

VALUE-AT-RISK E EXPECTED SHORTFALL

- ▷ La differenza tra distribuzione normale (coda leggera) e t di student (coda pesante) può essere apprezzata al modo seguente

- ▷ Se $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(L)}{\text{VaR}_\alpha(L)} = 1$$

↪ ES_α e VaR_α coincidono quando il livello di confidenza aumenta (usare de L'Hopital, $\phi'(z) = -z\phi(z)$)

- ▷ Se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, con $\nu > 1$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_\alpha(L)}{\text{VaR}_\alpha(L)} = \frac{\nu}{\nu - 1}$$

↪ la differenza tra ES_α e VaR_α riflette la pesantezza della coda

EXPECTED SHORTFALL

- ▷ Verificare che $\text{ES}_{95\%}(L_1 + L_2) < \text{ES}_{95\%}(L_1) + \text{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 293

- ▷ L'expected shortfall riflette l'intera coda della distribuzione

- ★ calcolare $\text{ES}_{95\%}(L_1)$ e $\text{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 294

- ★ calcolare $\text{ES}_{99\%}(L)$ e $\text{ES}_{99\%}(M)$ per l'esempio di p. 295

- ▷ problema dell'expected shortfall: a differenza del VaR, richiede più informazione sulla forma della coda ↪ difficile da ottenere
↪ maggiore rischio di modello

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

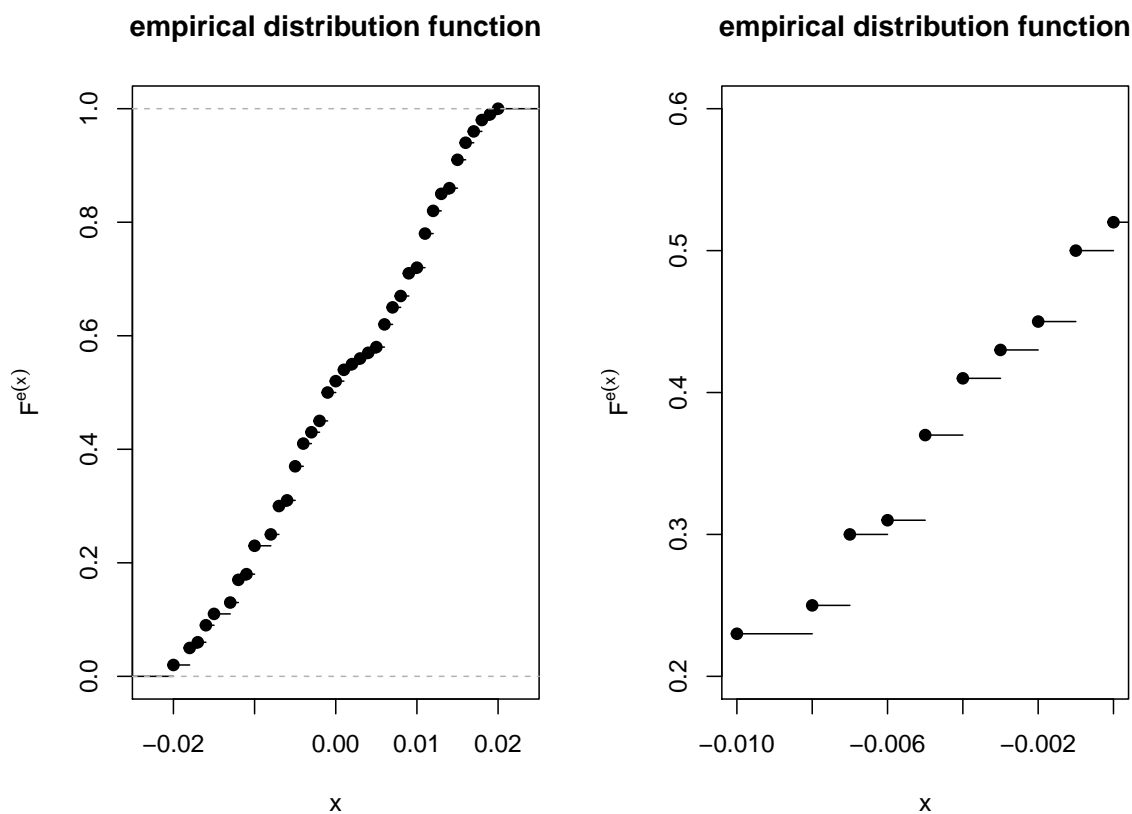
- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**
 - ★ si usa la **funzione di ripartizione empirica** costruita da un campione casuale l_1, \dots, l_m osservato da L

