni riga si possono calcolare così:

1ª riga: n

2ª riga: $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

3ª riga: $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot 3}$

4ª riga: $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{2\cdot 3\cdot 4}$

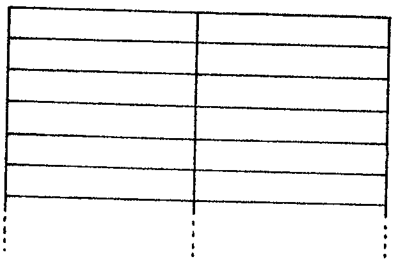
e così si potrebbe continuare per quante righe si vuole, ottenendo ogni volta il valore di posto n nella riga successiva a quella per la quale si è calcolata la somma. Ad esempio il 35 che si trova al 5° posto nella quarta riga, si può ottenere mediante la somma dei primi 5 termini della terza riga e cioè, usando la formula, $\dfrac{5\cdot(5+1)\cdot(5+2)}{2\cdot 3}$

Queste osservazioni dipendono da questioni di calcolo combinatorio, ma non è ora il caso di allargare il discorso in questa direzione. Riguardiamo invece la tabella, dopo l'aggiunta di qualche altra riga. Innanzi tutto nella figura si osserva che la tabella è simmetrica rispetto alla linea tratteggiata

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...

Sommiamo i numeri racchiusi in ognuno dei rettangoli perpendicolari alla linea che fa da asse di simmetria; si ottiene la successione:
1, 2, 4, 8, 16, 32, ... ossia la successione delle potenze di 2. Infatti la nostra tabella altro non è che il triangolo di Tartaglia disposto in modo insolito, cioè contiene i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ ed i risultati precedenti corrispondono alla scelta $a = b = 1$.

La successione di Fibonacci. Consideriamo le consegne:



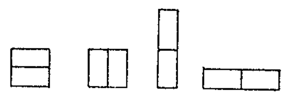
Riempi il cartellone:
- 1^a riga: metti a sinistra 1 gettone bianco
- altre righe: metti a destra tanti gettoni neri quanti i bianchi della riga precedente, metti a sinistra tanti gettoni bianchi quanti i gettoni (bianchi e neri) della riga precedente

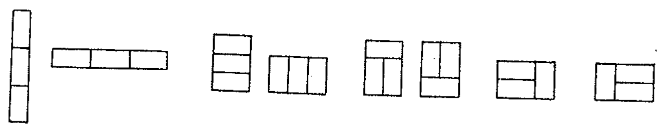
Tali consegne corrispondono al problema inserito da Leonardo Pisano detto Fibonacci nel suo Liber Abaci: "Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia genera una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?" In ogni riga del cartellone, i gettoni neri a sinistra rappresentano le coppie produttive, i gettoni bianchi a destra le coppie da esse generate. In ogni riga si contano gettoni neri secondo la successione seguente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... L'ultimo numero riportato risponde al problema e la successione si può sinteticamente assegnare così: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

La successione di Fibonacci è un esempio abbastanza semplice di successione dove la regola generatrice non è così evidente come nelle progressioni aritmetiche o geometriche e si può presentare agli allievi come successione della quale scoprire la legge.

Piastrelle. La capacità di riconoscere regolarità è decisiva nell'affrontare lo studio della matematica ed evidentemente per questa ragione i programmi suggeriscono di costruire successioni a partire da una legge o viceversa di determinare la legge generatrice di una successione data. Tuttavia i ragazzi tendono a generalizzazioni ingiustificate ed è quindi opportuno fornire esempi dove una certa legge è applicabile solo in apparenza per far poi vedere che essa non vale.

Si abbia a disposizione un adeguato numero di tessere rettangolari sovrapponibili e con base doppia dell'altezza e si chieda di accostarne 2, poi 3 e così via, in modo da ottenere ancora rettangoli. Ad esempio con due piastrelle si possono ricavare le configurazioni mostrate qui a lato, che però formano due coppie nelle quali gli elementi sono ricavabili uno dall'altro per rotazione di 90°. Con tre piastrelle invece le soluzioni sono:





Anche qui si può ridurre il numero di soluzioni per simmetria o per rotazione ed in pratica con due piastrelle si hanno due soluzioni (a meno di isometrie) e con tre piastrelle se ne hanno tre. Si procede cercando le soluzioni ricavabili accostando 4 oppure 5 piastrelle: si ricava la tabella seguente:

numero di piastrelle usate:		1	2	3	4	5
numero di soluzioni trovate:		1	2	3	5	6
numeri della successione di Fibonacci:	1	1	2	3	5	8

Fino ad accostare 4 piastrelle, il numero di soluzioni trovate ricalca la successione di Fibonacci, ma con 5 piastrelle vi è una discordanza: o Fibonacci non c'entra o non siamo stati capaci di trovare tutte le soluzioni. Il prossimo numero di Fibonacci è 13, mentre le soluzioni con 6 piastrelle sono 15, il che risolve la questione. Si noti che se avessimo trovato 13 o meno di 13 soluzioni con 6 piastrelle ci sarebbe rimasto il dubbio di non essere abbastanza abili da rintracciarle tutte.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI:

Carl B. Boyer: Storia della matematica, Mondadori
AA.VV.: Il materiale per l'insegnamento della matematica, La Nuova Italia.
I riferimenti storici sono tratti da Carl B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori.