

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 6 - r2
analisi macchinario rotante

Rotodinamica

La maggior parte delle macchine industriali ha organi rotanti!

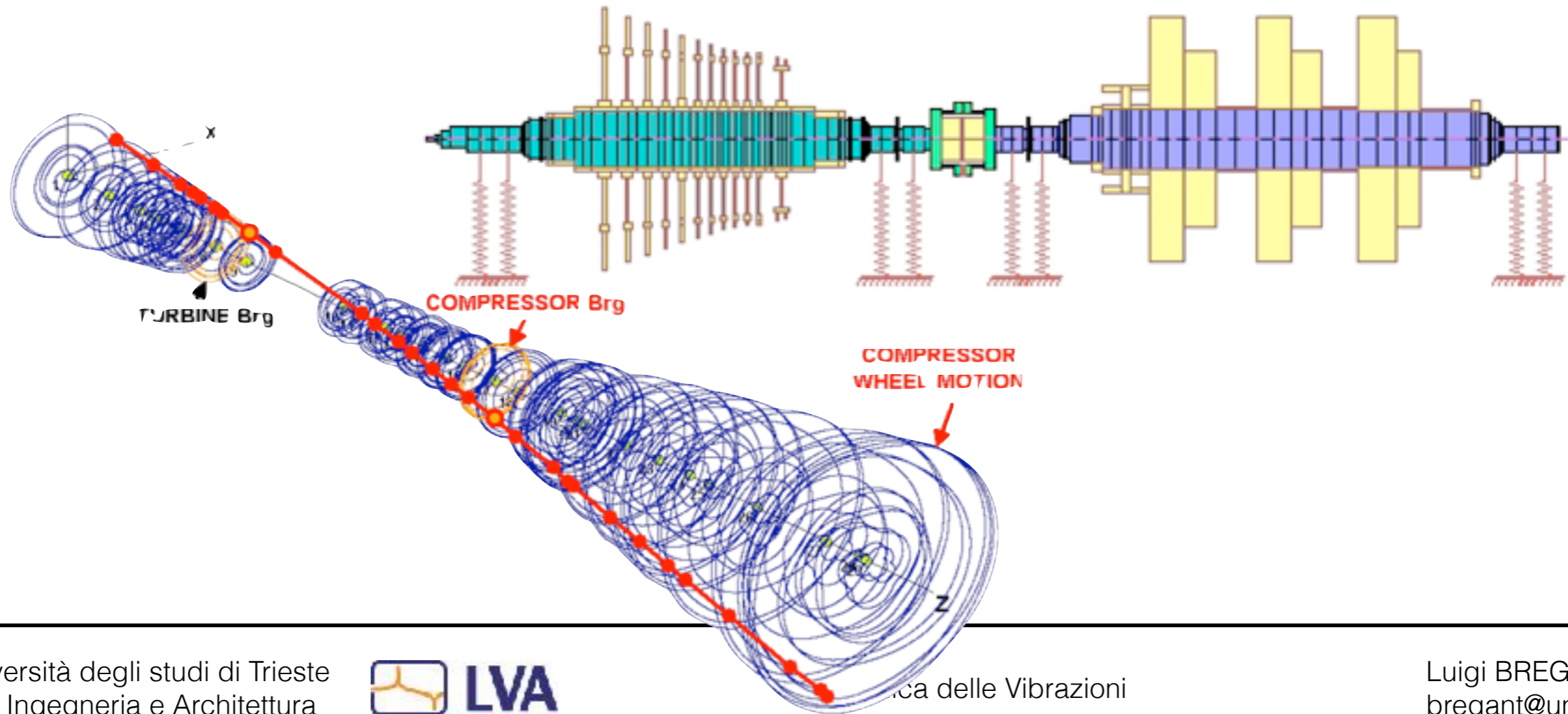
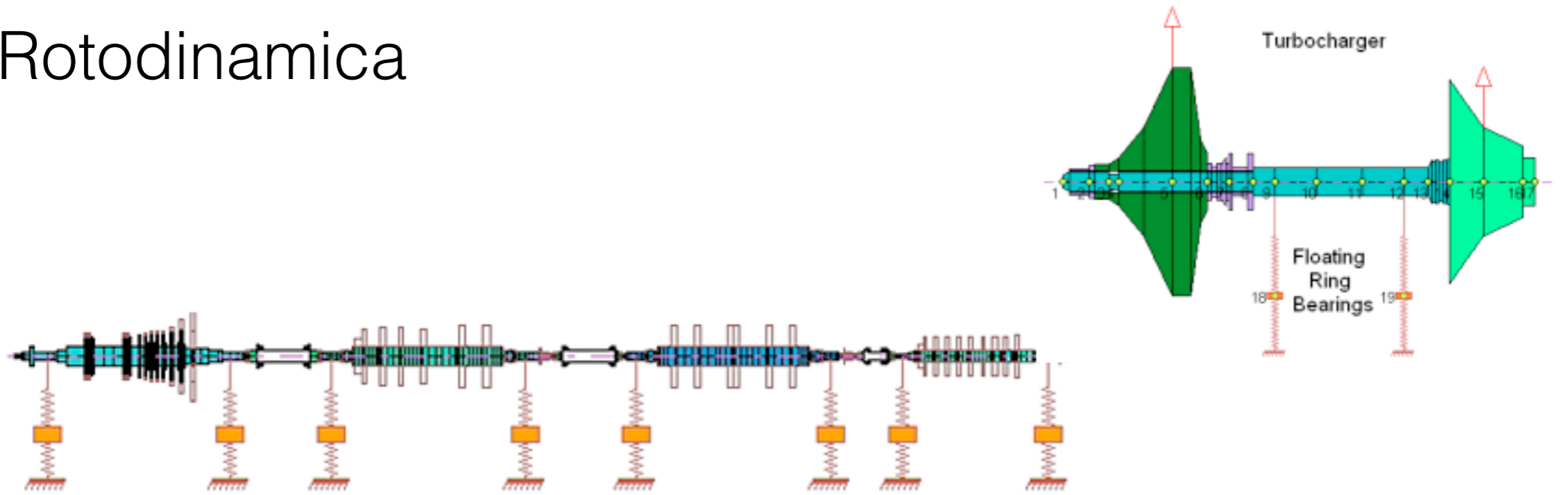
La rotodinamica si occupa di macchine in cui una parte (rotore) ruota con un significativo momento angolare

Lo studio della loro dinamica si differenzia in base alle dimensioni e dal regime di funzionamento

Si considera acquisito il concetto di squilibrio statico / dinamico / di coppia



Rotodinamica



Rotodinamica - semplificazioni

Si definisce un ROTORE un corpo sospeso tramite una serie di cerniere cilindriche che gli permettono di ruotare liberamente attorno ad un asse! (statore..non si muove)

Si immagina che l'asse di rotazione sia fisso nello spazio (non è vero nelle macchine semoventi automobili, aerei, navi..)

Si immagina che il rotore sia equilibrato (asse rotazione coincide asse principale d'inerzia), o se non lo è lo squilibrio sia piccolo e le deformazioni relative piccole

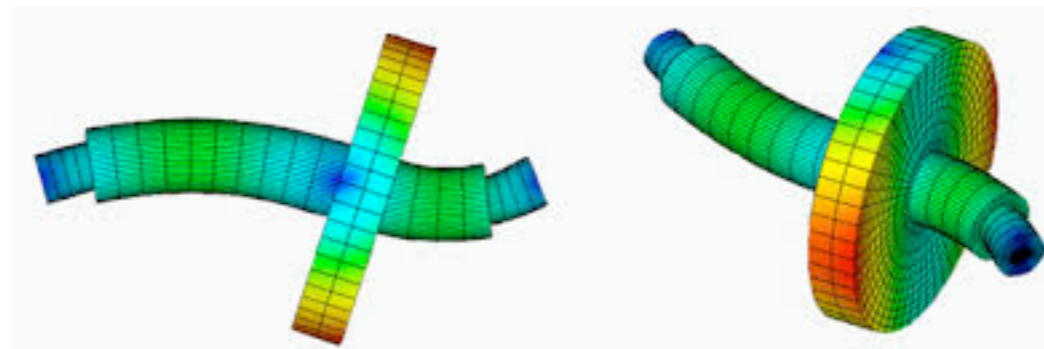
Si immagina che il rotore sia assial-simmetrico (le equazioni son più semplici, e non serve lavorare con un sistema di rif solidale al rotore)

Si immagina che il rotore sia "mosso" dall'esterno

Rotodinamica - classificazione

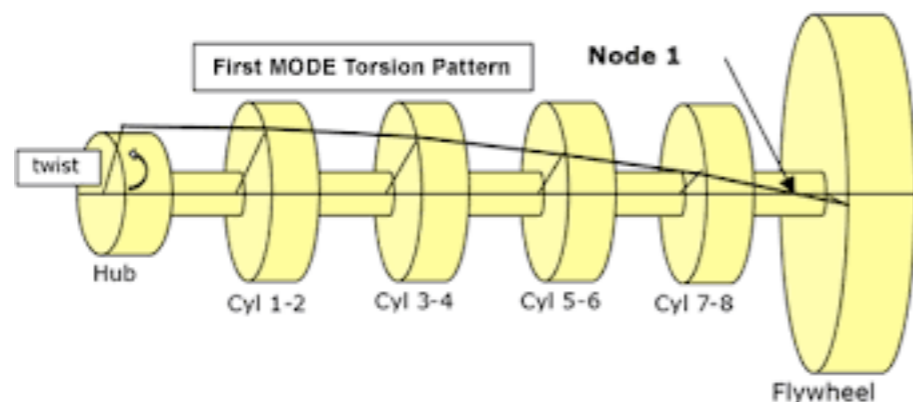
Vibrazioni Flessionali (-> risonanze flessionali)

l'asse del rotore si deforma su un piano (se non c'è smorzamento)



Vibrazioni Torsionali (-> risonanze torsionali)

l'asse del rotore resta coincidente a quello del sistema indeformato



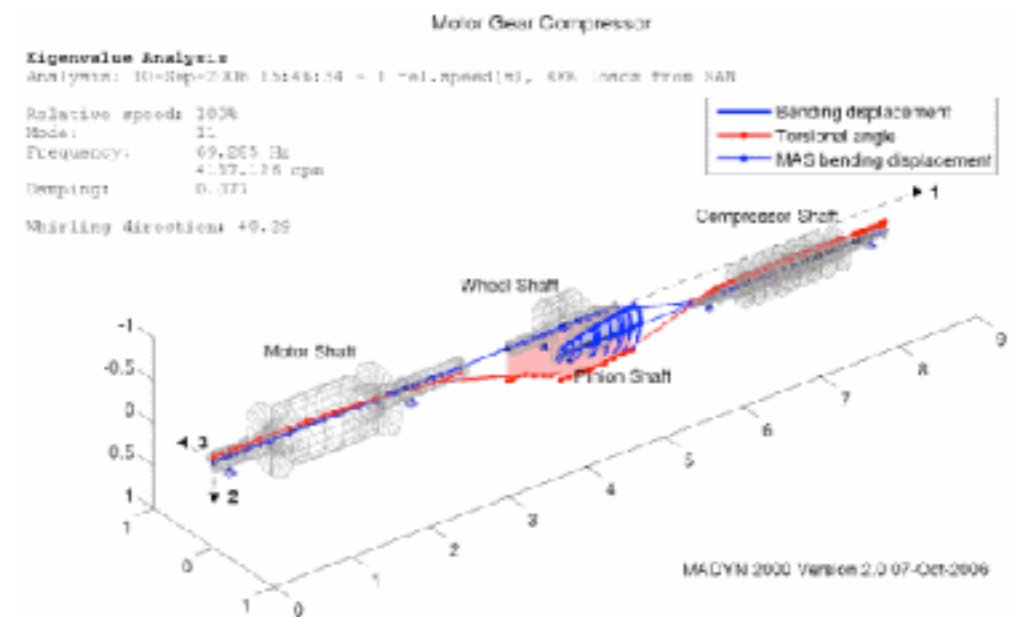
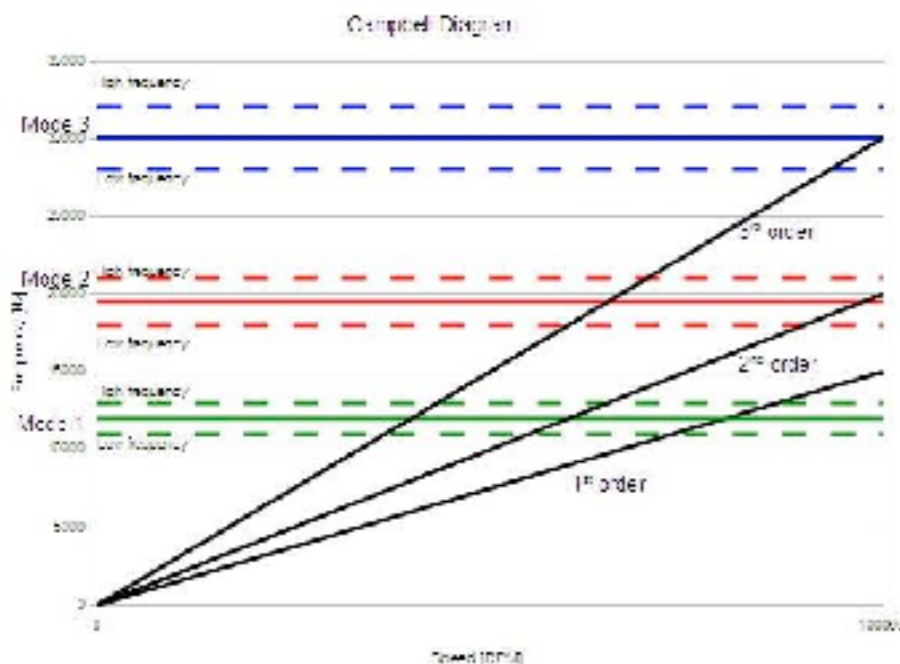
..bisogna considerare entrambi i casi!!!

Rotodinamica - risonanze e regimi di funzionamento

Si possono immaginare due condizioni di funzionamento:
a velocità costante (o poco variabile es. alternatore elettrico)
a velocità variabile (transitorio es. motore automobile)

Il rotore avrà un certo numero di frequenze naturali (flessionali - torsionali)..
si deve fare in modo che il/i regimi di funzionamento, siano più lontani possibili
da tali frequenze... (amplificazione delle deformate...vibrazioni...rotture)

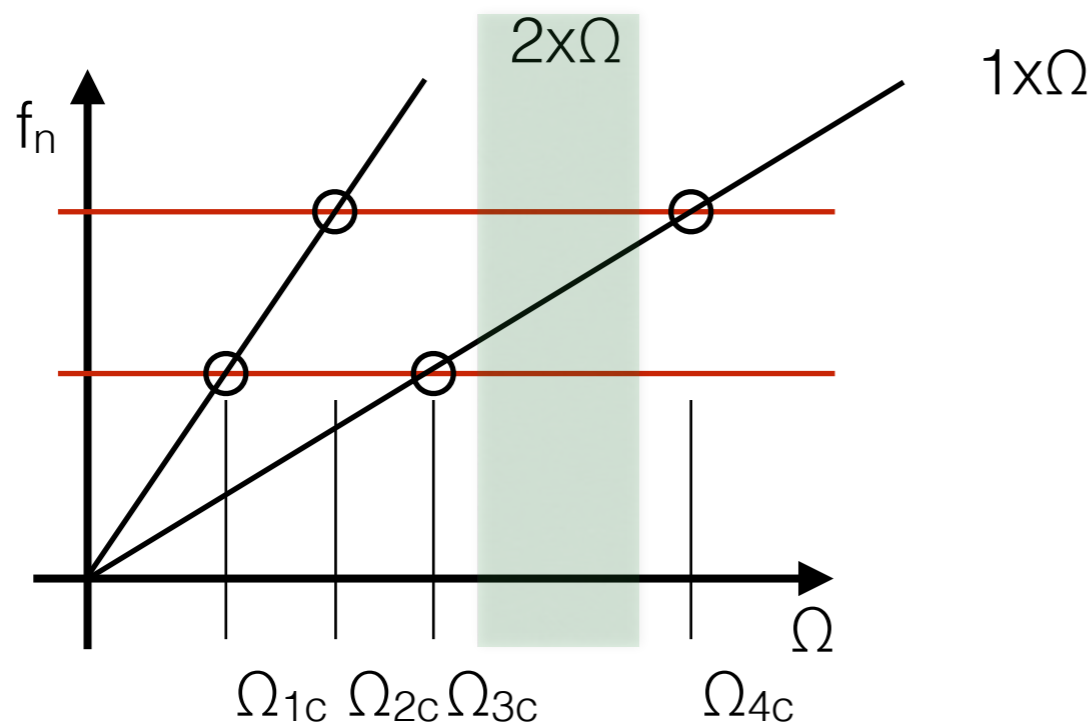
Si utilizza il diagramma di Campbell che rappresenta contemporaneamente
la velocità del rotore e le sue risonanze (flessionali, torsionali, forward, backward,..)



Rotodinamica - diagramma di Campbell 2

Nel diagramma di Campbell le rette orizzontali rappresentano le frequenze naturali del rotore (flessionali - torsionali)

L'intersezione tra queste e le rette rappresentanti la velocità del rotore Ω (o le sue armoniche) sono dette velocità critiche!

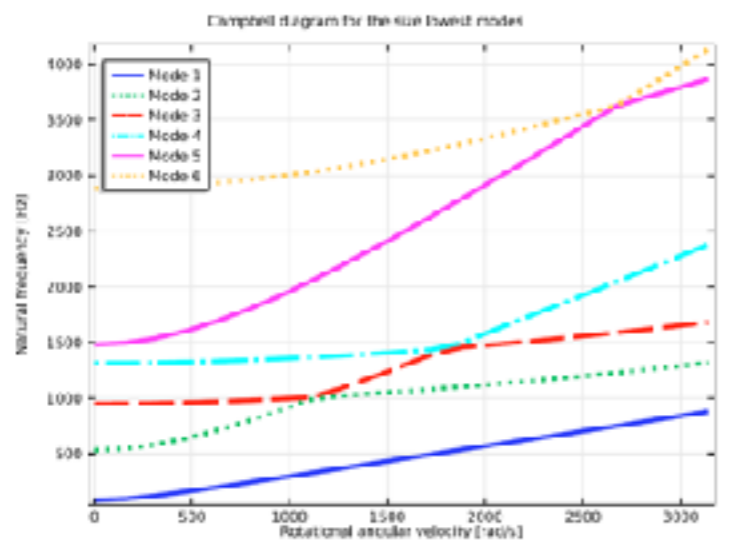


Non tutte le critiche creano problemi!
dipende dal valore di smorzamento associato!