$$F_L^e(x) = \frac{\text{numero di } i : l_i \leq x}{m}$$

- ★ indicato con $l_{(1)} \leq l_{(2)} \leq \dots \leq l_{(m)}$ la **statistica d'ordine**, se gli l_i sono tutti distinti riesce $F_L^e(l_{(i)}) = \frac{i}{m}$: salti in corrispondenza agli $l_{(i)}$ pari a $1/m$, costante tra due $x_{(i)}$
- ★ se gli l_i non sono tutti distinti: se $l_{(i-1)} < l_{(i)} = l_{(i+1)} = \dots = l_{(i+k-1)} < l_{(i+k)}$ il salto in corrispondenza a $l_{(i)}$ è pari a k/m , per il resto costante a tratti

306

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION



307

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ Data una misura di rischio invariante per distribuzione $\rho(L) = \mathcal{F}(F_L)$, viene calcolata la sua versione empirica come

$$\rho^e(L) = \mathcal{F}(F_L^e)$$

- ▷ il Value-at-Risk è

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L^e(x) \geq \alpha\}$$

- ★ se αm è un intero, allora

$$\text{VaR}_\alpha(L) = l_{(\alpha m)}$$

- ★ se αm non è (necessariamente) un intero, allora

$$\text{VaR}_\alpha(L) = l_{(\lceil \alpha m \rceil)}$$

dove $\lceil x \rceil =$ minimo intero maggiore o uguale a x

308

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**

- ★ spesso si usa una variante che utilizza una media dei due valori $l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)}$, $l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$ (se diversi), dove $\lfloor x \rfloor =$ massimo intero minore o uguale a x

- ★ si pone

$$\text{VaR}_\alpha(L) = (1 - \gamma)l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)} + \gamma l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$$

dove $0 \leq \gamma \leq 1$ è un peso

- ★ classica scelta: $\gamma = \alpha m - \lfloor \alpha m \rfloor \rightsquigarrow$ quantile continuo in α
 ★ per $\gamma = 0$ se αm intero, $\gamma = 1$ se αm non intero, si ritorna alla definizione precedente

- ▷ Per l'expected shortfall,

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{m(1 - \alpha)} \left(\sum_{k=\lceil m\alpha \rceil}^m l_{(k)} + (\lceil m\alpha \rceil - m\alpha)l_{(\lceil m\alpha \rceil)} \right),$$

dove il secondo termine additivo dentro parentesi viene a volte trascurato

309

EXPECTED SHORTFALL: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$,
 $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$

★ statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%, l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%, l_{(4)} = 0\%, l_{(5)} = 0.5\%, \\ l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%, l_{(8)} = 2.5\%, l_{(9)} = 3\%, l_{(10)} = 4\%$$

si trova $\text{VaR}_{0.9}(L) = l_{(9)} = 3\%$

- ★ per $\beta > 0.9$, riesce $\text{VaR}_\beta = 4\%$
 ★ l'expected shortfall è

$$\text{ES}_{0.9}(L) = \frac{1}{0.1} \int_{0.9}^1 \text{VaR}_\beta(L) d\beta = 4\% = E[L|L > \text{VaR}_{0.9}]$$

