Value-at-Risk e subadditività

▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^\top$ ha distribuzione ellittica se

$$\mathbf{X} \sim \mu + AY$$

dove $\mu \in \mathbb{R}^d$ e A è una matrice $d \times d$

▷ se $L_1 = a^\top \mathbf{X}$, $L_2 = b^\top \mathbf{X}$ $(a, b, \in \mathbb{R}^d)$

- ⋆ subadditività del VaR : per $\alpha \geq 0.5$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

- ⋆ Value-at-Risk è consistente con la varianza

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) - E[L_1] \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2) - E[L_2] \Leftrightarrow var(L_1) \leq var(L_2)$$

$\rightsquigarrow$ ottimizzazione di portafoglio media-varianza o media-VaR coincidono

Profitto/perdita

▷ Sia $V(u)$ il valore/prezzo di un'attività al tempo u

- ⋆ stocks
- ⋆ bonds
- ⋆ commodities (merci)
- ⋆ derivati
- ⋆ ...
- ⋆ portafoglio di attività

▷ consideriamo il periodo $[t, T]$ (holding period) di lunghezza $T - t$:

- ⋆ ipotesi: l'attività viene posseduta sul periodo $[t, T]$
- ⋆ eventuali flussi generati dal possesso dell'attività sono reinvestiti/finanziati nell'attività stessa
- ⋆ $T - t = 1$: 1 anno
- ⋆ $T - t = 1/365$: 1 giorno
- ⋆ $T - t = 1/250$: 1 giorno (contando solo i giorni in cui i mercati sono aperti)

▷ ipotesi: $V(u) \geq 0$ per ogni $u > t$ (responsabilità limitata) e $V(t) > 0$ (valore corrente positivo)

Profitto/perdita

- il profitto/perdita sul periodo $[t, T]$ (holding period P&L) è dato da
$$\text{P\&L} \equiv \text{P\&L}_{t,T} = V(T) - V(t)$$
variazione di valore dell'attività
- $\text{P\&L}_{t,T}$ rappresenta il guadagno/perdita se si prende una posizione lunga (acquista) il sottostante in t e si liquida la posizione in T
- interpretazione
$$\text{P\&L} > 0 \Rightarrow \text{P\&L} = \text{guadagno}$$
$$\text{P\&L} < 0 \Rightarrow -\text{P\&L} = \text{perdita}$$
- La perdita sul periodo $[t, T]$ è semplicemente
$$L \equiv L_{t,T} = -\text{P\&L}_{t,T} = V(t) - V(T).$$

Profitto/perdita

- il rendimento viene usualmente misurato su base
  - semplice o composto
  - periodale o annuo
- Rendimento periodale semplice
$$I \equiv I_{t,T} = \frac{\text{P\&L}_{t,T}}{V(t)} = \frac{V(T)}{V(t)} - 1$$
cioè
$$V(T) = V(t)(1 + I_{t,T})$$
  - su base annua, il rendimento equivalente è
$$I'_{t,T} = \frac{I_{t,T}}{T-t} = \frac{1}{T-t}\left(\frac{V(T)}{V(t)} - 1\right)$$
  - riesce $-1 \leq I_{t,T} < +\infty$

Profitto/perdita

▷ Rendimento periodale composto

$$R \equiv R_{t,T} = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

cioè

$$V(T) = V(t)\mathrm{e}^{R_{t,T}}$$

⋆ su base annua, il rendimento equivalente è

$$R'_{t,T} = \frac{R_{t,T}}{T-t} = \frac{1}{T-t} \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

⋆ riesce $-\infty \leq R_{t,T} < +\infty$

Profitto/perdita

▷ Relazioni tra rendimenti semplici e composti

$$I = \mathrm{e}^{R} - 1$$

$$R = \log(1 + I)$$

▷ se $|R|$ è ‘piccolo’ (tipicamente quando $T - t$ è piccolo) allora

$$R \approx I$$

e viceversa (formula di Taylor)

▷ ESEMPIO: $R = 0.1\% \Rightarrow I = 0.09995\%$
$R = 1\% \Rightarrow I = 0.99503\%$
$R = 10\% \Rightarrow I = 9.53102\%$
(vedi confronto in slide 332)

VaR per perdite e per rendimenti

▷ relazione tra Value-at-Risk in termini monetari:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-\mathrm{P\&L} \le x] \ge \alpha\} = F^{-1}_{-\mathrm{P\&L}}(\alpha)$$

e Value-at-Risk in termini di rendimento (composto) $R_{t,T} \equiv R$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(-R) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-R \le x] \ge \alpha\} = F^{-1}_{-R}(\alpha)$$

dove $-R = -R_{t,T} = \log \frac{V(t)}{V(T)}$ è la perdita in termini composti

▷ P&L è una funzione crescente di R e viceversa; si trovano allora le relazioni

$$\mathrm{VaR}_\alpha(-R) = -\log\left(1 - \frac{\mathrm{VaR}_\alpha(-\mathrm{P\&L})}{V(t)}\right)$$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(-\mathrm{P\&L}) = V(t)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{VaR}_\alpha(-R)}\right)$$