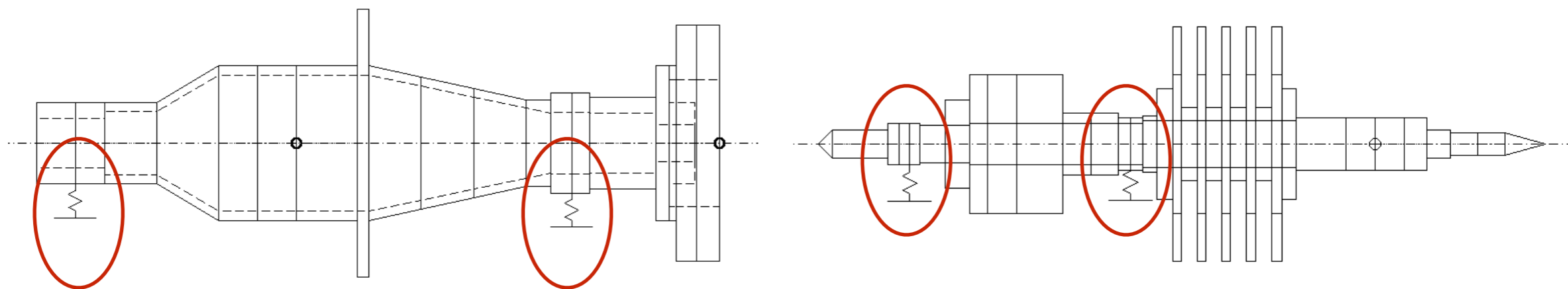
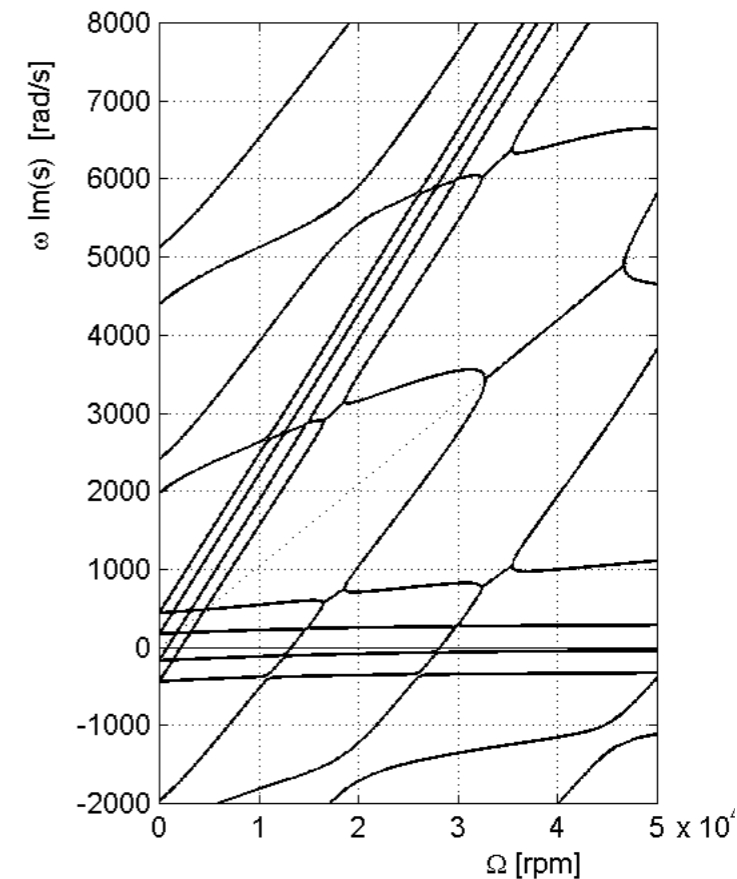
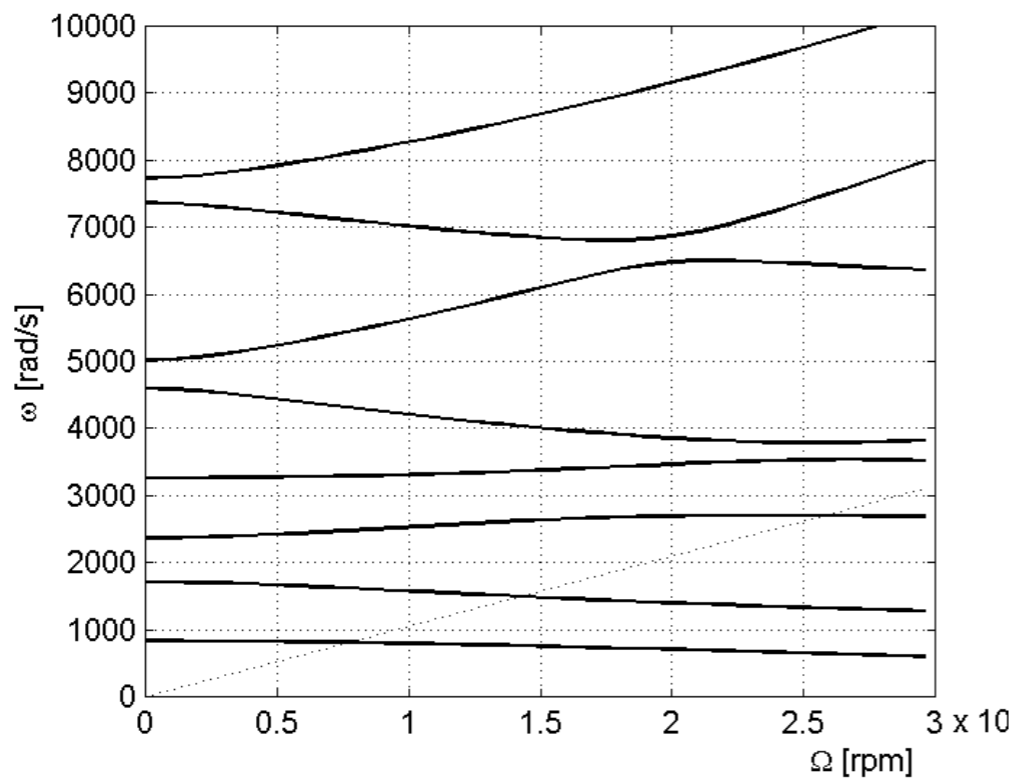
Nel grafico a sinistra si riporta il caso di freq. naturali f_n indipendenti da Ω .
(rette rosse)

Non è sempre così per effetto dei momenti giroscopici..

NB alle velocità critiche il rotore non vibra, ma ruota deformato!
diventando la sorgente di eccitazione periodica della parte statica della macchina!!



Rotodinamica - diagramma di Campbell 3



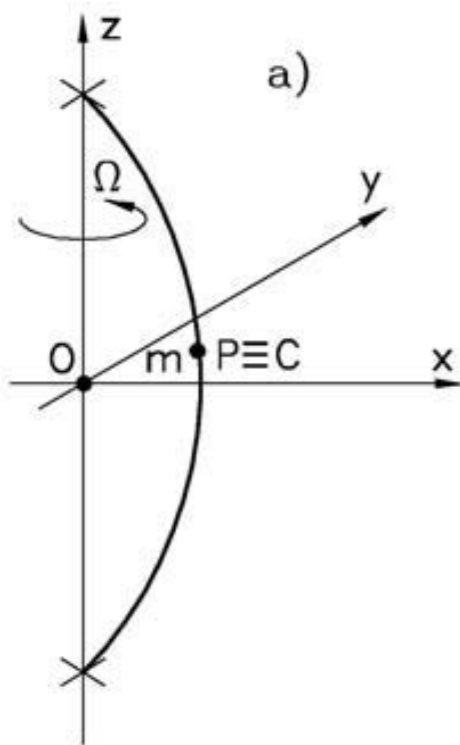
Gli effetti giroscopici influenzano il diagramma di Campbell in maniera significativa!

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

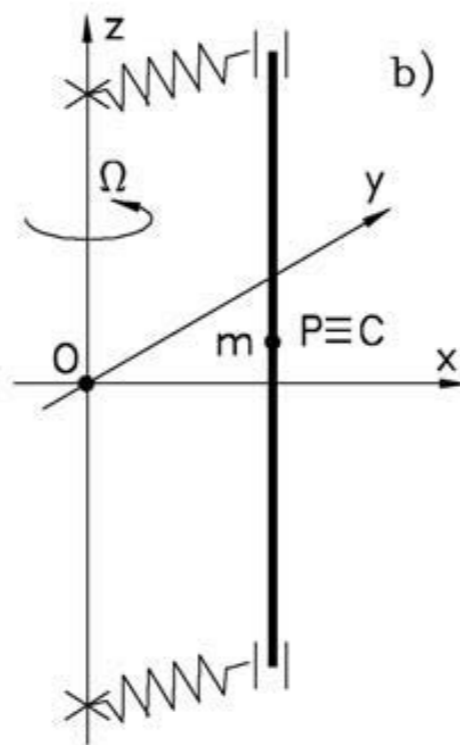
Il sistema più semplice per lo studio dei sistemi flessioni rotanti consiste in un punto materiale m collegato a un albero senza peso (Foppl 1895 - Jeffcott 1919)

Le forze di richiamo che si generano nel sistema possono dipendere da..

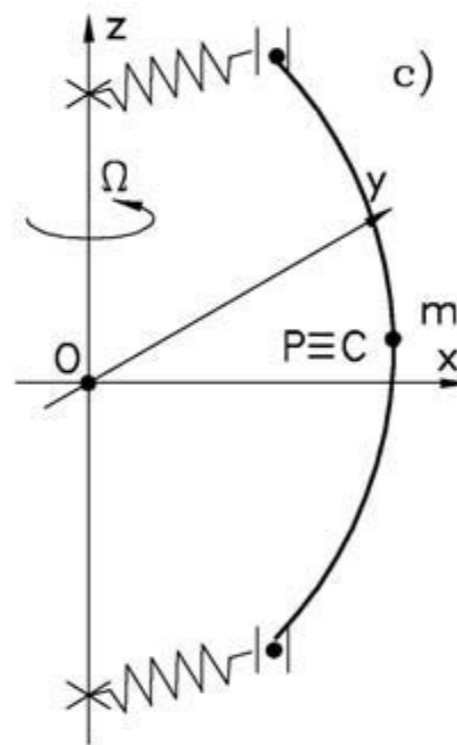
albero



supporti



albero+supporti

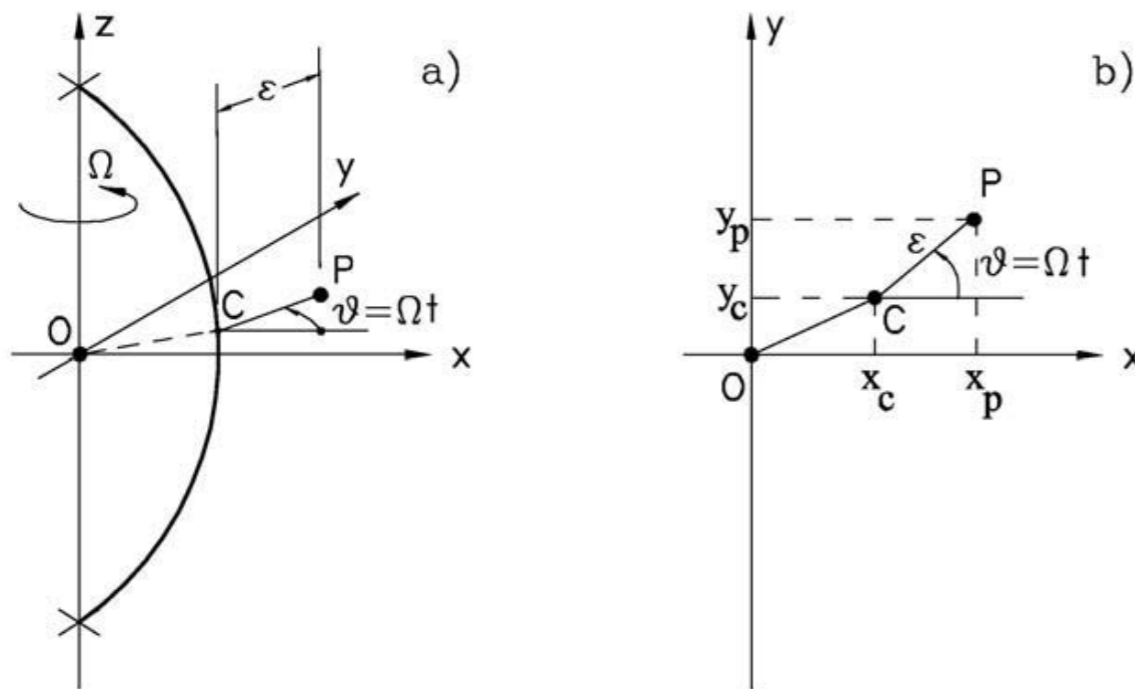


rotore
equilibrato

Il caso rappresentato è troppo ideale, ci sarà sempre un po' di squilibrio residuo e la massa non giacerà sull'albero..

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

...l'eccentricità ϵ della massa m , creerà lo squilibrio statico $m\epsilon$ che influenzerà fortemente il sistema... in funzione della velocità di rotazione Ω (costante per il momento)..



(si possono scrivere le equazioni del sistema in coordinate ortogonali o polari)

$$\mathbf{r}_P(t) = \begin{Bmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_C(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_C(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_P(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{y}_P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_C(t) - \epsilon\Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_C(t) + \epsilon\Omega \cos(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

energia cinetica

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) = \\ &= \frac{1}{2}m \{ \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \epsilon^2\Omega^2 + 2\epsilon\Omega [-\dot{x}_C \sin(\Omega t) + \dot{y}_C \cos(\Omega t)] \} \end{aligned}$$

energia potenziale elastica

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}k (x_C^2 + y_C^2)$$

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

L'equazione di Lagrange.. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial q_i} = Q_i$

con le forze generalizzate.. $Q_i = \partial \delta \mathcal{L} / \partial \delta q_i$

ed il lavoro virtuale delle forze applicate.. $\delta \mathcal{L} = F_x \delta x_C + F_y \delta y_C$

Con le opportune derivate, nelle coordinate generalizzate si ottiene il sistema di equazioni del moto del rotore di Jeffcott ..

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) + F_x(t) , \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) + F_y(t) , \end{cases} \quad \bullet$$

Il sistema omogeneo da le vibrazioni libere del rotore di Jeffcott perfettamente equilibrato

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C(t) + kx_C(t) = 0 \\ m\ddot{y}_C(t) + ky_C(t) = 0 \end{cases} \quad \bullet$$

..equazioni uguali a un sistema SDOF!!

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

Rotazione libera (senza squilibrio)...

Soluzione di tentativo... $\begin{cases} x_C(t) = x_{C_0} e^{st} \\ y_C(t) = y_{C_0} e^{st} \end{cases}$

..derivata (2 volte) e sostituita nell'equazione ● ...

$\begin{cases} (ms^2 x_{C_0} + kx_{C_0}) e^{st} = 0 \\ (ms^2 y_{C_0} + ky_{C_0}) e^{st} = 0 \end{cases}$..si cerca la soluzione valida per ogni istante t e diversa dalla soluzione di quiete..

$\begin{cases} ms^2 + k = 0 \\ ms^2 + k = 0 \end{cases} \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{..2 soluzioni complesse e coniugate.... } \pm i\omega_n$

$\begin{cases} x_C(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t} \\ y_C(t) = Y_1 e^{i\omega_n t} + Y_2 e^{-i\omega_n t} \end{cases}$..con Xi e Yi dipendenti dalle condizioni iniziali sullo spostamento e sulla velocità....

$\begin{cases} x_C(t) = x_C(0) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \dot{x}_C(0) \sin(\omega_n t) \\ y_C(t) = y_C(0) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \dot{y}_C(0) \sin(\omega_n t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_C(t) = X \cos(\omega_n t - \phi_x) , \\ y_C(t) = Y \cos(\omega_n t - \phi_y) , \end{cases}$

..soluzione generale....

$x_C(0) = X \cos \phi_x , \quad \dot{x}_C(0) = \omega_n X \sin \phi_x$
 $y_C(0) = Y \cos \phi_y , \quad \dot{y}_C(0) = \omega_n Y \sin \phi_y$

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

Rotazione sbilanciata (con squilibrio)...

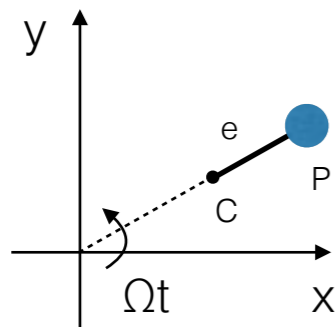
Risolviemo l'equazione  e per semplicità trascuriamo la forza esterna F...

..la soluzione particolare è....
$$\begin{cases} x_C(t) = x_{C_0} \cos(\Omega t) , \\ y_C(t) = y_{C_0} \sin(\Omega t) = y_{C_0} \cos(\Omega t + \pi/2) \end{cases}$$

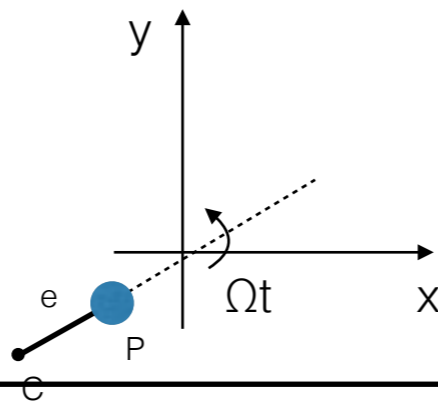
$$\begin{cases} (k - m\Omega^2) x_{C_0} = m\epsilon\Omega^2 \\ (k - m\Omega^2) y_{C_0} = m\epsilon\Omega^2 \end{cases}$$

..che porta allo spostamento
$$x_{C_0} = y_{C_0} = \epsilon \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \epsilon \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2 - \Omega^2} = \epsilon \frac{\frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}}$$

..sub-critica..



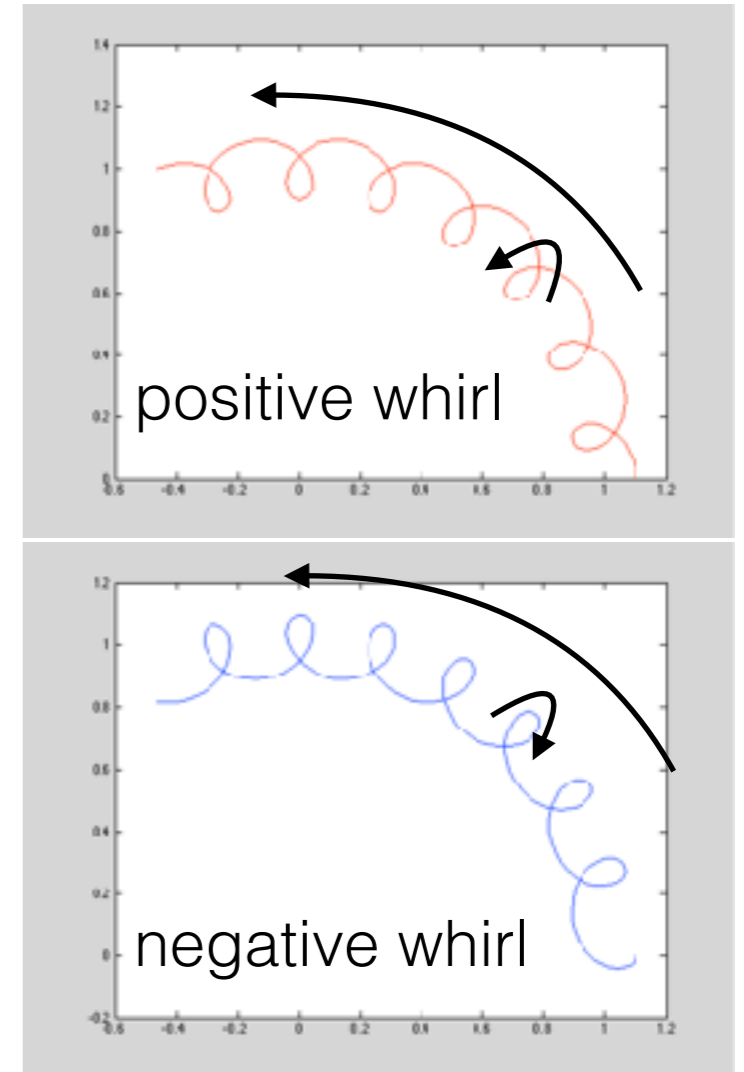
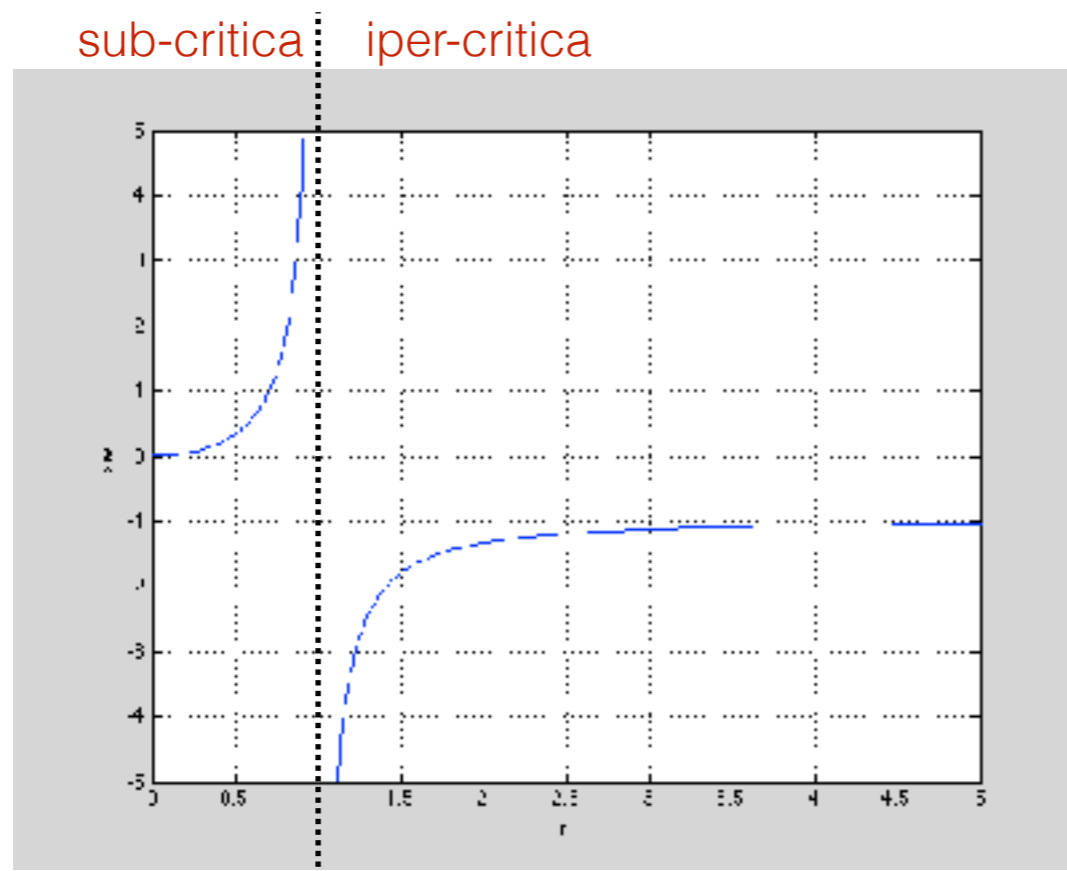
..iper-critica..
..autocentratura..