- ★ si noti che $E[L|L \geq \text{VaR}_{0.9}] = 3.5\%$

310

MISURE DI RISCHIO

- ▷ approccio **assiomatico** alle misure di rischio: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ potrebbe soddisfare

★ **no rip-off**:

$\rho(L) \leq$ estremo superiore di $L = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) = 1\}$ per ogni $L \in \mathcal{L}$;

non si dovrebbe allocare più capitale della perdita massima

★ **invarianza rispetto alla distribuzione**: $\rho(L_1) = \rho(L_2)$ per ogni

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$;

richiesta naturale, dato che osservazioni di L permettono di ricostruire solo F_L

★ **monotonia**: $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che

$\text{Prob}(L_1 \leq L_2) = 1$;

la perdita L_2 non è mai inferiore a $L_1 \Rightarrow$ richiede almeno tanto capitale quanto L_2

311

MISURE DI RISCHIO

- ▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio potrebbe soddisfare
 - ★ **invarianza per traslazioni**: $\rho(L + c) = \rho(L) + c$ per ogni $L \in \mathcal{L}$, $c \in \mathbb{R}$;
aggiungendo una perdita certa c ad L , si deve aumentare il capitale dello stesso ammontare
 - ★ **sub-additività**: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$
beneficio della **diversificazione**; beneficio di una **fusione**; sistema di allocazione di capitale può essere **decentralizzato**
 - ★ **positiva omogeneità**: $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$ per ogni $\lambda \geq 0$, $L \in \mathcal{L}$;
non si penalizza per **rischio di concentrazione e liquidità**
 - ★ **convessità**: $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$ per ogni $0 < \lambda < 1$ e $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$;
diversificazione su composizioni di portafogli

312

MISURE DI RISCHIO

- ▷ una misura di rischio che soddisfa la **monotonia, invarianza per traslazioni, positiva omogeneità e sub-additività** si dice **coerente**
- ▷ una misura di rischio che soddisfa la **monotonia, invarianza per traslazioni e convessità** si dice **convessa**
- ▷ ogni misura di rischio positivamente omogenea è subadditiva se e solo se verifica la convessità \rightsquigarrow ogni misura di rischio coerente è convessa
- ▷ Il Value-at-Risk soddisfa tutte le proprietà (in particolare monotonia, invarianza per traslazioni e positiva omogeneità) eccetto la subadditività e quindi neanche la convessità \rightsquigarrow il Value-at-Risk non è coerente
 - ★ il Value-at-Risk diventa coerente se ci si restringe a certi insiemi di variabili aleatorie (normali o, più in generale, ellittiche)
- ▷ L'expected shortfall verifica tutte le proprietà viste prima
- ▷ le misure di rischio basate su scenari generalizzati (con pesi tutti unitari) sono coerenti

313

SUBADDITIVITÀ DELL'EXPECTED SHORTFALL

- ▷ Prova della subadditività nel caso in cui L_1, L_2 e $L = L_1 + L_2$ siano continue ($\text{ES}_\alpha(L_i) = \frac{E[L_i 1_{L \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)}]}{1-\alpha}$, $i = 1, 2$)

- ★ $I_i = 1_{\{L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)\}}$, $i = 1, 2$, $I_{12} = 1_{\{L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\}}$
- ★ si osservi che

$$(1-\alpha)[\text{ES}_\alpha(L_1) + \text{ES}_\alpha(L_2) - \text{ES}_\alpha(L)] = E[L_1(I_1 - I_{12})] + E[L_2(I_2 - I_{12})]$$

- ★ riesce

$$L_i(I_i - I_{12}) \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)(I_1 - I_{12}), \quad i = 1, 2,$$

(considerare separatamente i casi $L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)$ e $L_i < \text{VaR}_\alpha(L_i)$)