▷ simili relazioni se si utilizzano i rendimenti semplici

Rendimenti composti: proprietà temporali

▷ "Time aggregation of compound returns": il rendimento periodale composto sul periodo (t, T) è la somma dei rendimenti periodali composti sui sotto-periodi $(t_0, t_1), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$, con $t_0 = t < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$

$$R_{t,T} = R_{t_0,t_1} + \ldots + R_{t_{n-1},t_n}$$

- ⋆ rendimento annuo è somma dei rendimenti giornalieri
- ⋆ nel caso di rendimenti semplici il risultato non è vero

$$1 + I_{t,T} = (1 + I_{t_0,t_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + I_{t_{n-1},t_n})$$

- ⋆ nel caso di rendimenti composti/annui?

Rendimenti semplici e composti

- Modellizzare rendimenti semplici o composti non è equivalente
- è tipico assumere che i rendimenti siano distribuiti normalmente
- visto il range di $R_{t,T}$ e $I_{t,T}$ questa ipotesi è più adatta ai rendimenti composti
- se $R_{t,T} \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $I_{t,T} = \mathrm{e}^{R_{t,T}} - 1$ si distribuisce come lognormale traslata
- la distribuzione sarà simile se $T - t$ è piccolo, mentre potrà essere molto diversa quando l'ampiezza dell'intervallo aumenta

Tassi di Cambio

- vantaggio dei rendimenti composti: sia $V(t)$ il tasso di cambio f/d (foreign/domestic)
- $V(t)$ = quantità di moneta domestica per acquistare 1 unità di valuta straniera al tempo $t \rightsquigarrow \frac{1}{V(t)}$ = quantità di moneta straniera per acquistare 1 unità di valuta domestica al tempo t
- rendimento composto per un investitore domestico:

$$R^d_{t,T} = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

- rendimento composto per un investitore straniero:

$$R^f_{t,T} = \log \frac{V(t)}{V(T)} = -R^d_{t,T}$$

Rendimenti composti: proprietà temporali

- conseguenze dell'additività temporale dei rendimenti composti
- normalità: se la distribuzione congiunta di $R_{t_0,t_1}, \ldots, R_{t_{n-1},t_n}$ è normale, allora $R_{t,T}$ è normale
- momenti, non correlazione seriale
  - ⋆ $E[R_{t_{i-1},t_i}] = \mu_i$, $\text{var}[R_{t_{i-1},t_i}] = \sigma_i^2$
  - ⋆ rendimenti su intervalli disgiunti, $R_{t_0,t_1}, \ldots, R_{t_{n-1},t_n}$, sono incorrelati ($\Rightarrow$ indipendenti)

$$\text{cov}[R_{t_{i-1},t_i}, R_{t_{j-1},t_j}] = 0 \qquad \text{per } i \neq j$$

- segue che

$$E[R_{t,T}] = \mu_1 + \ldots + \mu_n$$

$$\text{var}[R_{t,T}] = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

- Se i rendimenti sono correlati?

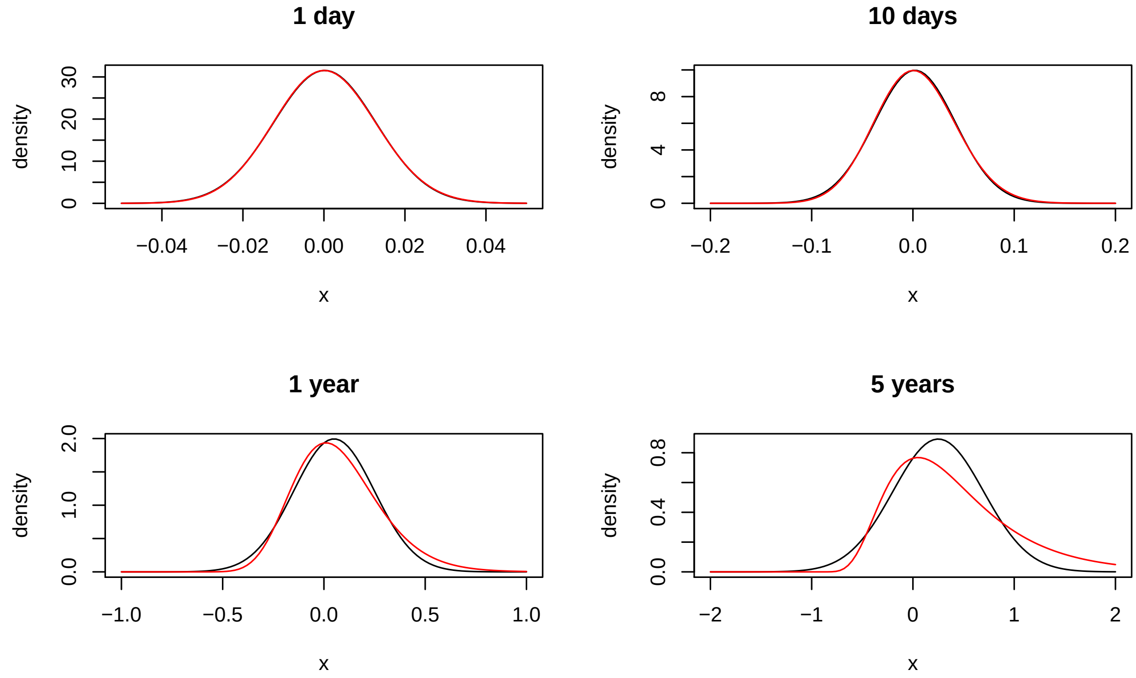
Rendimenti composti: proprietà temporali