..velocità critica..

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

..ampiezza della risposta del rotore di Jeffcott al variare di r . $\frac{\Omega^2}{\Omega_{cr}^2}$



Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott

Oltre all'eccentricità si può studiare l'effetto

..della piegatura (flessione statica) dell'albero

(non necessariamente nel piano dello squilibrio)..

..la presenza di smorzamento

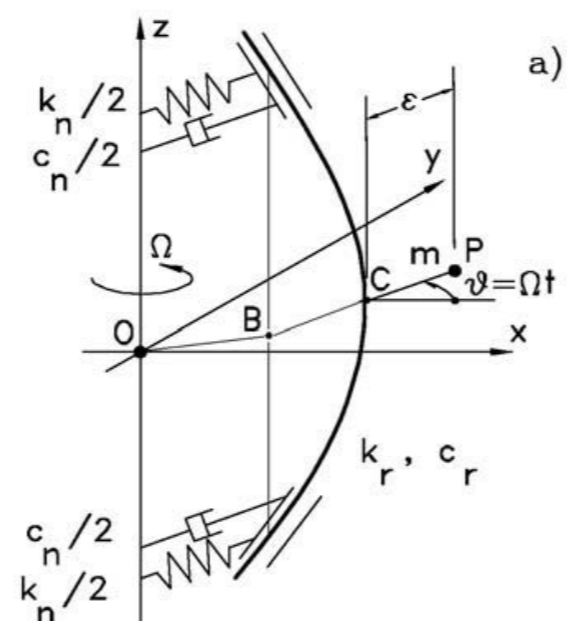
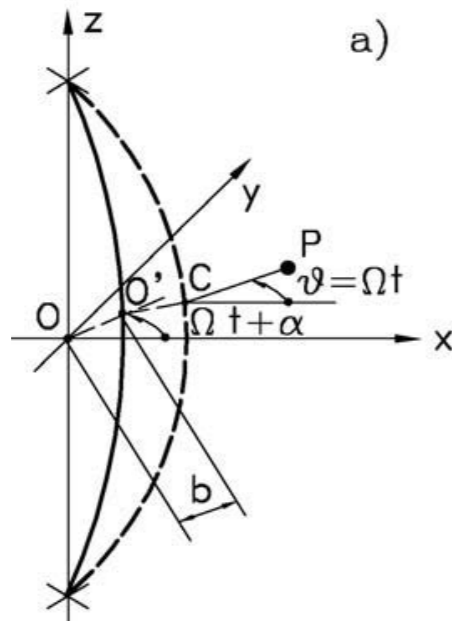
(non rotating damping - fondazioni e rotating damping - albero) (viscoso, strutturale..)

..la rigidità delle fondazioni..

..la variazioni di coppia dovute a resistenze interne

(legati a fenomeni dissipativi dello smorzamento)..

..



..con coordinate solidali alla macchina (fisse)..

..con coordinate solidali al rotore (rotanti)..

Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott - momenti giroscopici

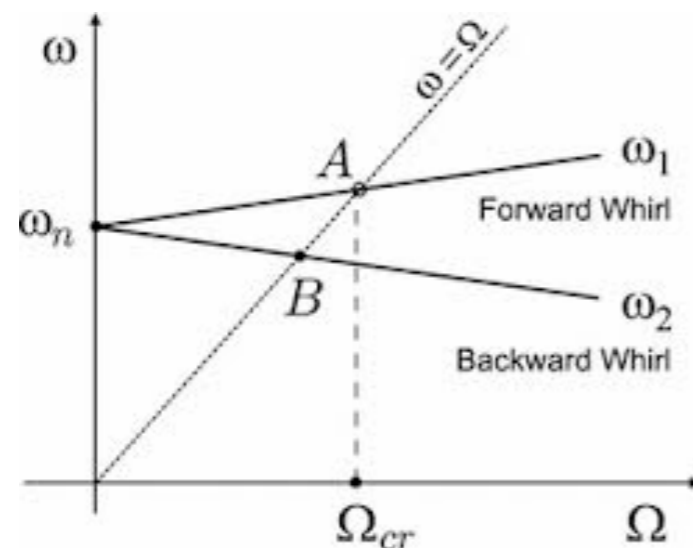
Finora abbiamo considerato un sistema costituito da un albero e una massa puntuale m (centrata o eccentrica)..

I modi di questo sistema non dipendono da Ω , ed il diagramma di Campbell rappresenta le frequenze naturali con da rette orizzontali.

Quando il rotore contiene un corpo rigido (al posto della massa m), si introducono momenti giroscopici che tendono a ..deformare l'albero.

..variare le frequenze naturali del sistema (in funzione di Ω)

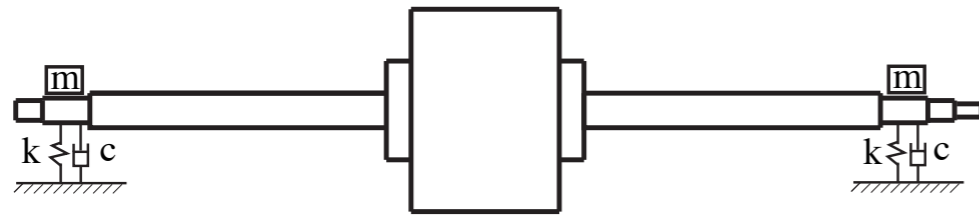
..



Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott - momenti giroscopici

Si studierà il sistema supponendo che rotore giri con una velocità angolare Ω abbia un momento d'inerzia polare I_p abbia momento trasversale d'inerzia I_t il centro di massa non coincide con l'asse geometrico del sistema...

squilibrio statico / squilibrio di coppia

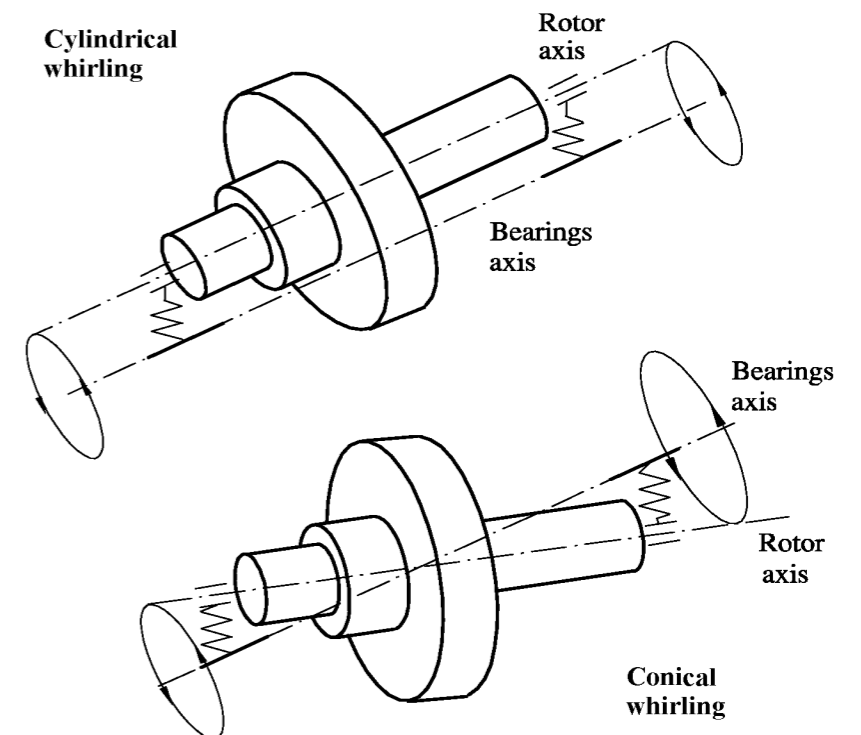


$I_p > I_t$ si parlerà di disco

$I_p < I_t$ si parlerà di rotore allungato

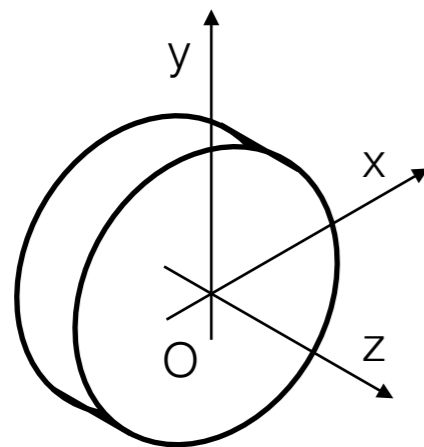
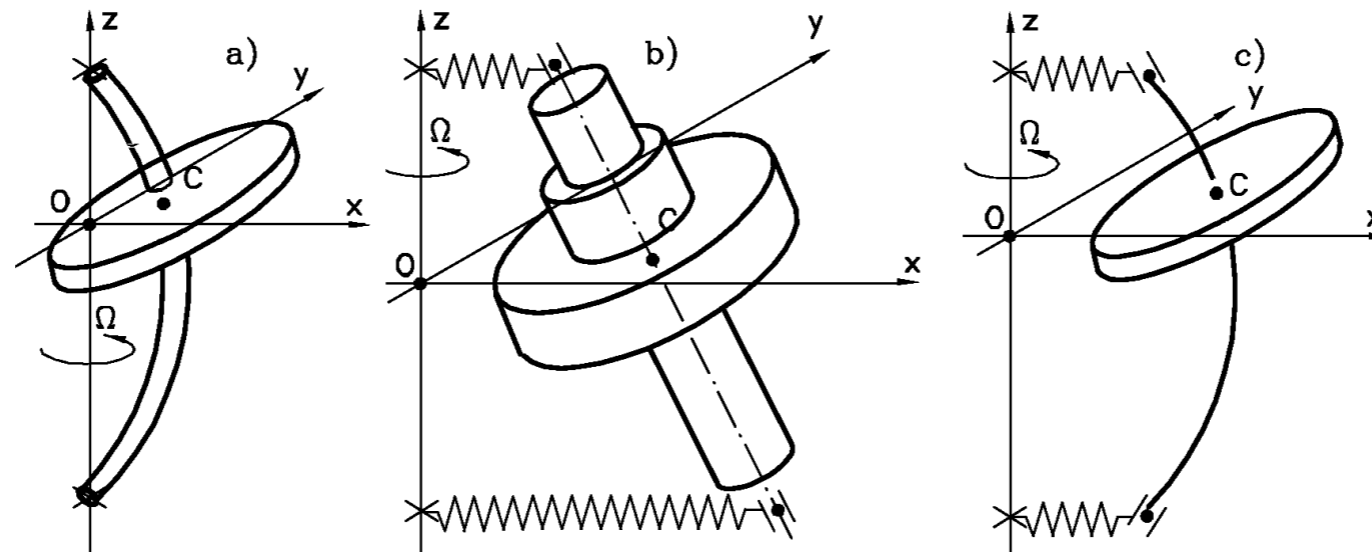


attenzione al caso $I_p = I_t$ nei rotori veloci



Rotodinamica - flessionale / rotore di Jeffcott - momenti giroscopici

Per studiare tale sistema si possono ipotizzare tre diverse configurazioni:
(man mano più complesse)

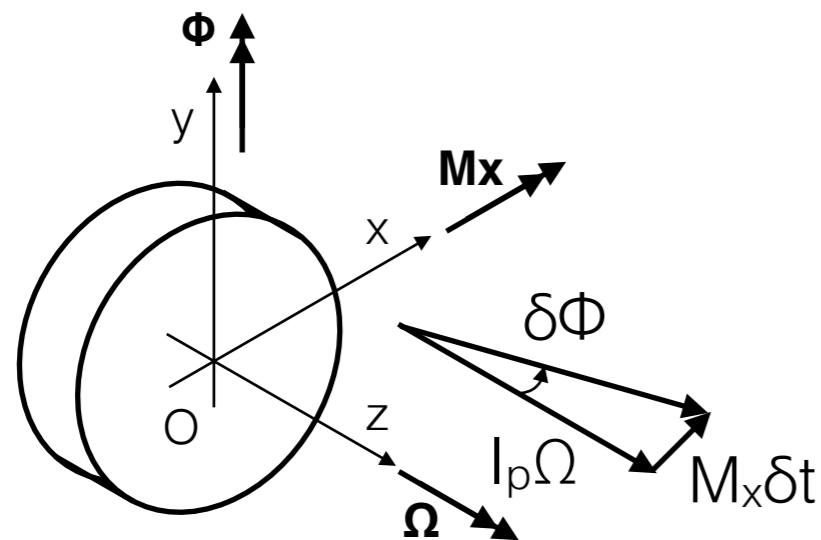


Ricordiamo che gli effetti giroscopici derivano
..dalla conservazione del momento angolare del sistema..
..e sono perpendicolari all'asse di rotazione del rotore!
(vale la regola della mano destra!!)

Rotodinamica - flessionale / momenti giroscopici

Quando il corpo ruota, il suo momento angolare del rotore sarà $I_p\Omega$.

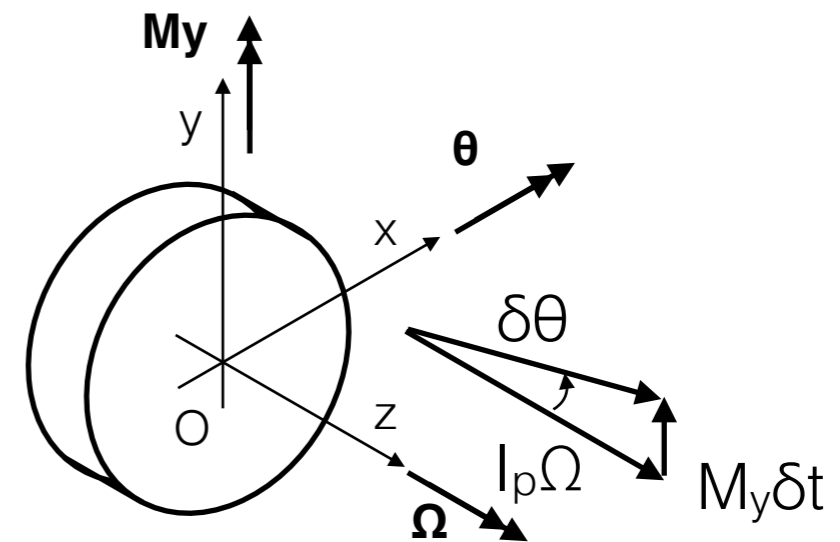
..supponiamo il disco ruoti in un δt attorno all'asse y con velocità $\dot{\phi} = \frac{\delta\phi}{\delta t}$
Il momento angolare ruoterà di una quantità $\delta\phi$ generando un momento M_x



$$M_x \delta t = I_p \Omega \delta\phi \quad \text{per } \delta t \text{ che tende a zero...}$$

$$M_x = I_p \Omega \dot{\phi} \quad I_d \ddot{\phi} + I_p \Omega \dot{\phi} = M_x$$

..supponiamo il disco ruoti in un δt attorno all'asse x con velocità $\dot{\theta} = \frac{\delta\theta}{\delta t}$
Il momento angolare ruoterà di una quantità $\delta\theta$ generando un momento M_y



$$-M_y \delta t = I_p \Omega \delta\theta$$

$$M_y = I_p \Omega \dot{\theta} \quad I_d \ddot{\theta} - I_p \Omega \dot{\theta} = M_y$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

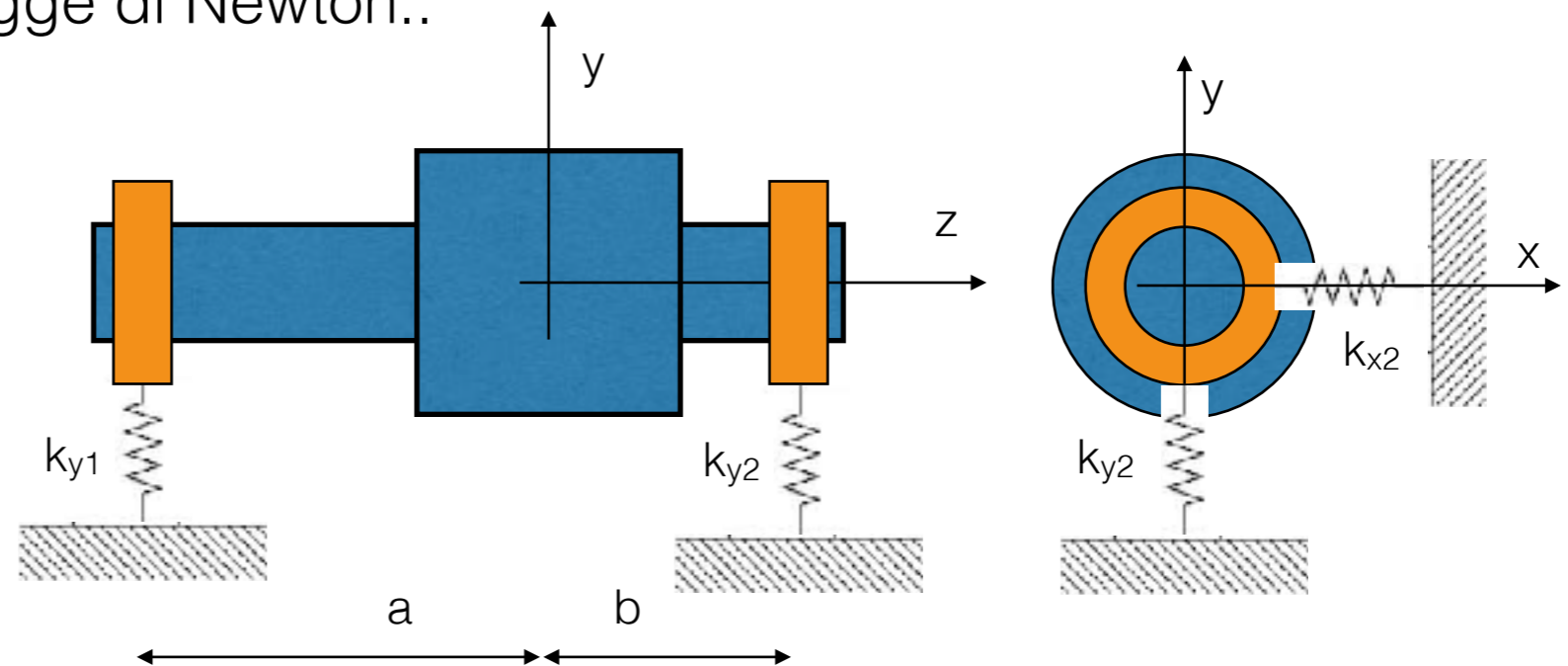
Consideriamo un rotore rigido su supporti flessibili..

questo sistema ha 4 gradi di libertà (due traslazioni e due rotazioni)..