- ★ concludere che

$$\text{ES}_\alpha(L_1) + \text{ES}_\alpha(L_2) \leq \text{ES}_\alpha(L)$$

314

MISURE DI RISCHIO DISTORTE

- ▷ Il Value-at-Risk e l'expected shortfall possono essere generalizzati al modo seguente, introducendo le **misure di rischio distorte**: per una perdita L e data una funzione di ripartizione $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (Γ non decrescente, continua a dx, $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(1) = 1$), si pone

$$\rho_\Gamma(L) = \int_0^1 \text{VaR}_\beta(L) d\Gamma(\beta)$$

- ★ idea: pesare i capitali a ogni livello di confidenza con la misura Γ
- ★ VaR_α : Γ concentrata in α

- ▷ quando Γ è assolutamente continua con densità γ ,

$$\rho_\gamma(L) = \int_0^1 \text{VaR}_\beta(L) \gamma(\beta) d\beta$$

- ★ Expected shortfall a livello α : $\gamma(\beta) = \frac{1}{1-\alpha} 1_{[\alpha, 1]}(\beta)$
- ★ $\gamma(\beta) = \frac{\lambda \exp(\lambda\beta)}{\exp(\lambda)-1}$ per $\lambda > 0$
- ★ se γ è non decrescente (**misure di rischio spettrali**), si può provare che ρ_γ è coerente

315

MISURE DI RISCHIO BASATE SU PERDITE

- ▷ Una misura di rischio convessa non (positivamente omogenea) \rightsquigarrow non coerente
- ▷ $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente convessa (**funzione di perdita**) e $k \in \mathbb{R}$ una soglia di perdita; sia $E[|\ell(L)|] < +\infty$ per ogni $L \in \mathcal{L}$; definiamo

$$\rho(L) \equiv \rho_{\ell,k}(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid E[\ell(L-x)] \leq \ell(k)\}$$

- ▷ ρ è convessa ma non necessariamente coerente
 - ★ $\ell(z) = \exp(\lambda z)$, $\lambda > 0$
 - ★ $\rho(L) = \frac{1}{\lambda} \log E[\exp(\lambda L)] - k$
 - ★ per $k = 0$ e $\lambda > 1$ riesce $\rho(\lambda L) > \lambda \rho(L)$ (si usi la disuguaglianza di Jensen applicata a z^λ)

316

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ la proprietà di subadditività vale per il Value-at-Risk se (L_1, L_2) è **normale bivariata** e $\alpha > 50\%$
- ▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^\top$ ha **distribuzione normale multivariata** se

$$a_1 X_1 + \dots + a_d X_d \sim N(\mu, \sigma^2)$$

per qualche $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, per ogni $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (una costante ha distribuzione $N(\mu, 0)$)

- ▷ se la matrice di varianza-covarianza $\Sigma = E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^\top]$ è invertibile ($\mu = E(\mathbf{X})$), allora \mathbf{X} ha densità congiunta

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi|\Sigma|)^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

317

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ La subadditività del Value-at-Risk si estende ad altre famiglie di distribuzioni multivariate, in particolare alle **distribuzioni ellittiche** che hanno in comune diverse proprietà con la normale multivariata:
- ★ generalizzano al caso multivariato le proprietà di **simmetria** della normale
 - ★ distribuzioni **marginali** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ trasformazioni **affini** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ distribuzioni **condizionate** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche

318

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^\top$ ha **distribuzione sferica** se

$$UX \sim X$$

per ogni **matrice ortogonale** U (cioè tale che $UU^\top = U^\top U = I_d$)

- ★ se \mathbf{X} ha densità congiunta f , allora è sferica se e solo se

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(x_1^2 + \dots + x_d^2), \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

dove $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$, cioè la densità è costante sulle sfere.

- ★ t_ν multivariata, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \left(1 + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{\nu} \right)^{-(d+\nu)/2}$$

- ★ logistica multivariata, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \frac{\exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x})}{[1 + \exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x})]^2}$$

319