- nel caso di intervalli di ugual ampiezza e distribuzioni stazionarie:
  - ⋆ $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè $t_i = t + i\Delta$
  - ⋆ $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$
- riesce allora: media e varianza dei rendimenti composti crescono linearmente col tempo
  - ⋆ $E[R_{t,t+n\Delta}] = n\mu$
  - ⋆ $\text{var}[R_{t,t+n\Delta}] = n\sigma^2$
- "standard deviation rule":

$$\text{sd}[R_{t,t+n\Delta}] = \sigma\sqrt{n}$$

  la deviazione standard cresce con la radice del tempo
- tale ipotesi può essere testata per verificare la consistenza della non correlazione seriale (e.g. "variance ratio test")
- Nella slide successiva: confronto tra R e I per diversi orizzonti temporali con rendimento atteso 5% e deviazione standard 20% (su base annua)

Rendimenti composti: proprietà temporali



P&L di portafoglio

- Rendimento di portafoglio: se il portafoglio è composto da N attività con prezzi/valori unitari $V_j(u)$, $j = 1, \ldots, N$ al tempo u e quantità q_j, $j = 1, \ldots, N$, il valore del portafoglio al tempo u è

$$V(u) = \sum_{j=1}^{N} q_j V_j(u)$$

  - ipotesi: la composizione del portafoglio non varia sul periodo (t, T)
  - profitto/perdita di portafoglio:

$$\text{P\&L}_{t,T} = V(T) - V(t) = -L_{t,T} = \sum_{j=1}^{N} q_j \text{P\&L}^j_{t,T}$$

  - rendimento semplice e composto di portafoglio

$$I_{t,T} = \frac{V(T)}{V(t)} - 1, \qquad R_{t,T} = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

P&L di portafoglio

▷ percentuale di ricchezza investita nel titolo j:

$$w_j = \frac{q_j V_j(t)}{V(t)} = \frac{q_j V_j(t)}{\sum_{j=1}^N q_j V_j(t)}$$

riesce $\sum_{j=1}^N w_j = 1$

- ⋆ rendimento semplice di portafoglio è la media aritmetica ponderata dei rendimenti semplici (“additivity across assets”)

$$I_{t,T} = \sum_{j=1}^N w_j I_{t,T}^j$$

- ⋆ rendimento composto di portafoglio è la media ponderata esponenziale dei rendimenti composti