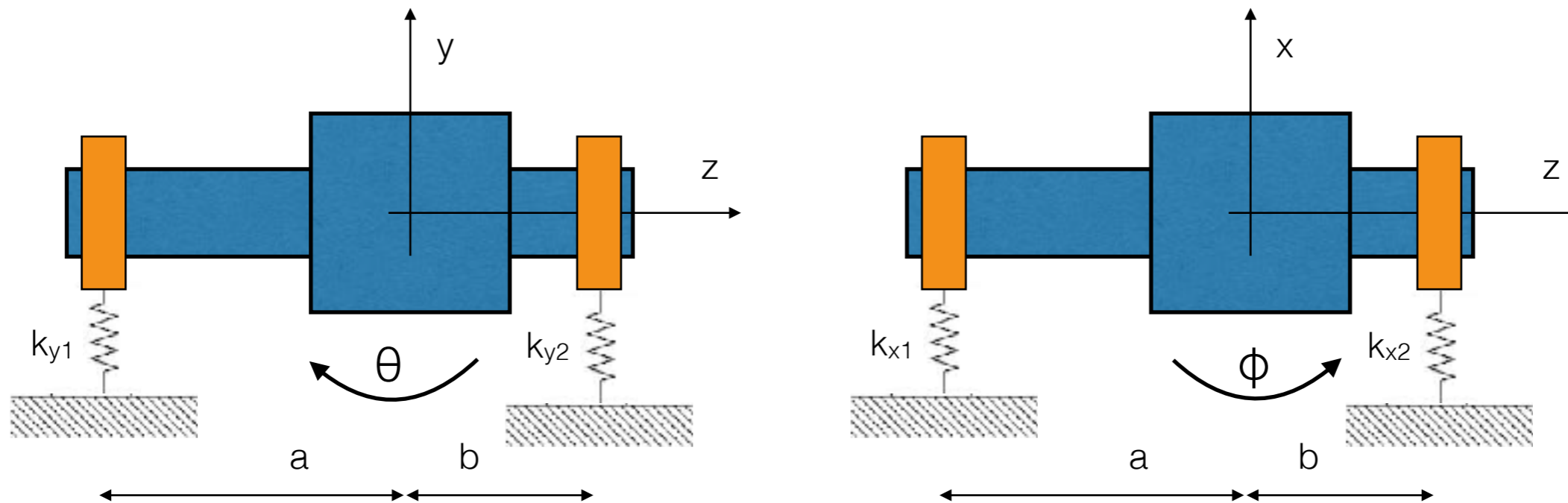
..supponiamo che i cuscinetti non abbiano rigidità angolare (short bearings),
e che si possano muovere in direzione orizzontale e verticale..

e in queste direzioni hanno due rigidità (possono essere uguali o diverse)

..possiamo usare le equazioni di Lagrange o scrivere le equazioni
del moto grazie alla legge di Newton..



Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili



Rispetto al centro di massa,
scriviamo le equazioni di equilibrio...

traslazione / bounce
rotazione / tilt

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_{x1}(x - a\phi) + k_{x2}(x + b\phi) = 0 \\ m\ddot{y} + k_{y1}(y + a\theta) + k_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + ak_{y1}(y + a\theta) - bk_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} - ak_{x1}(x - a\phi) + bk_{x2}(x + b\phi) = 0 \end{array} \right.$$

Equilibrio forze in dir x

Equilibrio forze in dir y

Equilibrio momenti attorno θ

Equilibrio momenti attorno ϕ

momenti giroscopici... segni in funzione della regola mano destra

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

linearizzando e riordinando le equazioni in forma matriciale..

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..matrice momenti giroscopici

..semplificando ulteriormente..

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..equazioni generali.. accoppiate (1-4 / 2-3) !

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Bisogna risolvere il sistema di equazioni simultaneamente...

in modo da trovare i modi di vibrazione traslazione (x,y) e rotazionale (θ, ϕ).

si possono analizzare alcuni casi semplici:

Con supporti isotropi / no effetto giroscopico

$$k_{xT} = k_{yT} = k_T$$

$$I_p \Omega = 0$$

1 senza accoppiamento elastico (es a=b)

$$k_{xC} = k_{yC} = k_C = 0$$

2 con accoppiamento elastico

$$k_{xC} \neq k_{yC} \neq 0$$

3 con effetto giroscopico

$$I_p \Omega \neq 0$$

4 con supporti anisotropi / con effetto giroscopico

$$k_{xT} \neq k_{yT} \neq 0$$

$$I_p \Omega \neq 0$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Caso 1 (supporti isotropi / non accoppiamento elastico, a uguale b / no momenti giroscopici)

..si riduce semplifica il sistema di equazioni..

..le equazioni diventano disaccoppiate!

..con l'usuale soluzione di primo tentativo

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = X_o e^{st} \\ y = Y_o e^{st} \\ \theta = \theta_o e^{st} \\ \phi = \phi_o e^{st} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad \text{bounce mode} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} \quad \text{tilt mode} \end{array} \right.$$

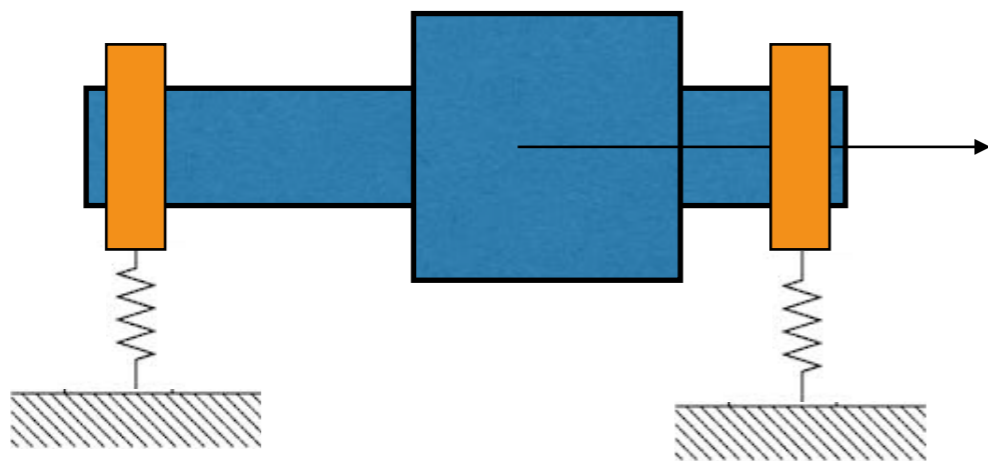
in realtà ci sono 4 soluzioni a due a due complesse coniugate per le traslazioni e per le rotazioni... se ne riportano solo due..

NB in funzione della rigidità dei supporti (k) e delle caratteristiche del sistema (m, I) il modo di bounce può essere prima o dopo quello di tilt e viceversa!

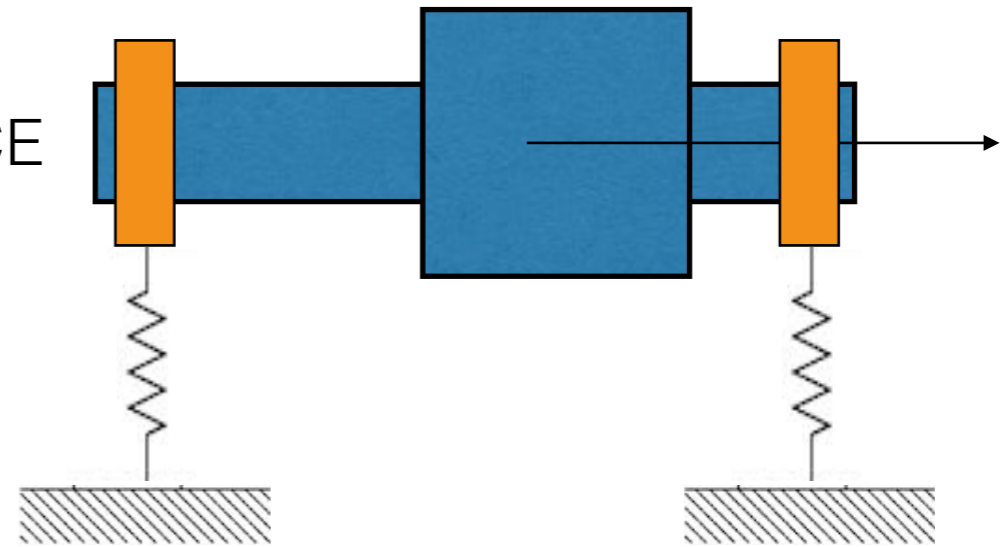
**NB in realtà ci sono 4DOF
=> 8 radici... a due a due
complesse e coniugate**

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

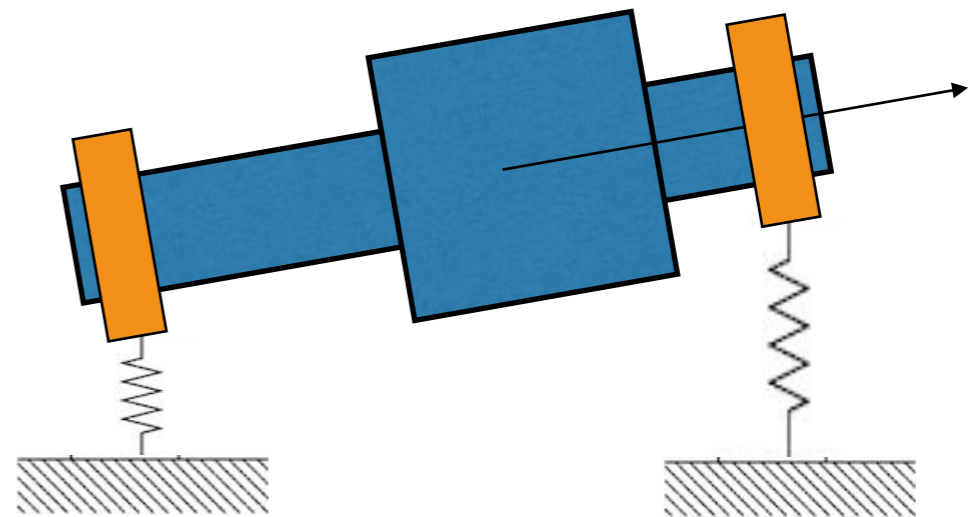
..in entrambi i piani..



Modo BOUNCE



Modo TILT



Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Caso 2 (supporti isotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / no momenti giroscopici)

..in questo caso c'e una dissimmetria del rotore..

..con l'usuale soluzione di primo tentativo..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \theta_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R) \phi_0 + k_C X_0 = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{le equazioni del moto} \\ \text{sono ora accoppiate..} \\ \text{bisogna risolverle assieme} \end{array} \right.$$

isolando X_0 da 1&4..

$$X_0 = -\frac{k_C \phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \phi_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = 0$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

isolando Y_0 da 2&3..

$$Y_0 = \frac{k_C \theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \theta_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = 0$$

sviluppando i termini tra parentesi si ottiene in entrambe i casi la seguente equazione..

$$s^4 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

..le cui radici in s^2 sono..

$$s^2 = - \left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}} = - \left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \gamma$$

..ed in s ..

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 &= j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma} & s_5 = s_6 &= -j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma} \\ s_3 = s_4 &= j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma} & s_7 = s_8 &= -j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma} \end{aligned}$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Le radici sono a 2 a 2 complesse coniugate..

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} \end{array} \right.$$

c'è accoppiamento tra traslazione (bounce) e rotazione (tilt)..

$$\left(\begin{array}{c} X_0 \\ \phi_0 \end{array} \right)_{i=1,4} = -\frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = -\frac{k_C}{m s_i^2 + k_T}$$

$$\left(\begin{array}{c} Y_0 \\ \theta_0 \end{array} \right)_{i=2,3} = \frac{I_d s_i^2 + k_R}{k_C} = \frac{k_C}{m s_i^2 + k_T}$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Caso 3.1 (supporti isotropi / no accoppiamento elastico, a uguale b / con momenti giroscopici)

Le equazioni si semplificano ..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_R \phi = 0 \end{array} \right.$$

..con l'usuale soluzione di primo tentativo si cercano le soluzioni per le frequenze naturali..

dalle equazioni 1 e 2 $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$

**NB in realtà ci sono 4DOF
=> 8 radici... a due a due
complesse e coniugate**

dalle equazioni 3 e 4 (accoppiate)

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega s \phi_0 = 0 \\ -I_p \Omega s \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

eliminando θ_0 e ϕ_0 da queste due equazioni di ottiene:

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0$$

facendone la radice quadrata

$$I_d s^2 + k_R = \pm I_p \Omega s$$

$$I_d s^2 \mp I_p \Omega s + k_R = 0$$

si ottengono le soluzioni in $s..$ e da qui le pulsazioni naturali

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

..queste dipendono da Ω !
ed hanno una il segno - ed
una il segno +..

..nel diagramma di Campbell,
le freq. naturali non son
più rette orizzontali, ma curve!!

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Dalle equazioni 3 e 4 si ottiene anche il rapporto tra le rotazioni in funzione del modo di vibrazione:

$$\left(\frac{\theta_0}{\phi_0} \right)^{(i)} = - \frac{I_p \Omega s_i}{(I_d s_i^2 + k_R)} = \frac{(I_d s_i^2 + k_R)}{I_p \Omega s_i}$$

Il rapporto delle rotazioni è del tipo $-\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

rapporto soddisfatto se $\frac{A}{B} = \pm j$ il segno dipende dal segno di $(I_d s_i^2 + k_R)$

da queste caratteristiche dipende se il modo sarà di tipo forward whirl o backward whirl (concorde o discorde al verso di rotazione del rotore)

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Caso 3.2 (supporti isotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / con momenti giroscopici)

Le equazioni del moto di partenza si semplificano..

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{array} \right. \quad (\text{accoppiate e con i termini giroscopici})$$

Si usano le solite le equazioni di primo tentativo..

$$\left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T) X_0 + k_C \phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T) Y_0 - k_C \theta_0 = 0 \\ -k_C Y_0 + (I_d s^2 + k_R) \theta_0 + I_p \Omega \phi_0 = 0 \\ k_C X_0 - I_p \Omega \theta_0 + (I_d s^2 + k_R) \phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Analogamente a quanto fatto nei casi precedenti..

..da 1 e 2 si estraggono Φ_0 e θ_0 ..

..si sostituiscono in 3 e 4..

.. da 3 e 4 si eliminano X_0 e Y_0 ..

$$\left\{ \begin{array}{l} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C\phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C\theta_0 = 0 \\ -k_C Y_0 + (I_d s^2 + k_R)\theta_0 + I_p \Omega \phi_0 = 0 \\ k_C X_0 - I_p \Omega \theta_0 + (I_d s^2 + k_R)\phi_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\dots \left\{ (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 \right\}^2 + \left\{ I_p \Omega s (ms^2 + k_T) \right\}^2 = 0$$

sviluppando i prodotti riordinando si ottiene l'equazione caratteristica, le cui soluzioni sono le frequenze naturali di vibrazione...

$$s^4 \mp j \left(\frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left(\frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

Caso 4 (supporti anisotropi / accoppiamento elastico, a diverso b / con momenti giroscopici)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y - k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_{yC} y + k_{yR} \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_{xC} x + k_{xR} \phi = 0 \end{cases}$$

o in forma matriciale...

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

o in forma canonica...

$$q = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rotodinamica - flessionale / rotore rigido su supporti flessibili

La soluzione che deve risolvere simultaneamente tutte le equazioni è del tipo:

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = \{0\}$$

..classico problema agli autovalori..

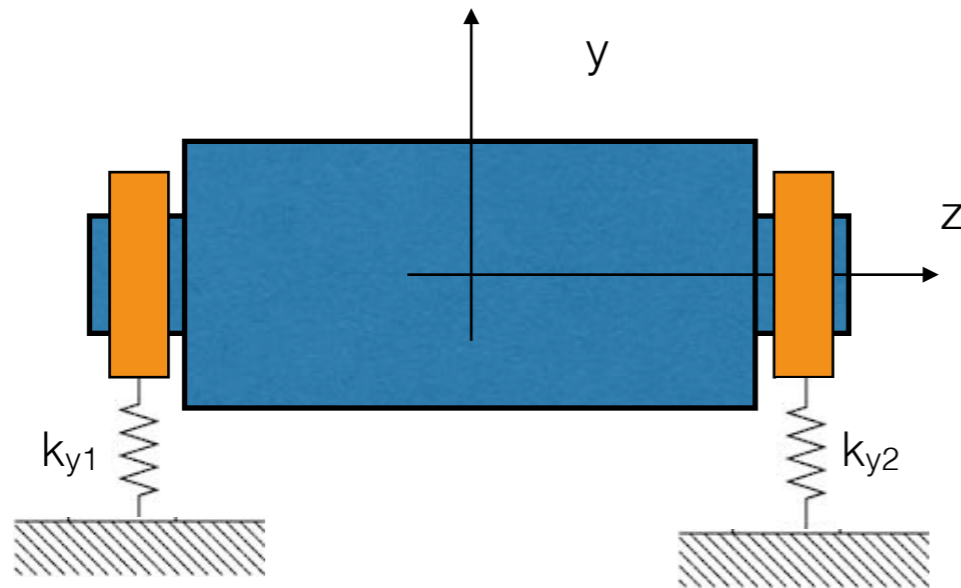
..4 gradi di libertà..

..8 radici a 2 a 2 complesse coniugate..

$$\begin{cases} s_{i=1..4} = +j\omega_{i=1..4} \\ s_{i=5..8} = -j\omega_{i=1..4} \end{cases}$$

Un modo di bounce ed un modo di tilt per ogni piano..
ed il loro complesso coniugato!

Rotodinamica - flessionale / Esempio 1



Rotore

lunghezza $L=0.5\text{m}$
 raggio $r=0.2\text{m}$
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$
 $k_x=k_y=1\text{MN/m}$

Condizioni

Iniziali

$X_0=1\text{mm}$
 $Y_0=0.5\text{mm}$
 $V_{x0}=30\text{mm/s}$

Quali sono le Frequenze naturali ?
 Come si calcola la risposta del rotore?

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} = 122.68 \text{ kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{ kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{ kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche:

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125 \text{ kNm}$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 1

Esempio 1 (supporti isotropi / non accoppiamento elastico, a uguale b / no momenti giroscopici)

Direttamente dalle formule viste:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad / s} \\ \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} = 208.97 \text{ rad / s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_3 = f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 33.26 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

con le condizioni iniziali assegnate

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) \\ y = B_1 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ \dot{x} = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ \dot{y} = B_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(\frac{30}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \\ y = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 t) \end{array} \right.$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 1

Plottando i risultati degli spostamenti ottenuti in x e y si ottiene il diagramma orbitale e lo spostamento nelle direzioni coordinate del baricentro

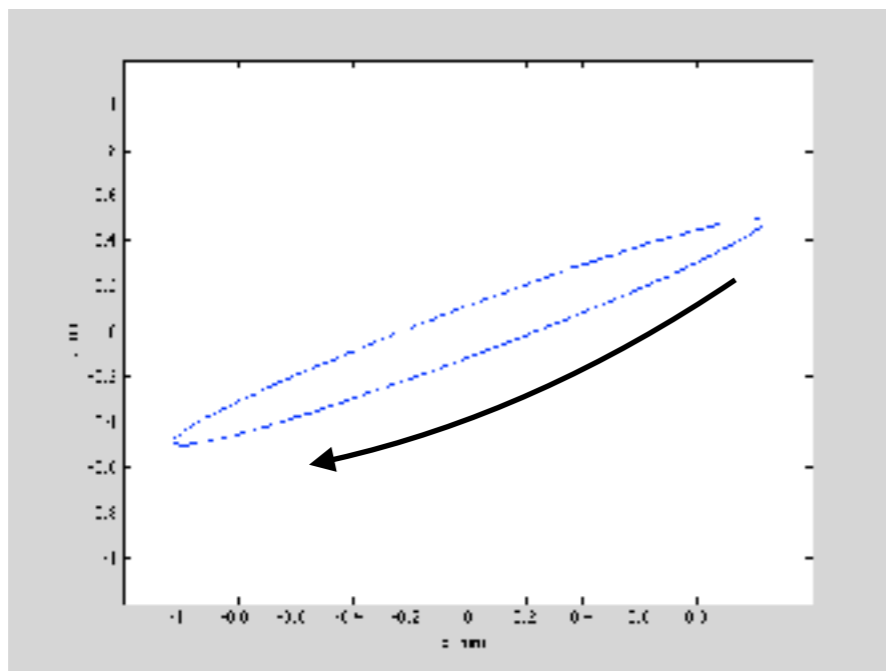
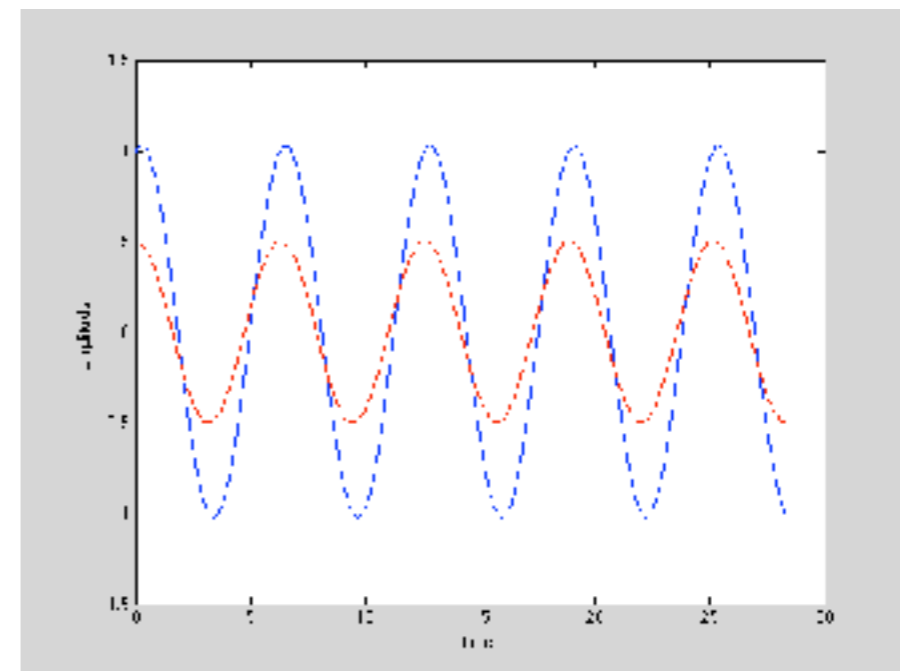


diagramma orbitale
spostamento del baricentro
visto lungo asse z



proiezioni degli spostamenti
del baricentro sul piano
XZ (blu) e YZ (rosso)

Rotodinamica - flessionale / Esempio 2

Esempio 2 (supporti isotropi / con accoppiamento elastico / no momenti giroscopici)

Rotore

lunghezza $L=0.5\text{m}$

raggio $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_1=1\text{MN/m}$

$k_2=1.3\text{MN/m}$

Quali sono le Frequenze naturali ?
Come si calcola la risposta del rotore?

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} = 122.68 \text{ kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{ kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{ kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75 \text{ kNm}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75 \text{ kNm}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}} 16.236 \text{ rad}^2 / \text{s}^2$$

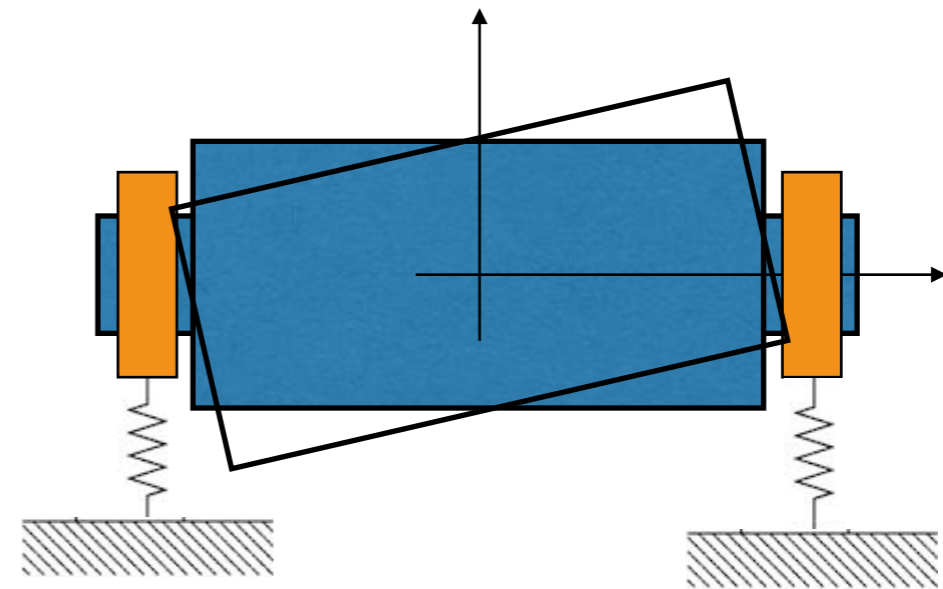
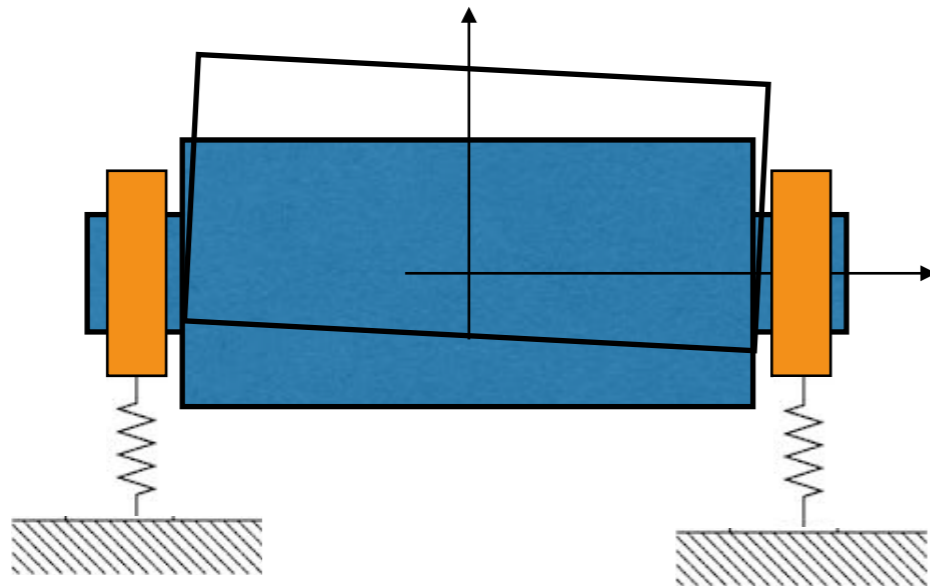
Rotodinamica - flessionale / Esempio 2

Direttamente dalle formule viste:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} - \gamma} = 135.08 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = \omega_4 &= \sqrt{\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} + \gamma} = 225.21 \text{ rad/s} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 = f_2 &= \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 21.50 \text{ Hz} \\ f_3 = f_4 &= \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 35.84 \text{ Hz} \end{aligned} \right.$$

le frequenze si alzano leggermente..



Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

Esempio 3 (supporti isotropi / senza - con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) a 4000rpm

Rotore (supporti uguali)

lunghezza $L=0.5\text{m}$

raggio $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_x=k_y=1\text{MN/m}$

Rotore (supporti differenti)

lunghezza $L=0.5\text{m}$

raggio $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_1=1\text{MN/m}$

$k_2=1.3\text{MN/m}$

Calcolo velocità in radianti $\Omega = 4000 \frac{2\pi}{60} = 418.88 \text{ rad / s}$

Calcolo proprietà elastiche

$$k_T = 2000 \text{ kNm}$$

$$k_C = 0 \text{ kNm}$$

$$k_R = 125 \text{ kNm}$$

$$k_T = 2300 \text{ kNm}$$

$$k_C = 75 \text{ kNm}$$

$$k_R = 143.75 \text{ kNm}$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

Direttamente dalle formule viste:

(senza accoppiamento)

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 168.85 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 258.61 \text{ rad/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_3 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 26.87 \text{ Hz} \\ f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_4 = 41.16 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

(con accoppiamento)

$$s^4 \mp j \left(\frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left(\frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left(\frac{k_T I_p}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

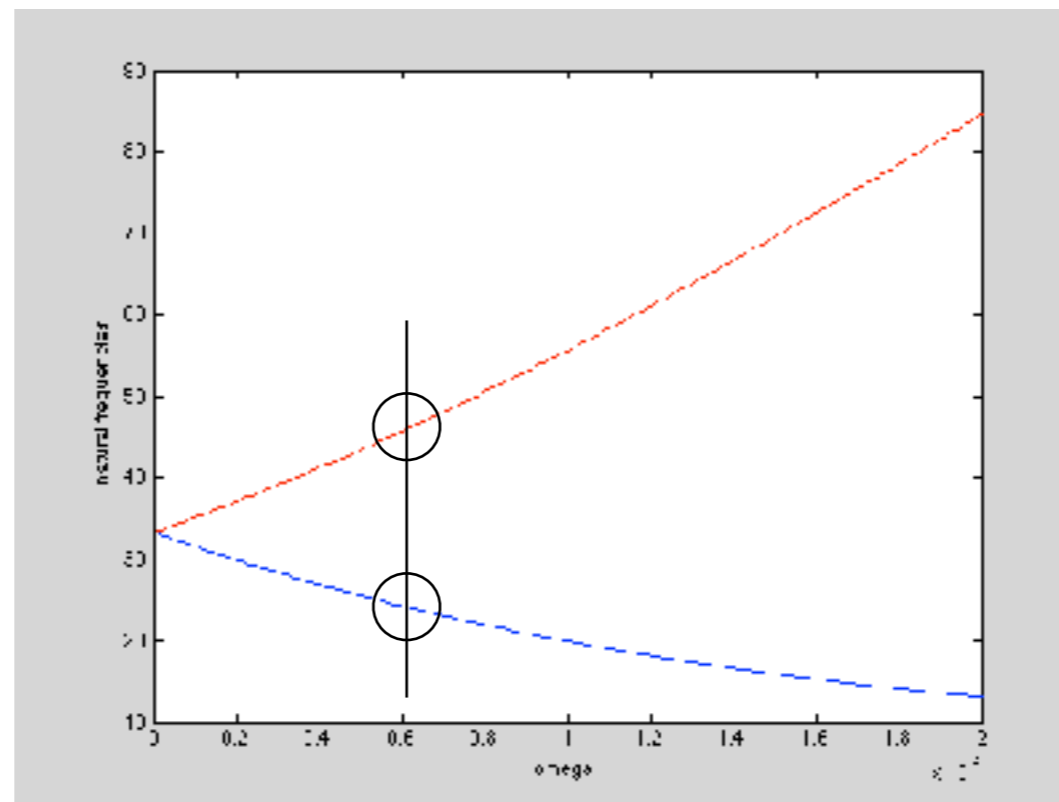
$$s^4 \mp j 89.76 s^3 + 68966 s^2 \mp j 1682800 s + 925.48 \times 10^6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = 21.33 \text{ Hz} \\ f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_2 = 21.58 \text{ Hz} \\ f_3 = \frac{1}{2\pi} \omega_3 = 29.58 \text{ Hz} \\ f_4 = \frac{1}{2\pi} \omega_4 = 43.62 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 3

.. è quindi possibile plottare l'andamento delle frequenze naturali in funzione della velocità di rotazione dell'albero...

Variazione di ω_3 ω_4
tra 0 e 2000 rad/s



concorde con Ω

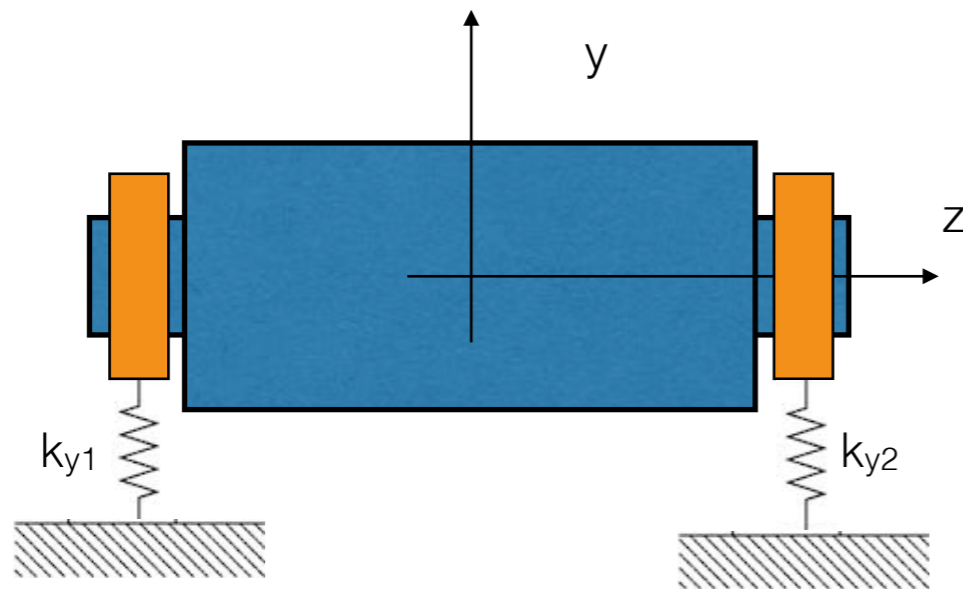
Forward Whirl

Backward Whirl

discorde con Ω

Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

Esempio 4 (supporti isotropi - anisotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici)



Rotore

lunghezza $L=0.5\text{m}$

raggio $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

Esempio 4.1 (supporti isotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) stazionario

$$k_1 = 1\text{MN/m}$$

$$k_2 = 1.3\text{MN/m}$$

Esempio 4.2 (supporti anisotropi / con accoppiamento elastico / momenti giroscopici) stazionario, a 4000 e 8000 rpm

$$k_{x1} = 1\text{MN/m} \quad k_{x2} = 1.3\text{MN/m}$$

$$k_{y1} = 1.1\text{MN/m} \quad k_{y2} = 1.4\text{MN/m}$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

4.1 Calcolo le matrici di massa, rigidezza e giroscopica:

$$M = \begin{bmatrix} 122.68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8625 \end{bmatrix} \quad K = 10^3 \begin{bmatrix} 2.30 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 2.30 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 143.75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 143.75 \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6134 \\ 0 & 0 & 0.6134 & 0 \end{bmatrix}$$

ai quali corrispondono le seguenti soluzioni nel caso 4.1
... (e le loro complesse coniugate)

$$\omega_1 = 134.0 \text{ rad / s} \quad \omega_2 = 135.6 \text{ rad / s} \quad \omega_3 = 185.9 \text{ rad / s} \quad \omega_4 = 274.0 \text{ rad / s}$$
$$f_1 = 21.33 \text{ Hz} \quad f_2 = 21.58 \text{ Hz} \quad f_3 = 29.58 \text{ Hz} \quad f_4 = 43.62 \text{ Hz}$$

Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

similmente per il caso 4.2....:

4.2 stazionario:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 135.08 \text{ rad / s} & \omega_2 = 141.13 \text{ rad / s} & \omega_3 = 225.21 \text{ rad / s} & \omega_4 = 234.62 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.50 \text{ Hz} & f_2 = 22.46 \text{ Hz} & f_3 = 35.85 \text{ Hz} & f_4 = 37.34 \text{ Hz} \end{array}$$

4.2 @4000rpm:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 134.74 \text{ rad / s} & \omega_2 = 140.94 \text{ rad / s} & \omega_3 = 190.15 \text{ rad / s} & \omega_4 = 278.94 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.44 \text{ Hz} & f_2 = 22.43 \text{ Hz} & f_3 = 30.26 \text{ Hz} & f_4 = 44.40 \text{ Hz} \end{array}$$

4.2 @8000rpm:

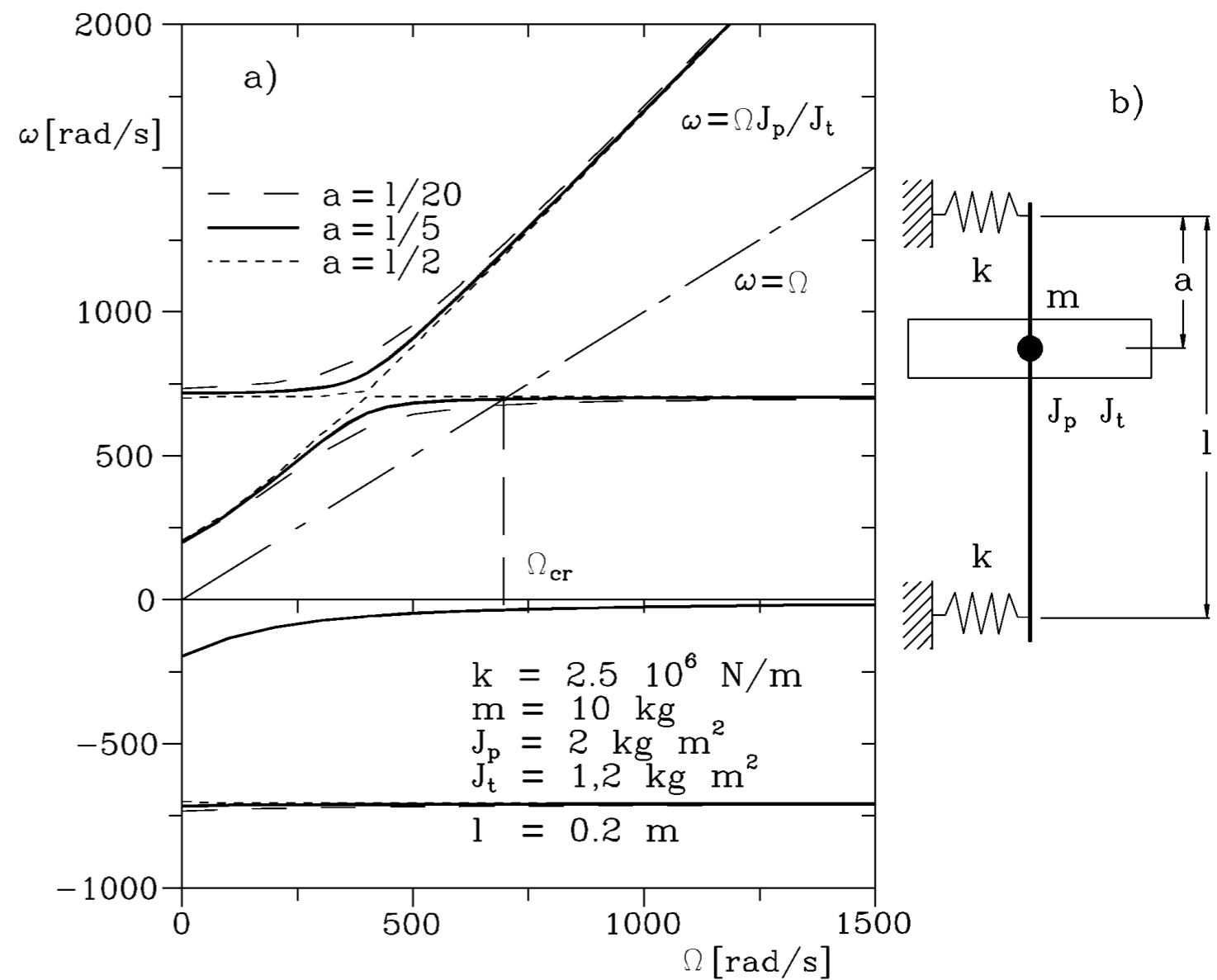
$$\begin{array}{cccc} \omega_1 = 137.87 \text{ rad / s} & \omega_2 = 140.16 \text{ rad / s} & \omega_3 = 161.05 \text{ rad / s} & \omega_4 = 336.07 \text{ rad / s} \\ f_1 = 21.13 \text{ Hz} & f_2 = 22.30 \text{ Hz} & f_3 = 25.63 \text{ Hz} & f_4 = 53.49 \text{ Hz} \end{array}$$

si osservi come cambiano i valori... NB in maniera NON lineare!!!

Rotodinamica - flessionale / Esempio 4

Questa è la ragione per cui è necessario calcolare i valori delle frequenze naturali alle diverse velocità di rotazione Ω ! (ed ai diversi valori di rigidità dei supporti)

Diagramma di Campbell



Rotodinamica - flessionale / effetto dello smorzamento

Se in parallelo alle rigidità si mettono anche degli smorzatori, nel diagramma di corpo rigido, bisognerà aggiungere le forze dissipative..

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x1} = k_{x1}(x - a\phi) + c_{x1}(\dot{x} - a\dot{\phi}) \\ f_{x2} = k_{x2}(x - b\phi) + c_{x2}(\dot{x} - b\dot{\phi}) \\ f_{y1} = k_{y1}(y - a\theta) + c_{y1}(\dot{y} - a\dot{\theta}) \\ f_{y2} = k_{y2}(y - b\theta) + c_{y2}(\dot{y} - b\dot{\theta}) \end{array} \right.$$

..con le similari convenzioni..