$$R(t,T) = \log\left(\sum_{j=1}^N w_j \mathrm{e}^{R_{t,T}^j}\right)$$

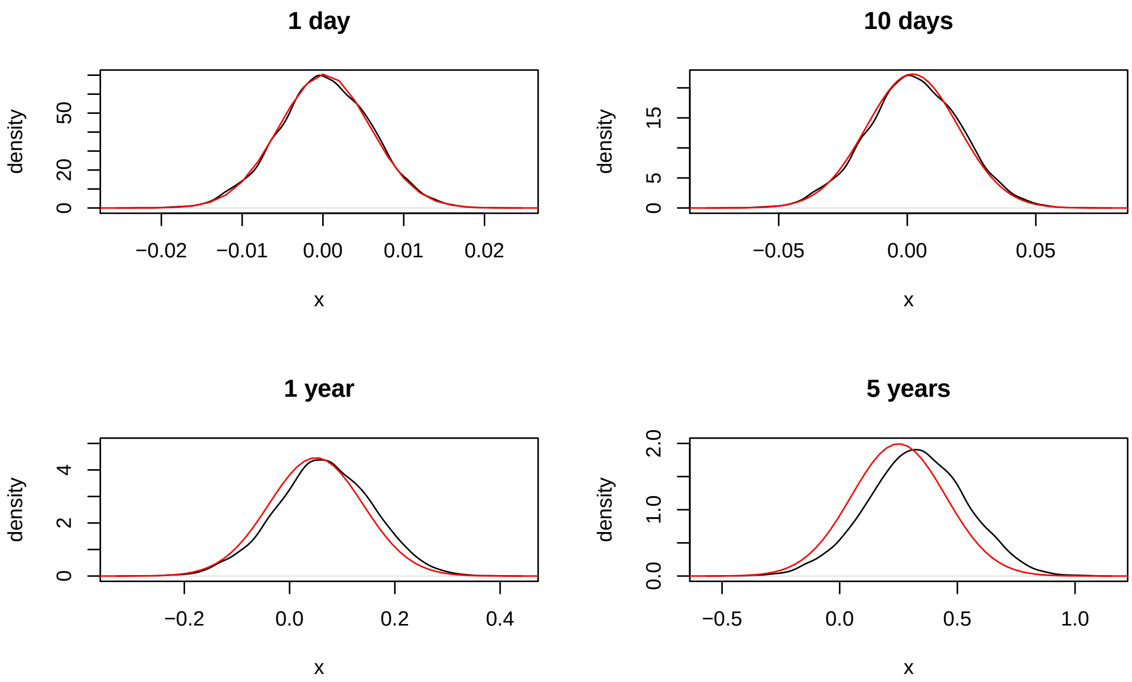
P&L di portafoglio

▷ Se i rendimenti delle attività componenti il portafoglio sono “’piccole”, allora vale l’approssimazione (usare $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ e $\log(1+x) \approx x$ quando $x \to 0$)

$$R_{t,T} \approx \sum_{j=1}^N w_j R_{t,T}^j$$

- ⋆ se la distribuzione congiunta di $R_{t,T}^1, \ldots, R_{t,T}^N$ è normale, in generale non è nota la distribuzione di $R_{t,T}$ (logaritmo di una combinazione lineare di lognormali)
- ⋆ tuttavia, l’approssimazione sopra consente di assumere normalità delle componenti e del portafoglio allo stesso tempo
- ⋆ l’approssimazione è valida per orizzonti temporali limitati

Rendimenti di portafoglio



Value-at-Risk

▷ VaR con distribuzione normale: $(t, T) = (t, t + n\Delta)$, $R_{t_{i-1},t_i} \sim N(\mu, \sigma^2)$, rendimenti incorrelati

- ⋆ $E[R_{t,t+n\Delta}] = n\mu$, $\mathrm{sd}[R_{t,t+n\Delta}] = \sigma\sqrt{n}$
- ⋆ il Value-at-Risk sull'orizzonte temporale $(t, t + n\Delta)$ è

$$\mathrm{VaR}_\alpha(-R_{t,t+n\Delta}) = -\mu n + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}(\alpha)$$

Se $\mu = 0$, allora

$$\mathrm{VaR}_\alpha(-R_{t,t+n\Delta}) = \sqrt{n}\,\mathrm{VaR}_\alpha(-R_{t,t+\Delta})$$

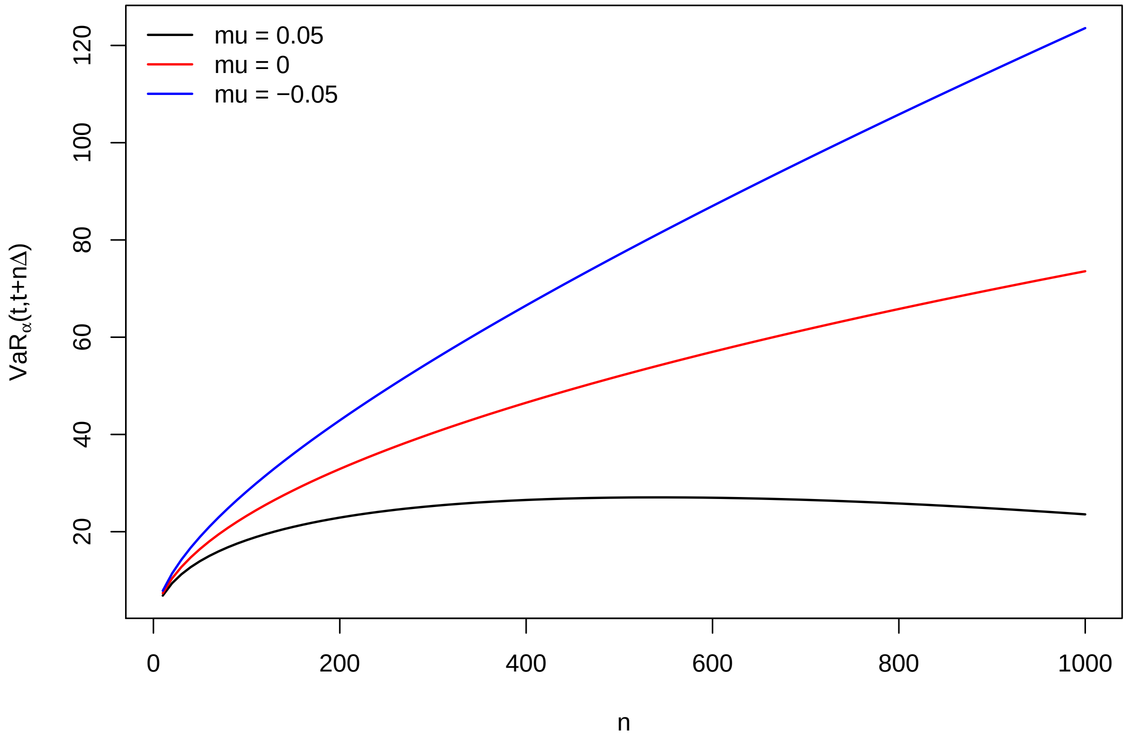
⇝ utile per stimare i parametri su intervalli più piccoli (più dati) e estendere a intervalli più ampi