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_{xT} = c_{x1} + c_{x2} & c_{yT} = c_{y1} + c_{y2} \\ c_{xC} = -ac_{x1} + bc_{x2} & c_{yC} = -ac_{y1} + bc_{y2} \\ c_{xR} = a^2c_{x1} + b^2c_{x2} & c_{yR} = a^2c_{y1} + b^2c_{y2} \end{array} \right.$$

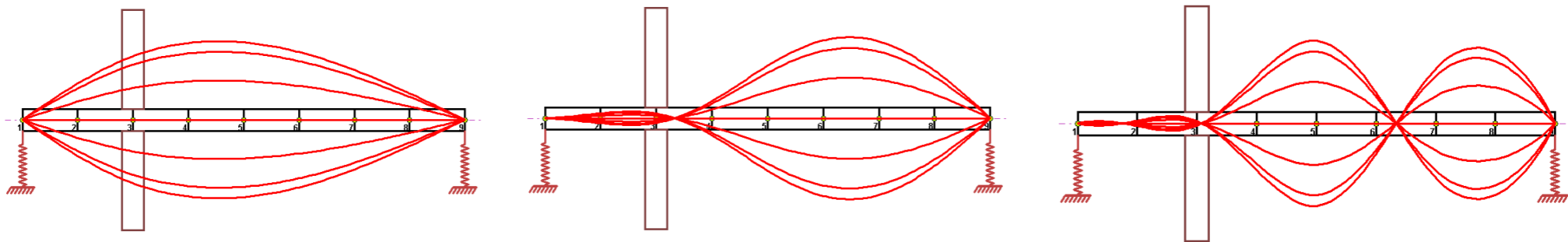
$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + c_{xT}\dot{x} + c_{xC}\dot{\phi} + k_{xT}x + k_{xC}\phi = 0 \\ m\ddot{y} + c_{yT}\dot{y} + c_{yC}\dot{\theta} + k_{yT}y + k_{yC}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} - c_{yC}\dot{y} + c_{yR}\dot{\theta} - c_{yC}y + k_{yR}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xC}\dot{x} + c_{yR}\dot{\phi} + k_{xC}x + k_{xR}\phi = 0 \end{array} \right.$$

Si possono poi studiare i diversi casi come fatto precedentemente per i sistemi non smorzati...

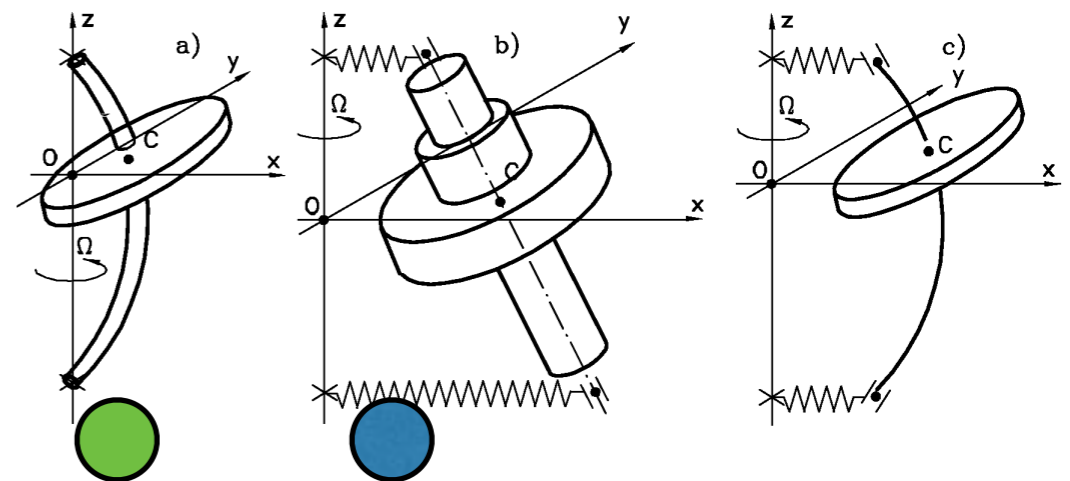
Rotodinamica - flessionale / rotori flessibili

..ci siamo concentrati su rotori rigidi e supporti flessibili ● ...
 ma esiste la possibilità di considerare rotori flessibili e supporti rigidi ● ...

.. si procede similmente.. le frequenze naturali saranno associate a
 “modi” flessionali del rotore



.. anche in questo caso ci sarà
 l'effetto dei momenti giroscopici e
 la divisione dei modi (concordi e
 discordi a Ω)



Rotodinamica - flessionale

Riassumendo:

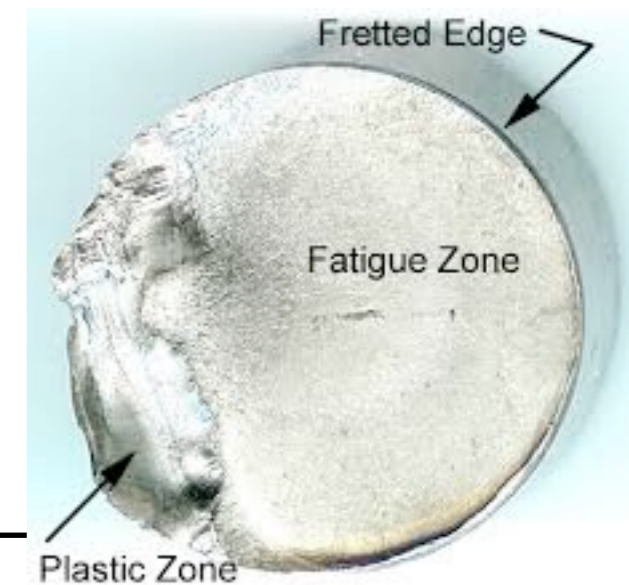
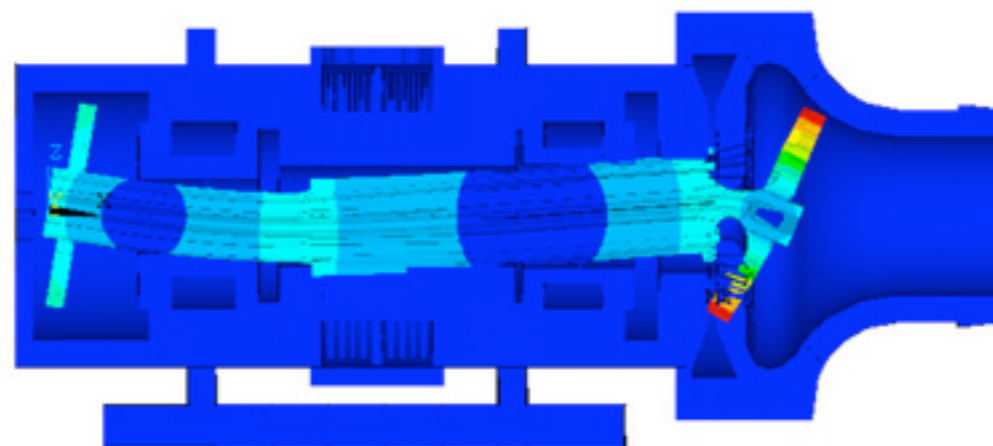
I rotori hanno modi naturali di vibrazione..

I modi di vibrazione dipendono dalle

- caratteristiche del rotore
- caratteristiche dei supporti
- velocità di rotazione del rotore..

I modi di vibrazione devono essere lontani dalla velocità di utilizzo del rotore..

altrimenti si amplificano le deformazioni del rotore stesso
> contatti, stress, rotture..



Rotodinamica - flessionale

I rotori però solitamente sono più complessi e la rappresentazione finora utilizzata non basta...

bisogna estendere l'analisi a sistemi contenenti più elementi..

questi sono

collegati tra loro con elementi rigidi..

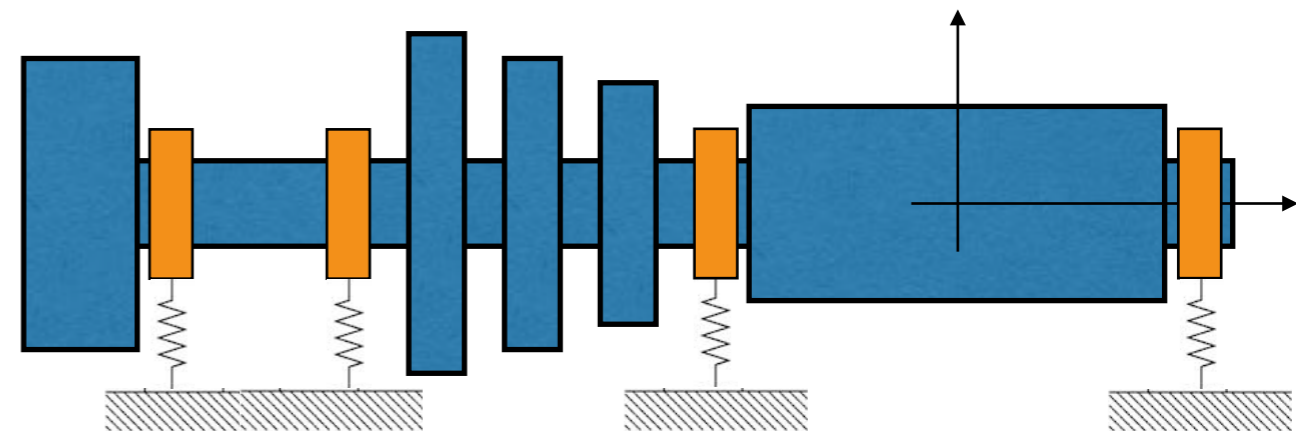
supportati da cuscinetti..

soggetti a forzanti esterne e meccanismi dissipativi..

..

Bisogna trovare il modo di calcolare i modi di vibrare anche in queste condizioni.. tracciare il diagramma di Campbell e verificare che il regime di funzionamento sia lontano dai modi trovati!!

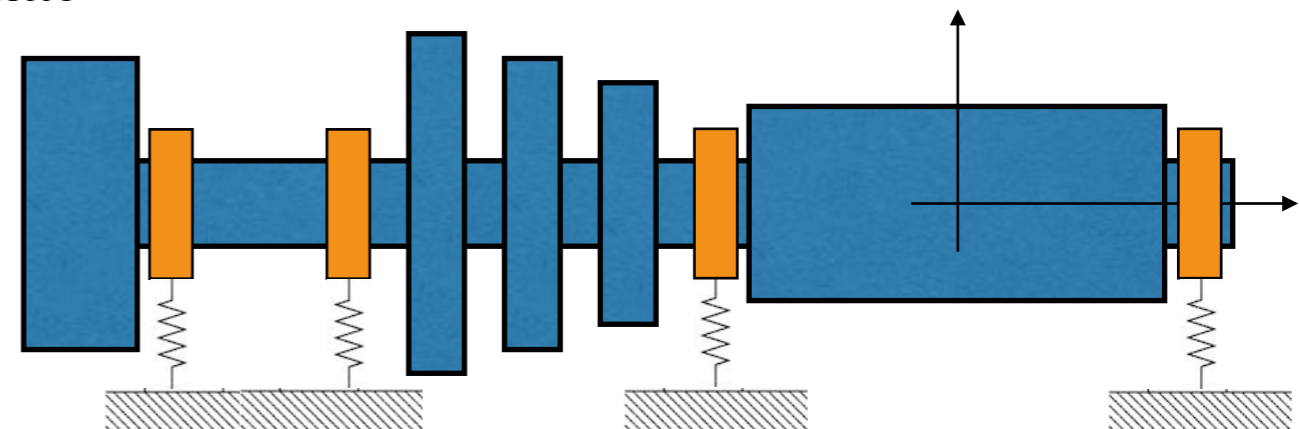
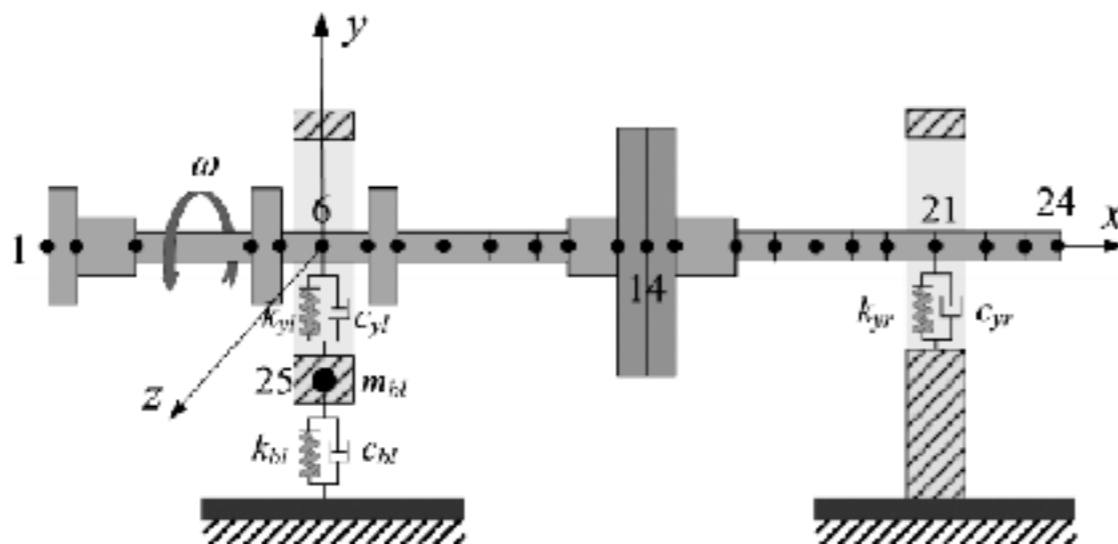
Diventa necessaria una formulazione MDOF.. o FEM..



Rotodinamica - flessionale

I rotori complessi possono essere considerati come l'unione di elementi diversi, opportunamente combinati.

In prima battuta si può immaginare che i rotori subiscano solamente delle vibrazioni trasversali (o laterali), per cui ogni nodo del sistema può avere 4 **coordinate** (due traslazioni e due rotazioni)

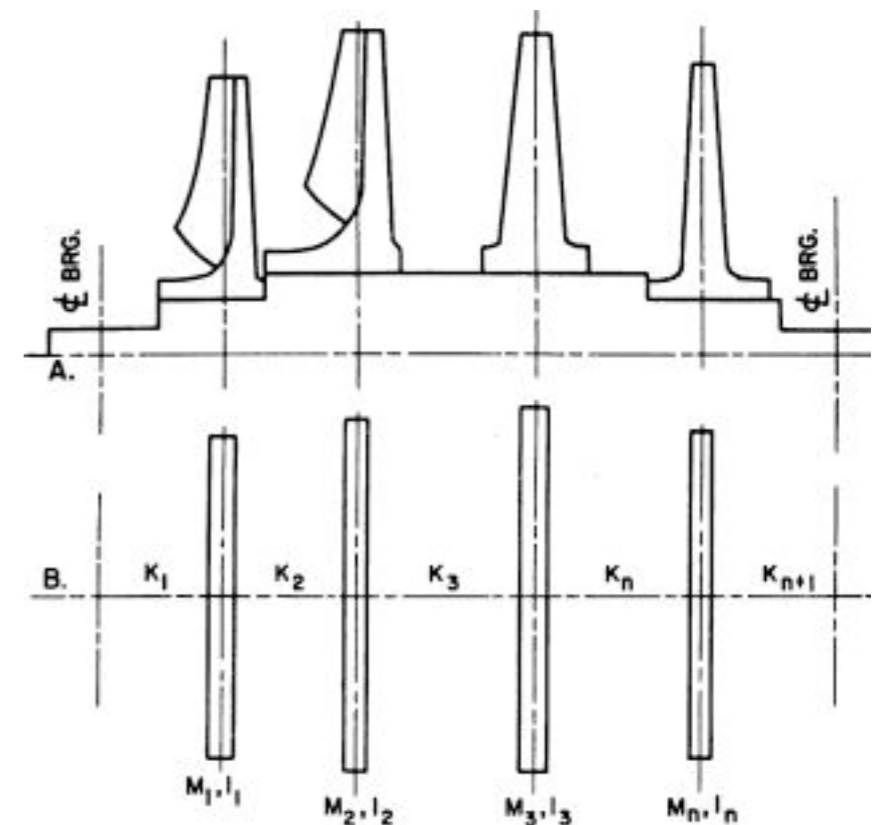


Rotodinamica - flessionale

Gli elementi costitutivi sistema rotante da tenere in considerazione saranno:

- a. I **Volani** (dischi) caratterizzati da momenti d'inerzia polare I_p e diametrale I_d (sono rotori assialsimmetrici.. I_d è unico..). Ciascun volano sarà caratterizzato da un' opportuna matrice inerziale e una per gli effetti inerziali:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$



Per geometrie complesse utilizzare il tensore d'inerzia calcolati dai programmi CAE

Rotodinamica - flessionale

b. le sezioni di **Alberi** intermedie ai volani caratterizzati da masse (inerzie) e rigidzze (flessionali) e dalle rispettive matrici

In funzione della tipologia di analisi si possono utilizzare diverse teorie per studiare la deformazione di questi elementi (Eulero-Bernulli, Timoshencko..), includendo effetti relativi a:

Taglio

Coppia esterna

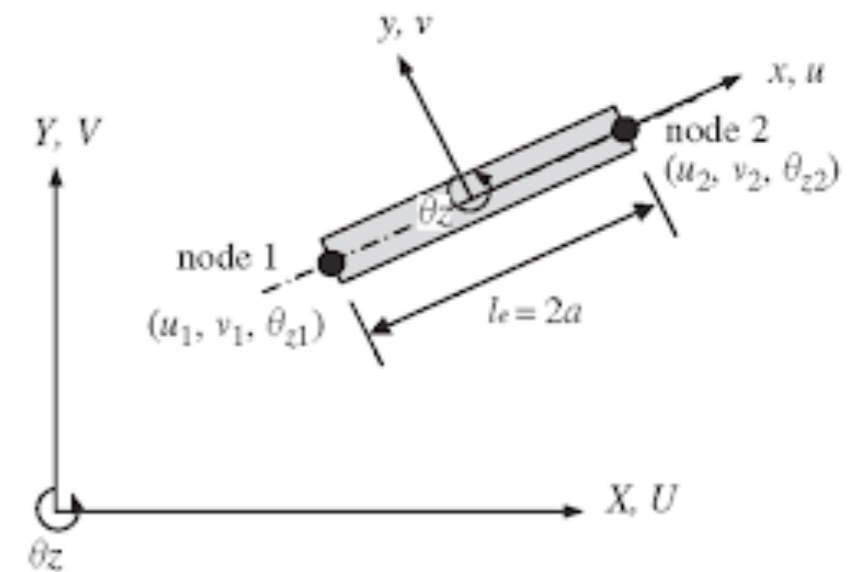
Momenti giroscopici

Sollecitazioni assiali

Variazioni di sezione

..

caratterizzando così le matrici di massa e rigidezza.



Rotodinamica - flessionale

c. I **cuscinetti**, le **tenute**, ed in generale le **iterazioni tra rotore e statore**

Questi elementi sono in generale non lineari e dissipativi (non essendo infinitamente rigidi) e complicano la formulazione delle equazioni di moto.

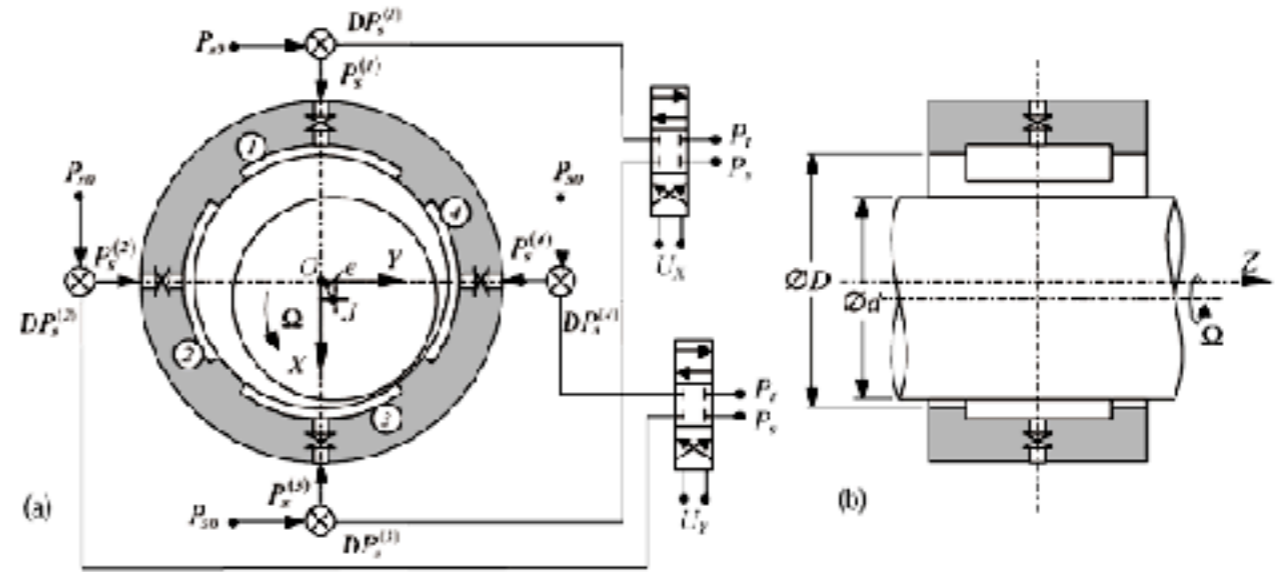
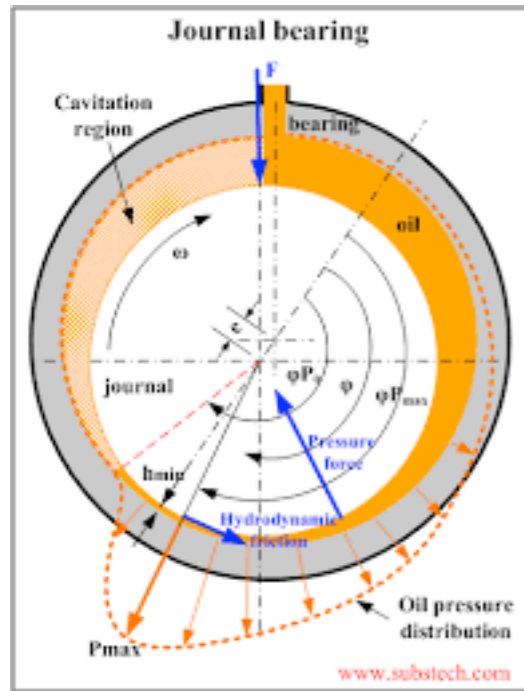
Linearizzando attorno al punto di funzionamento le forze saranno espresse dalla seguente relazione.. ricordando che le rigidezze e gli smorzamenti possono dipendere da Ω ..