- ⋆ andamento rispetto all'orizzonte temporale n (se $\alpha > 50\%$)?

$$\mathrm{VaR} \uparrow n \quad \text{se} \quad \mu \leq 0$$

$$\mathrm{VaR} \quad \text{prima crescente, poi decrescente, se} \quad \mu > 0$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk: approccio parametrico

- ▷ vantaggi
  - ⋆ solo due (o tre) parametri da stimare
  - ⋆ si estende a periodi di lunghezza n via la regola della radice quadrata (nel caso normale)
  - ⋆ si estende al caso di portafogli
- ▷ svantaggi
  - ⋆ scelta di un modello che consenta code pesanti e asimmetria?
  - ⋆ rischio di parametro: il metodo richiede la stima dei parametri μ, σ (e ν nel caso t di Student) $\Rightarrow$ intervalli di confidenza per il Value-at-Risk
  - ⋆ rischio di modello: il metodo richiede la scelta di un modello $\Rightarrow$ ogni modello è sbagliato

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- Per calcolare il VaR con ragionevole precisione, la lunghezza m del campione deve essere sufficientemente grande; ad esempio, per $\alpha = 99\%$ non ha senso usare meno di $m = 100$
- tipicamente si usa una finestra includente gli m rendimenti più recenti; scelte tipiche per rendimenti giornalieri
  - $m = 250$ (un anno)
  - $m = 1000$ (quattro anni)
- La scelta di m influenza il VaR
- m troppo elevato rende il VaR insensibile avendo ogni osservazione un peso basso
- al muoversi della finestra, il VaR ha dei movimenti improvvisi (salti) dovuti all'inclusione di nuove osservazioni/esclusione di vecchie osservazioni

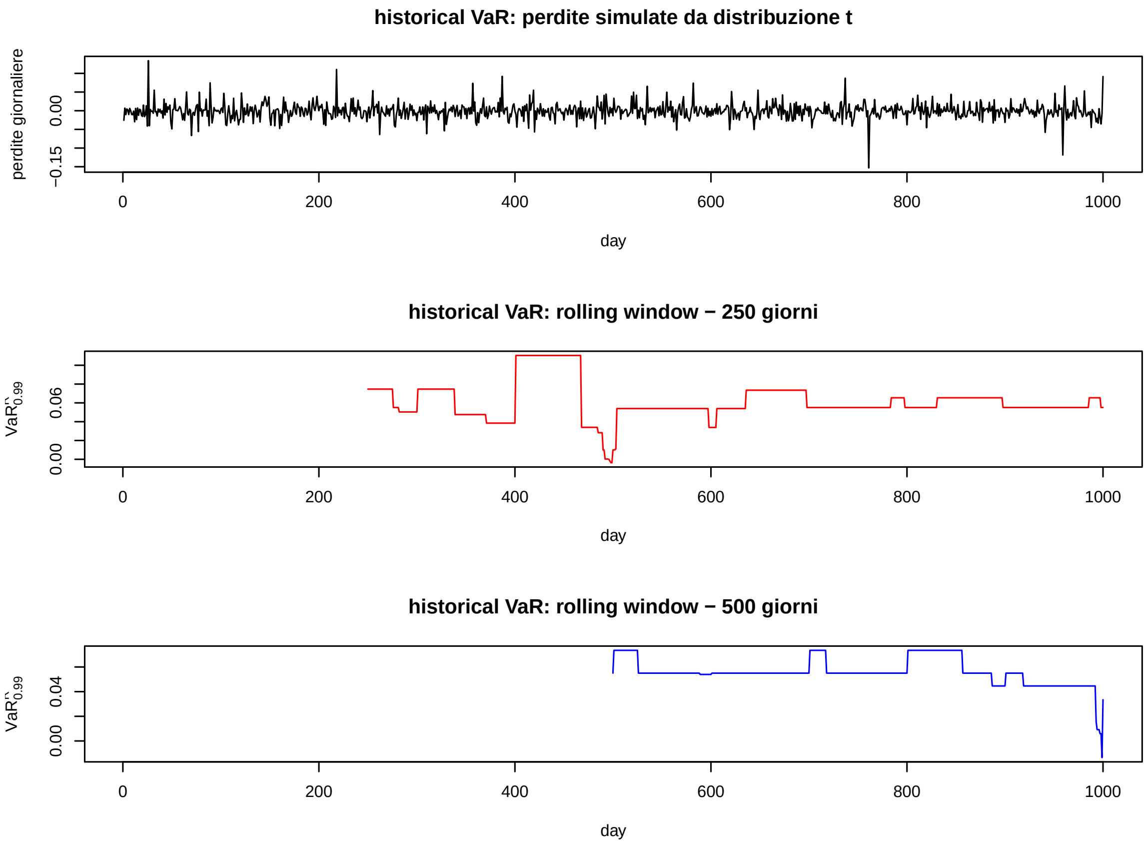
VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$, $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$
  - statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%,\ l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%,\ l_{(4)} = 0\%,\ l_{(5)} = 0.5\%,$$
$$l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%,\ l_{(8)} = 2.5\%,\ l_{(9)} = 3\%,\ l_{(10)} = 4\%$$