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

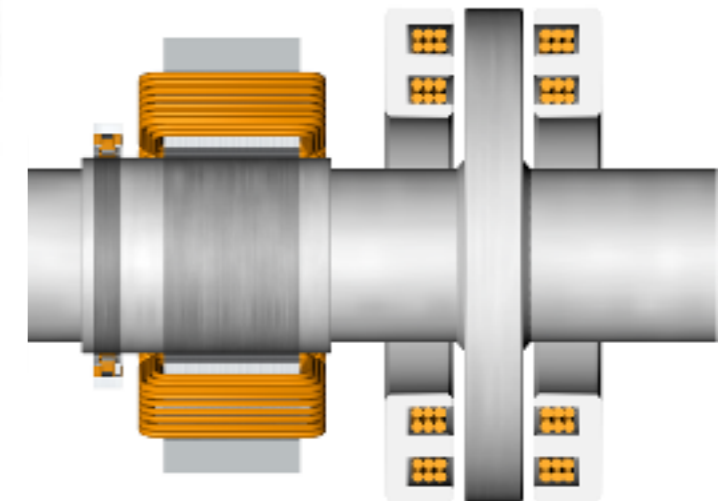
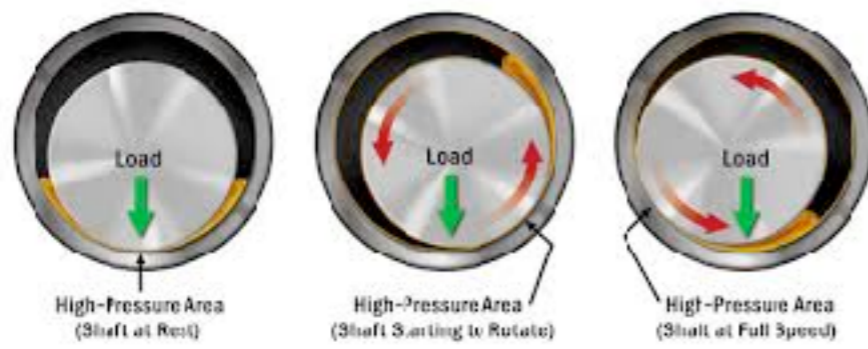
$$Q_s = -[K(\Omega)]\{q\} - [C(\Omega)]\{\dot{q}\}$$

I cuscinetti idrodinamici verranno modellati in funzione delle caratteristiche geometriche (dimensioni) e del fluido (tipo, portata, temperatura..)

Rotodinamica - flessionale

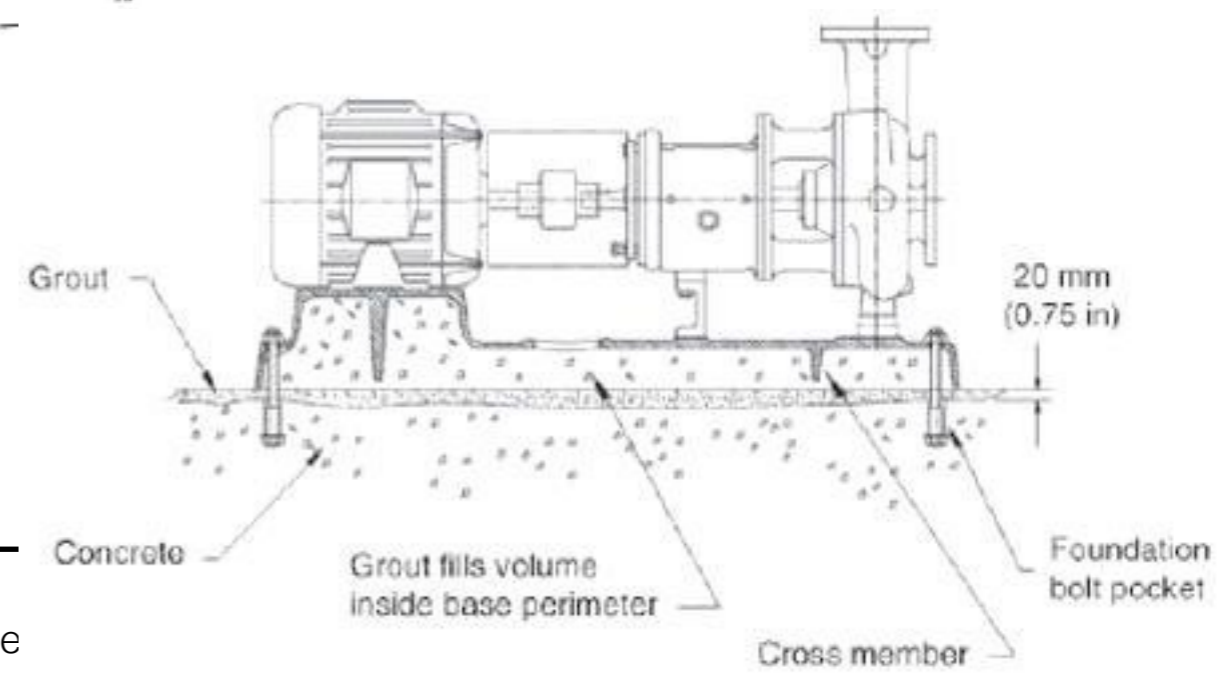
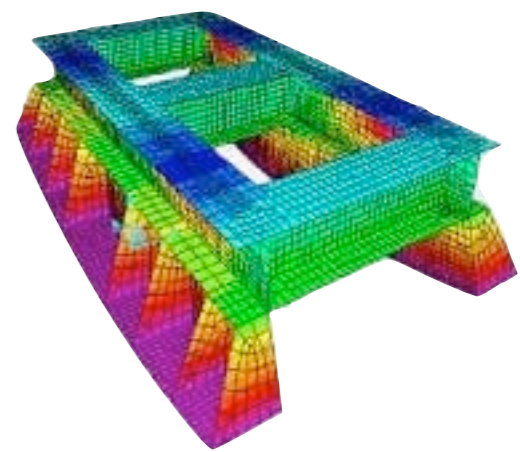
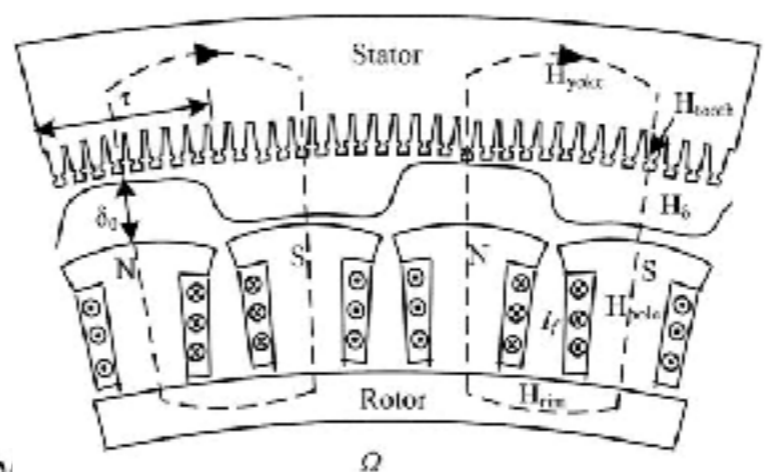
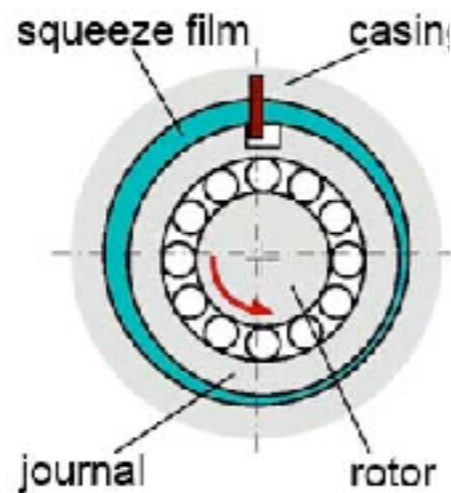
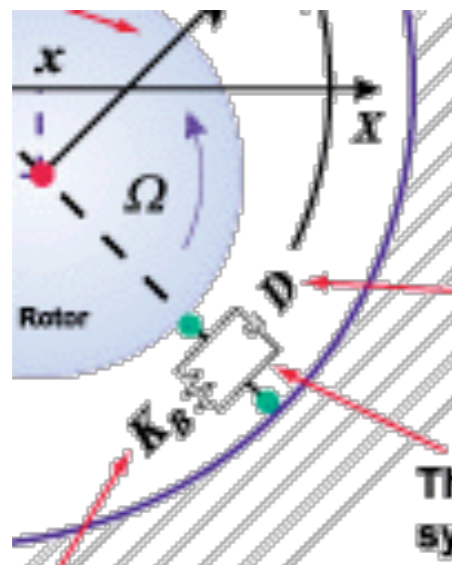


Ogni tipo di supporto avrà una modellazione diversa!



Rotodinamica - flessionale

d.le forze generate da elementi particolari quali ad esempio la forza di **Alford** (instabilità delle turbine a gas), degli **smorzatori a filo d'olio**, dei **campi magnetici sbilanciati**, delle reazioni vincolari dei **supporti** di banco e delle **fondazioni**...

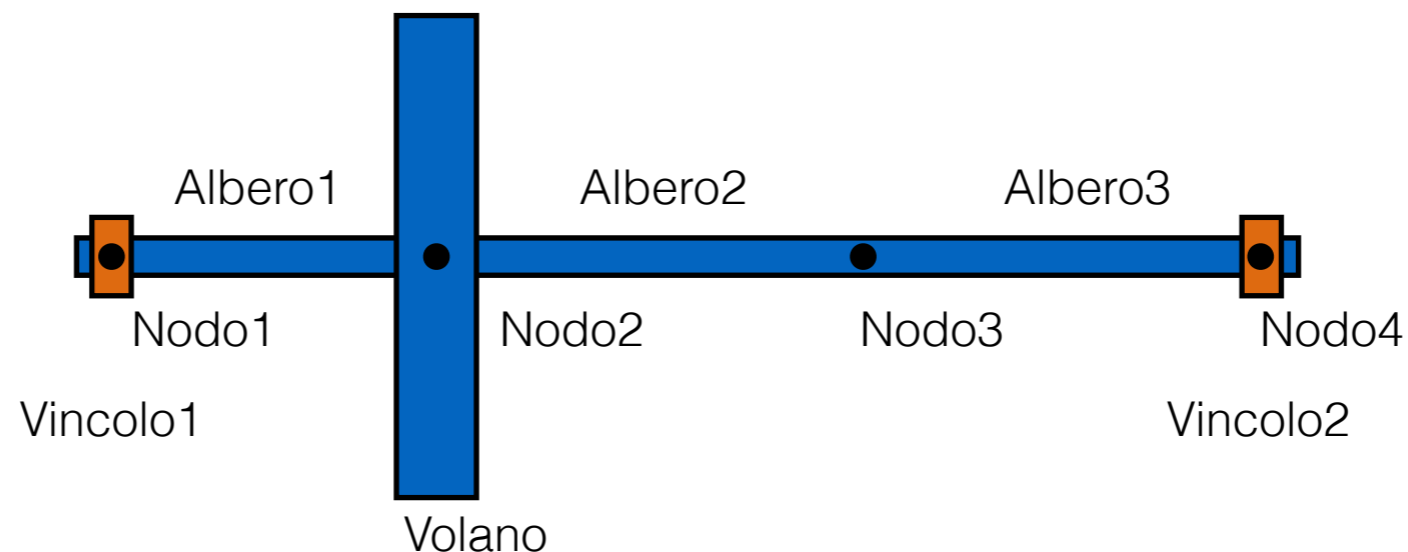
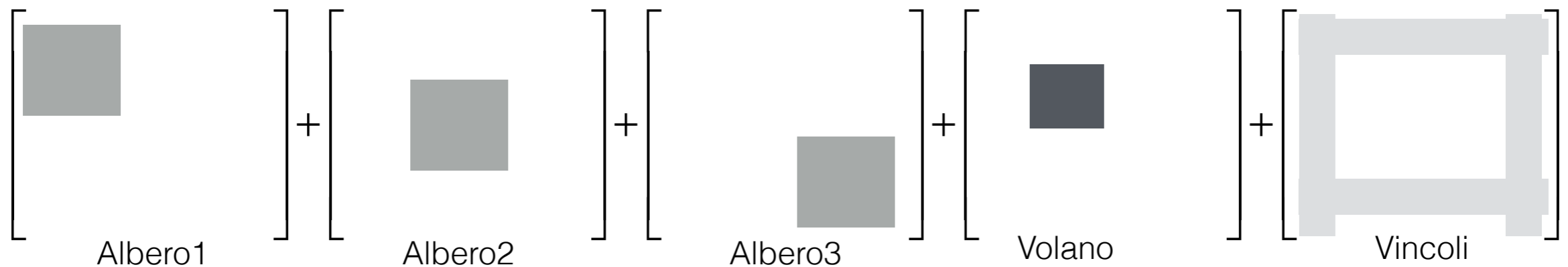


E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

Rotodinamica - flessionale

Una volta note tutte le matrici dei diversi elementi, queste possono essere assemblate a formare il sistema completo..

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$



Rotodinamica - flessionale

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

Dall'equazione del sistema completo si cercheranno gli autovalori (frequenze naturali) e gli autovetture (deformate modali)

$$\begin{bmatrix} C + \Omega G & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A] \frac{d}{dt} \{X\} + [B] \{X\} = \{0\}$$

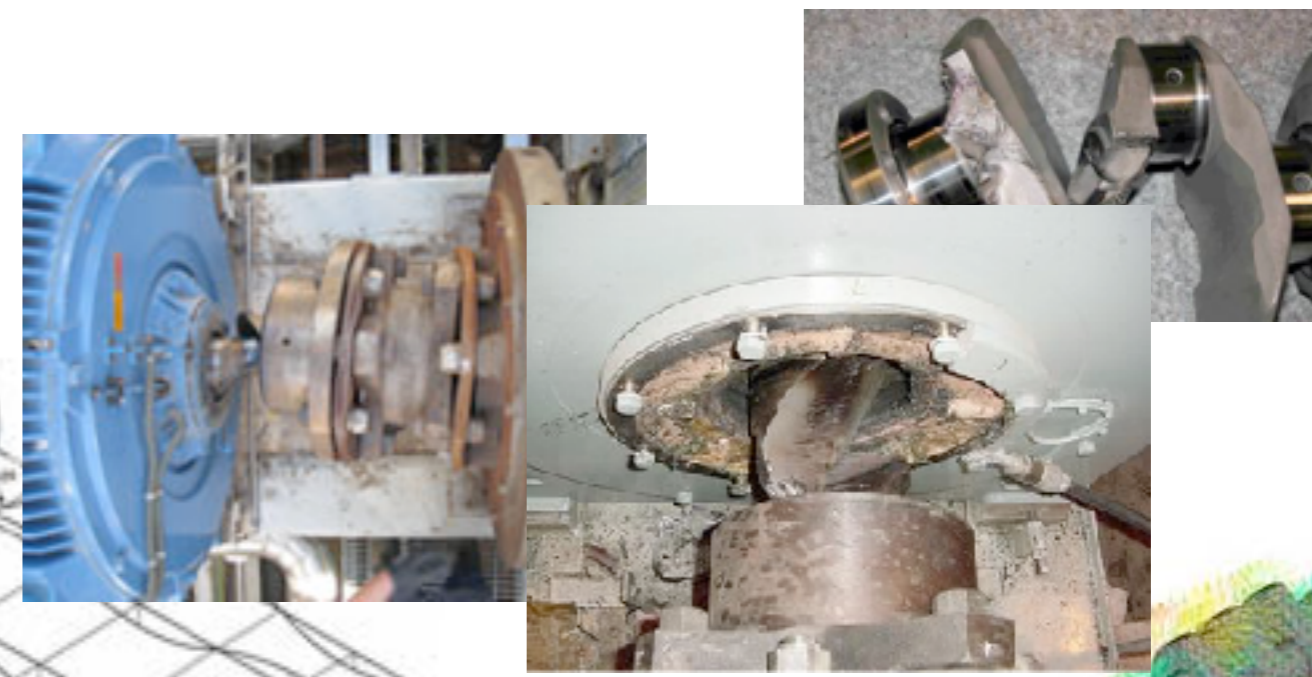
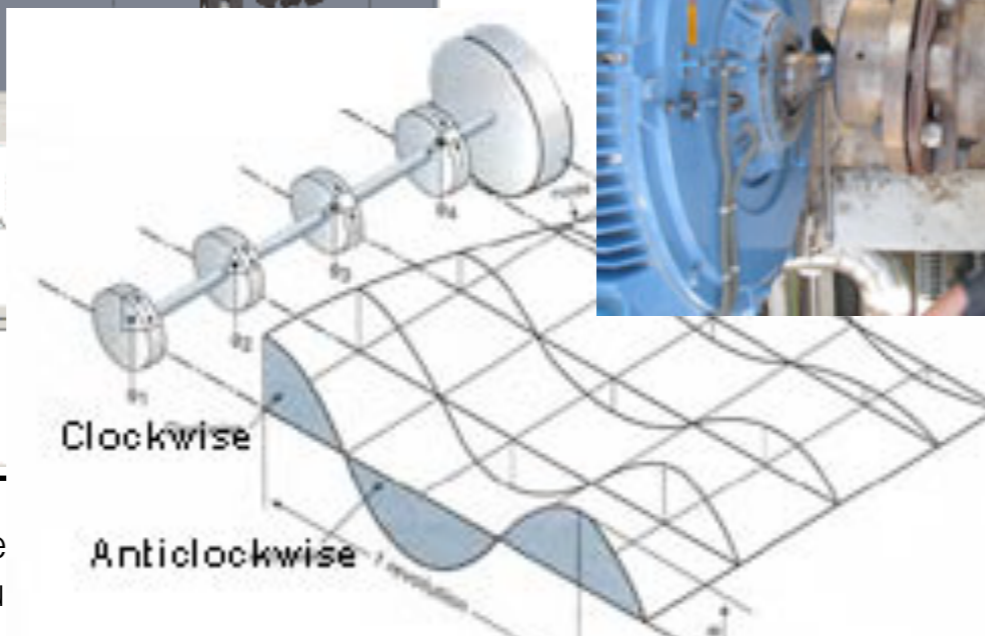
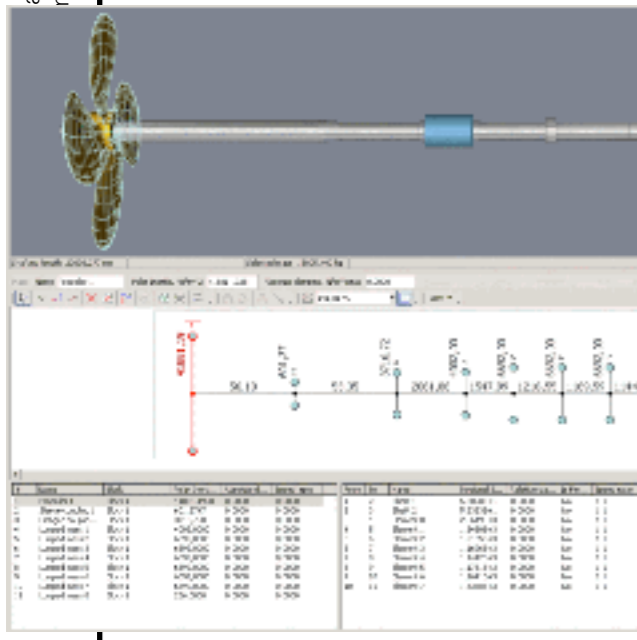
Ricordarsi che le matrici dipendono da Ω !!! e così gli autovalori trovati!
Verificare che questi siano lontani dalle frequenze di funzionamento del rotore!!