    si trova $\mathrm{VaR}_{0.9} = l_{(9)} = 3\%$
  - se $l_{10} = 10\%$ invece di 4%, il VaR non cambia $\rightsquigarrow$ il VaR è "blind to the tail", non dà informazioni sulle perdite superiori al VaR
  - Se si usa una finestra di 10 osservazioni e l_{11} è la nuova perdita, mentre esce $l_1 = 1\%$ dal campione: se $l_{11} \leq 3\%$ allora $\mathrm{VaR}_{0.9} = 3\%$; se $3\% < l_{11} \leq 4\%$ allora $\mathrm{VaR}_{0.9} = l_{11}$; se $l_{11} > 4\%$ allora $\mathrm{VaR}_{0.9} = 4\%$

Value-at-Risk: historical simulation



Weighted Historical Value-at-Risk (WHVaR)

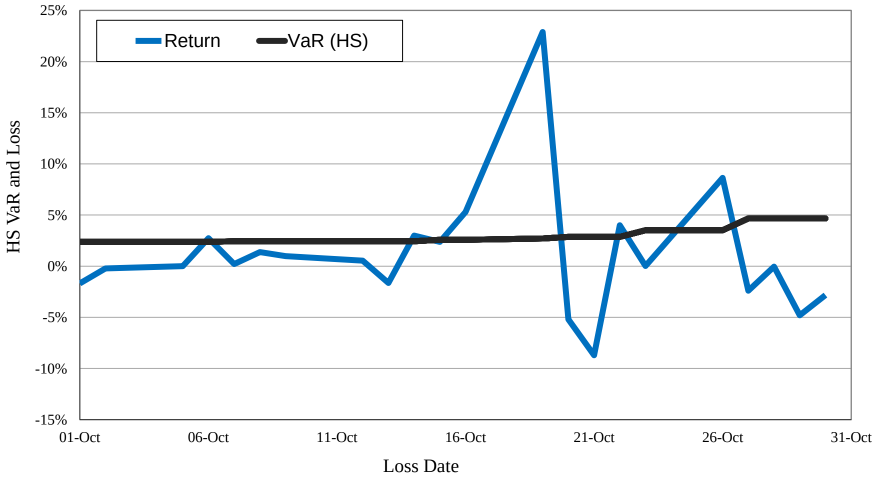
- Per rimediare alla mancanza di robustezza/eccessiva sensibilità dell'historical VaR, si usa uno schema di pesi
  - nel VaR, tutte le osservazioni hanno lo stesso peso
  - nel WHVaR, si usano pesi esponenzialmente decrescenti a seconda di quanto recente è l'osservazione: date le perdite $l_1, \ldots, l_m$, il peso di l_i è

$$w_i = \frac{\eta^{m-i}(1-\eta)}{1-\eta^m}$$

    con $0 < \eta < 1$ (tipicamente $\eta > 0.9$)
  - in questo modo l'osservazione più vecchia che esce dal campione ha poco peso, mentre ha peso massimo la più recente
  - il ruolo di m è meno importante
  - si calcola poi il percentile della distribuzione (tenendo conto dei pesi)

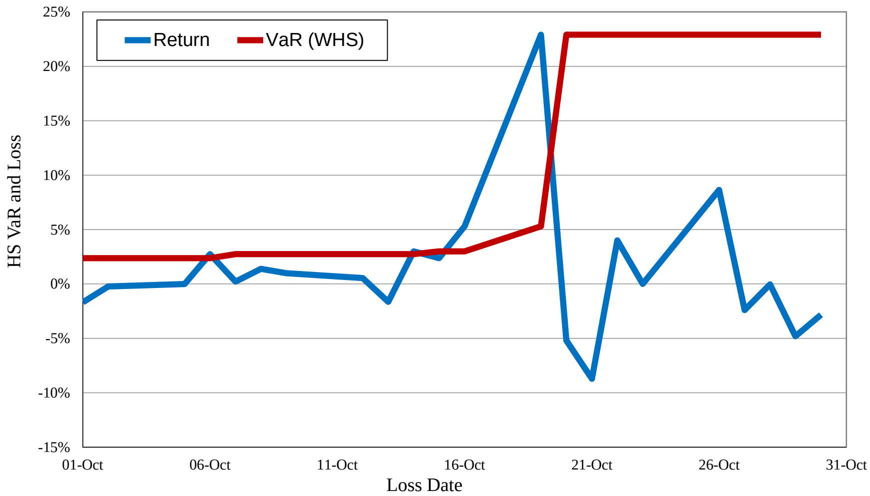
Weighted Historical Value-at-Risk

Figure 2.2 A:
Historical Simulation VaR and Daily Losses from **Long** S&P500 Position, October 1987



Weighted Historical Value-at-Risk

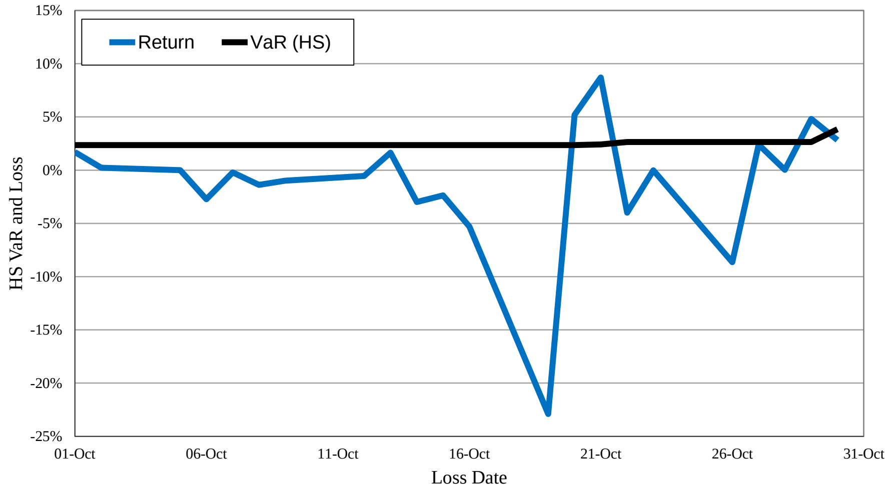
Figure 2.2 B:
Historical Simulation VaR and Daily Losses from **Long** S&P500 Position, October 1987



Weighted Historical Value-at-Risk

17

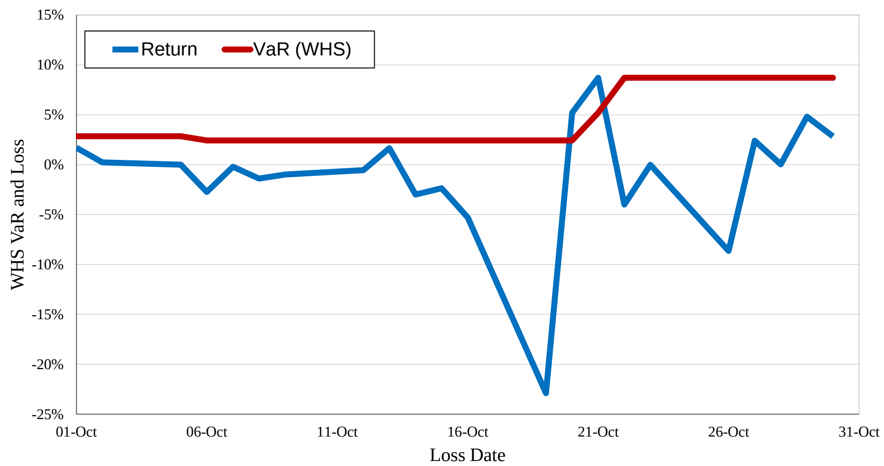
Figure 2.3 A:
Historical Simulation VaR and Daily Losses from **Short** S&P500 Position, October 1987



Weighted Historical Value-at-Risk

18

Figure 2.3 B:
Weighted Historical Simulation VaR and Daily Losses from **Short** S&P500 Position, October 1987



Value-at-Risk: bootstrap

- problemi della simulazione storica:
  - a differenza del VaR parametrico, non si può estendere facilmente il caso uniperiodale a quello n-periodale
  - si potrebbe applicare il metodo direttamente a periodi di lunghezza n al costo di una perdita notevole di dati (e.g. con 250 rendimenti giornalieri ci sono solo 12 rendimenti mensili)
- alternativa: bootstrap non parametrico (Efron (1979))
  - tecnica introdotta in statistica inferenziale per sfruttare campioni limitati
  - idea: (ri)estrarre con reinserimento un campione da quello dato, di uguale lunghezza
  - calcolare la statistica di interesse sul nuovo campione
  - ripetere la procedura un numero elevato di volte
  - si ottiene così la distribuzione campionaria della statistica di interesse $\Rightarrow$ media, intervalli di confidenza, ...

Gestione del Rischio Finanziario

Value-at-Risk: bootstrap

- bootstrap VaR, 1 periodo
  1. è dato un campione $r_1, \dots, r_m$ di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
  2. si costruisce un nuovo campione di medesima lunghezza m via estrazione con rimpiazzo, indicato con $\widehat{r}_{1,1}, \dots, \widehat{r}_{1,m}$
  3. si calcola (via simulazione storica) il Value-at-Risk dal nuovo campione, indicato con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R)$
  4. si ripetono 2. e 3. un numero scelto M di volte, ottenendo M campioni di lunghezza m
  5. da ognuno degli M campioni si estrae il Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
  6. si calcola poi la stima di bootstrap del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}(-R) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}(-R)$$

Value-at-Risk: bootstrap

- bootstrap VaR, 1 periodo
  - si può usare il campione di bootstrap dei Value-at-Risk per costruire intervalli di confidenza per $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}(-R)$
  - si calcolano i Value-at-Risk per ogni campione bootstrap come in 1.-5., $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \ldots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
  - si sceglie un livello di confidenza α', non collegato con il livello di confidenza del Value-at-Risk α!
  - si calcolano poi il $(1-\alpha')/2$ e il $(1+\alpha')/2$ quantili della distribuzione $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \ldots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
- il metodo funziona bene se il campione iniziale non è troppo piccolo e se proviene da una distribuzione ragionevolmente simmetrica

Value-at-Risk: bootstrap

- osservazioni sul metodo bootstrap
  - ogni ricampionamento del campione originale ne genera uno potenzialmente diverso
  - il Value-at-Risk calcolato su ogni ricampionamento sarà (potenzialmente) diverso da quello del campione originale
  - in ogni ricampionamento, una data osservazione del campione originale potrà apparire più volte, o non apparire per niente
  - una osservazione che appare ripetuta nel campione originale sarà ricampionata con probabilità proporzionale alla sua frequenza
  - l'effetto di questa distorsione — i VaR di ogni bootstrap differiscono da quello empirico calcolato sul campione originale — se la dimensione campionaria m è sufficientemente grande
- idea del metodo bootstrap: la variabilità delle stime di boostrap intorno alla stima empirica è simile/mima la variabilità della stima empirica intorno al valore "vero"
- per campioni di dimensione m ragionevolmente elevata, la distribuzione empirica è vicina alla popolazione $\Rightarrow$ il bootstrap (campionare con rimpiazzo dalla distribuzione empirica) non differisce molto dal campionamento casuale dalla popolazione

Value-at-Risk: bootstrap

▷ bootstrap VaR, n periodi: $(t, T) = (t, t + n\Delta)$

1. è dato un campione $r_1, \ldots, r_m$ di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
2. si costruisce un nuovo campione di lunghezza n via estrazione con rimpiazzo, indicato con $\widehat{r}_{1,1}(1), \ldots, \widehat{r}_{1,1}(n)$
3. si ottiene un rendimento sul periodo $(t, t + n\Delta)$ via

$$\widehat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{r}_{1,1}(j)$$

4. si ripetono 2.-3. m volte in maniera da ottenere un campione $\widehat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta), \ldots, \widehat{r}_{1,m}(t, t + n\Delta)$ di rendimenti n-periodali
5. si calcola (via simulazione storica) il Value-at-Risk dal campione multi periodale, indicato con $\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,1}(-R)$
6. si ripetono 2.-4. un numero scelto M di volte, ottenendo M stime di Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \ldots, \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
7. si calcola poi la stima di bootstrap del VaR via

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}(-R) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha,i}(-R)$$

Value-at-Risk: bootstrap

▷ bootstrap VaR, n periodi: $(t, T) = (t, t + n\Delta)$

- ⋆ similmente si aggiungono intervalli di confidenza
- ⋆ l'ipotesi fondamentale è che i rendimenti siano indipendenti su periodi diversi ⇒ estrazioni indipendenti dallo stesso campione
- ⋆ lo schema di base può essere modificato per includere correlazione seriale dei rendimenti e volatilità stocastica (e.g. tramite process GARCH = Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)