Rotodinamica - torsionale

Non sempre i rotori subiscono deformazioni laterali, esiste la possibilità che l'asse del rotore resti rettilineo, ma i volani che lo formano ruotino relativamente tra loro.. si parla in questo caso di vibrazioni torsionali.

Sono altrettanto importanti, perché stressano gli elementi del rotore a torsione (alterna) causando problemi di fatica e di rotture.

Diventano particolarmente importanti quanto si connettono macchine differenti (mismatch tra inerzie, rigidità, torcenti..)



Vibrazioni

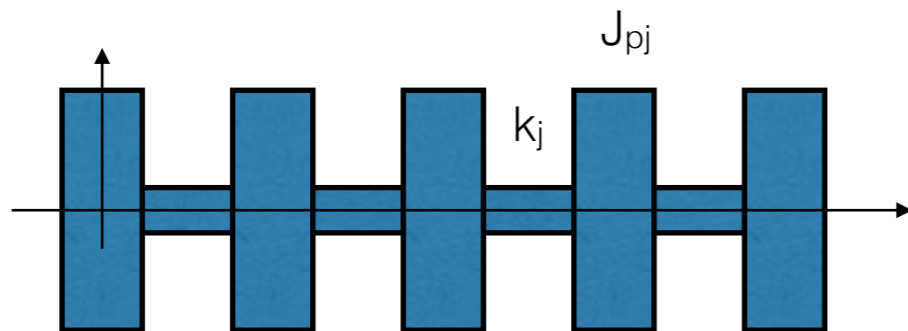
Rotodinamica - torsionale

Anche per lo studio delle vibrazioni torsionali si procede

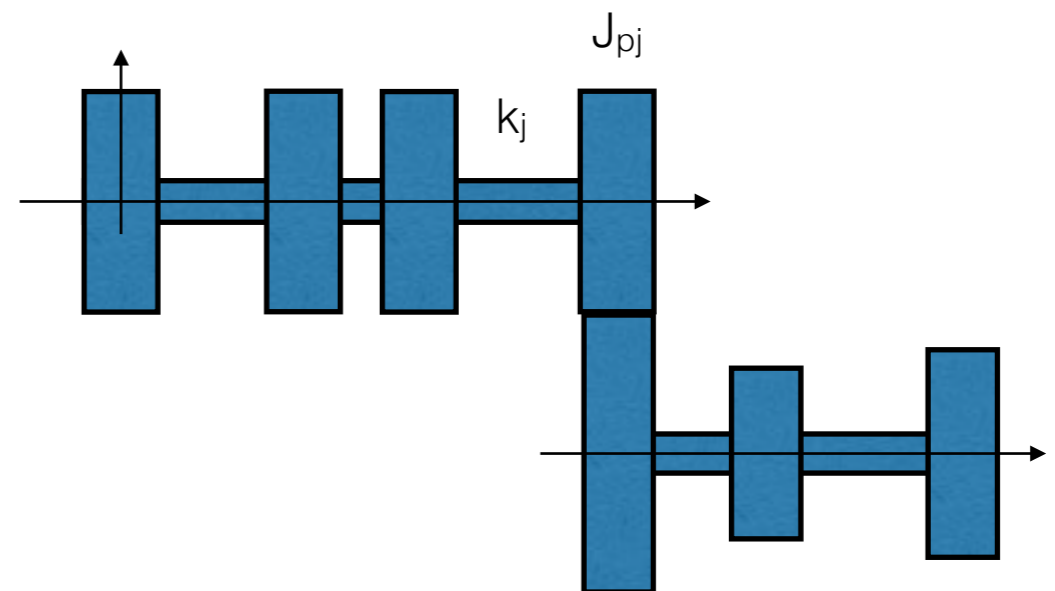
- scrivendo le equazioni di equilibrio dei elementi..
 - ricercando gli autovalori e gli autovettori del sistema di equazioni..
- considerando le opportune matrici di inerzia e rigidezza..

I rotori possono essere classificati in due grandi famiglie per lo studio delle vibrazioni torsionali..

..”in linea”..



..”ramificati”..



Rotodinamica - torsionale

Anche per lo studio delle vibrazioni torsionali si procede

- scrivendo le equazioni di equilibrio dei elementi..
 - ricercando gli autovalori e gli autovettori del sistema di equazioni..
- considerando le opportune matrici di inerzia e rigidezza..

traslazionale

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$k_j = \frac{F}{x} = \frac{EA}{L}$$

$m_j \quad J_{pj}$

$k_j \quad k_{\theta j}$

torsionale

$$M = \begin{bmatrix} I_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p4} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{\theta 0} + k_{\theta 1} & -k_{\theta 1} & 0 & 0 \\ -k_{\theta 1} & k_{\theta 1} + k_{\theta 2} & -k_{\theta 2} & 0 \\ 0 & -k_{\theta 2} & k_{\theta 2} + k_{\theta 3} & -k_{\theta 3} \\ 0 & 0 & -k_{\theta 3} & k_{\theta 3} \end{bmatrix}$$

$$k_{\theta j} = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{L}$$

..formule approssimate...
"Blevins 1979"

Rotodinamica - torsionale

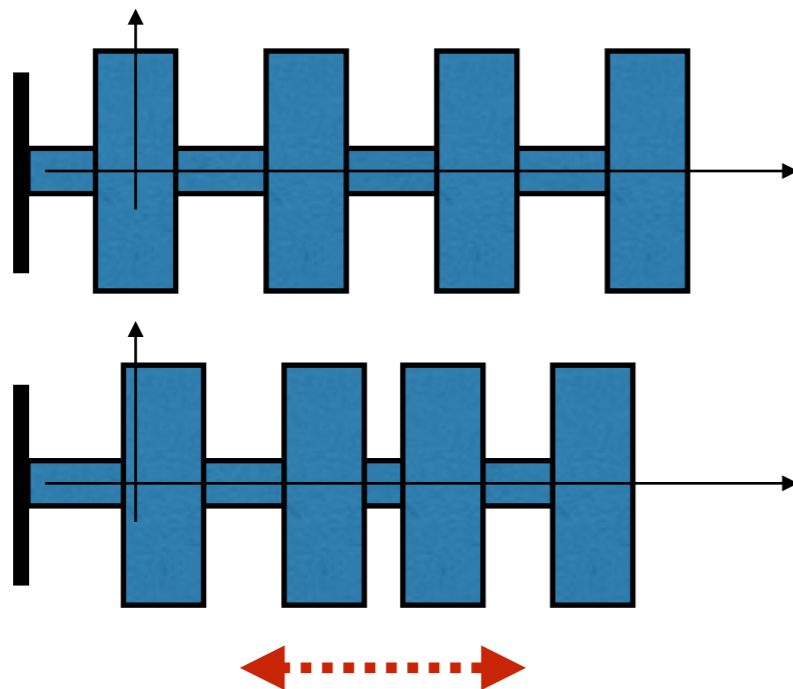
In entrambi i casi si tratta di ricercare gli autovalori del sistema di equazioni:
già visto..

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

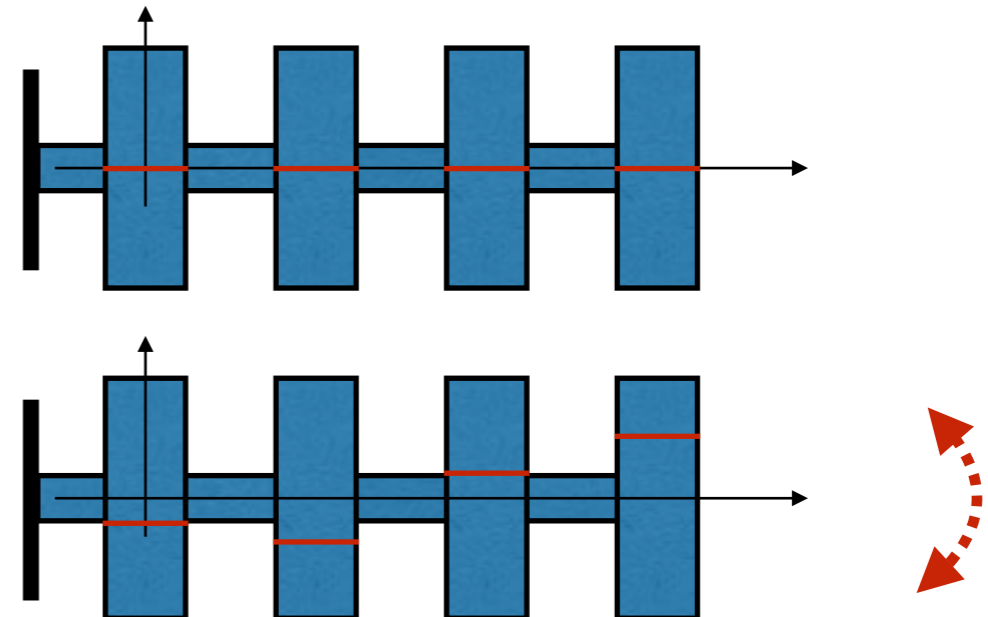
Non ci sono forzanti, smorzamento e effetti giroscopici...
Le matrici possono tener conto di anisotropie..

$$\lambda[M]\{\varphi\} = [K]\{\varphi\}$$

traslazionale

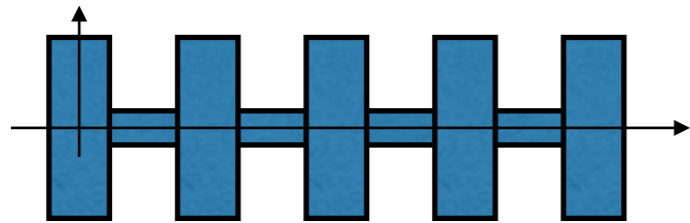


torsionale

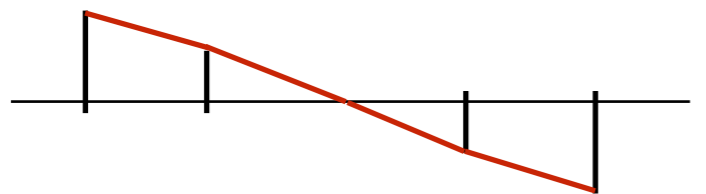


Rotodinamica - torsionale

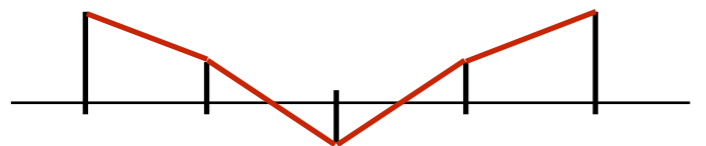
Esempio.. forme modali torsionali rotore con 5 volani



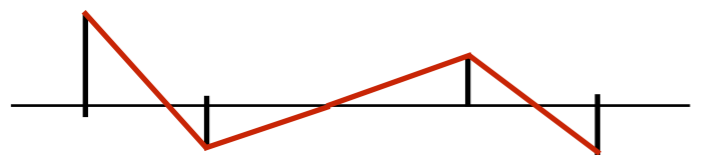
I modo (rigido)



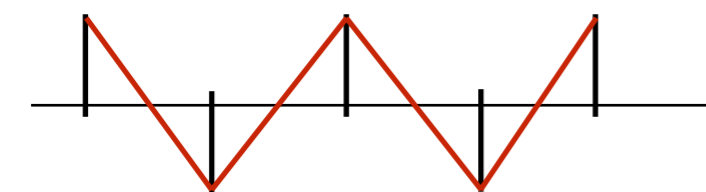
II modo (1 nodo)



III modo (2 nodi)



IV modo (3 nodi)



V modo (4 nodi)

Esistono diversi metodi iterativi per il calcolo delle vibrazioni torsionali..

Holzer..

Myklestad..

Prohl...

e con codici FEM..

..N volani..2N autovalori..N autovettori distinti
..se il rotore non è vincolato al mondo esterno..
modo di corpo rigido!

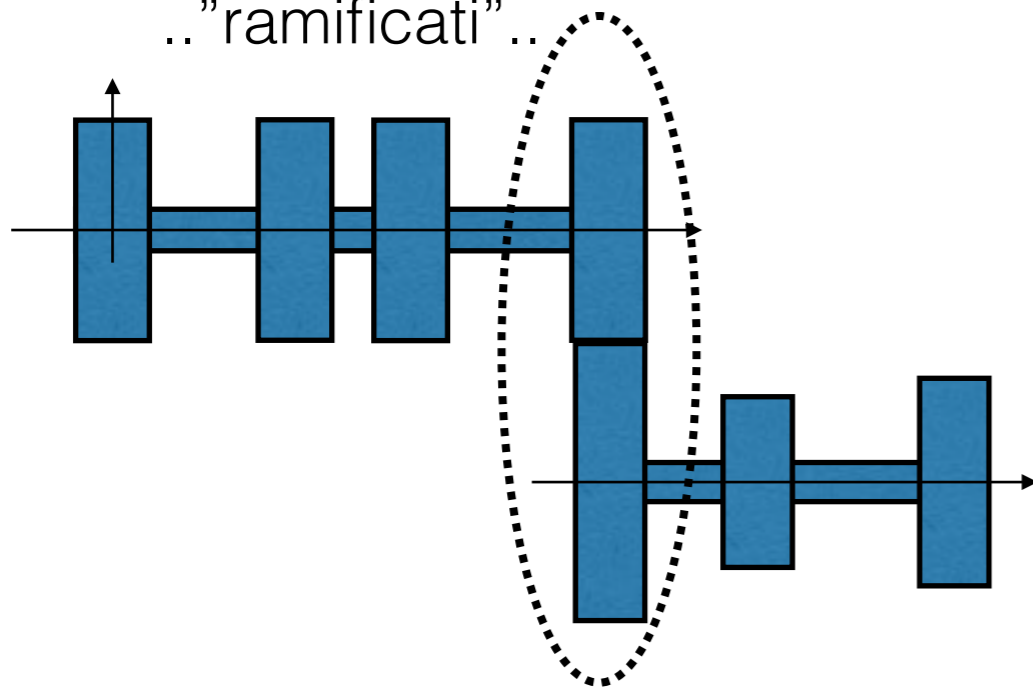
..se N è il modo che si considera,
ci sono (N-1) nodi nella deformata!

Rotodinamica - torsionale

Nello studio dei sistemi rotanti è possibile trovare sistemi ramificati (in presenza di riduttori, divisori di coppia, derive di utenze)...

Bisogna trasformare tali sistemi in sistemi lineari equivalenti, tenendo conto del rapporto di trasmissione delle ruote dentate ingranate

.. "ramificati" ..



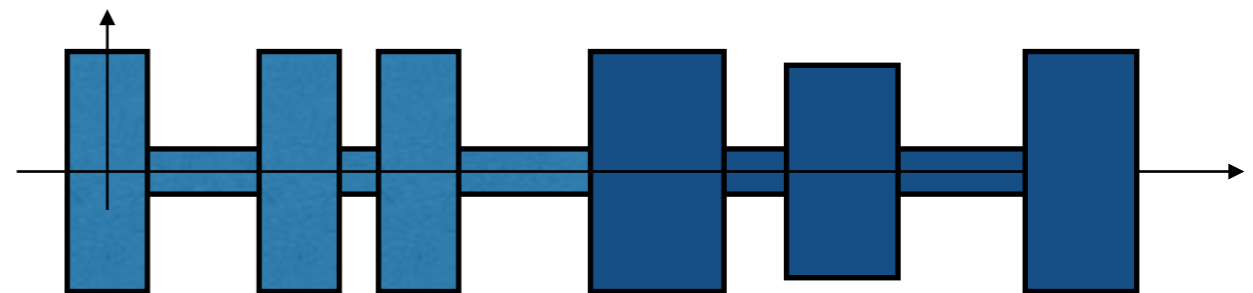
$$\frac{R_i}{N_i} = \frac{R_j}{N_j}$$

$$R_j \omega_j = -R_i \omega_i$$

$$\gamma = \frac{N_i}{N_j}$$

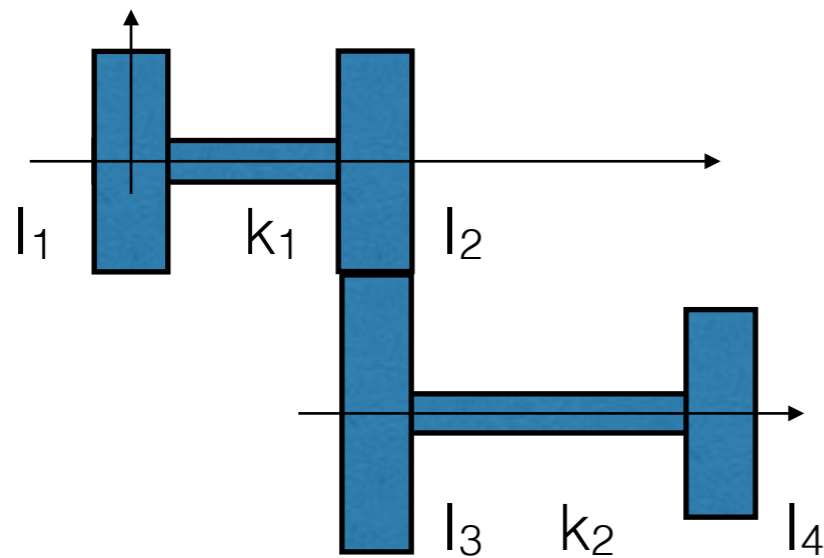
i entrante
j uscente

.. "in linea" equivalente ..



Rotodinamica - torsionale

Esempio..trovare il sistema in linea equivalente al sistema ramificato di figura:



R_2 ed R_3 sono raggi delle ruote 2 e 3..
 N_2 ed N_3 sono i rispettivi numeri dei denti..

Sia γ il rapporto di trasmissione N_2/N_3
oppure R_2/R_3

I quattro volani non sono più indipendenti!
Le velocità tangenziali di I_2 e I_3 sono uguali!

Vale la relazione: $\dot{\theta}_3 = -\gamma\dot{\theta}_2$

(NB c'è il segno - perché cambia il verso di rotazione!)

Rotodinamica - torsionale

Le equazioni del moto dei 4 volani sono le seguenti..

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{23} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2 (\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{23} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2 (\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{array} \right.$$

ricordando che

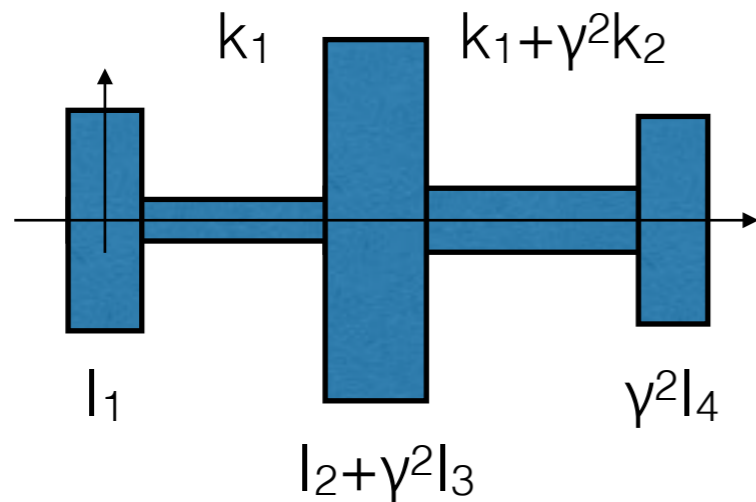
e sottraendo $\gamma[3]-[2]$

Ricordando che $\theta_3 = -\gamma\theta_2$ $\theta_4 = -\gamma\theta_3$

facendo l'equilibrio dei momenti (sottraendo $\gamma[3]-[2]$) si ottiene..

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\theta}_2 + k_1 (\theta_2 - \theta_1) + \gamma^2 k_2 (\theta_2 - \theta_3') = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}_3' + \gamma^2 k_2 (\theta_3' - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{array} \right.$$

Rotodinamica - torsionale



..ottenendo il modello “in linea” equivalente..

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + \gamma^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \gamma^2 k_2 & -\gamma^2 k_2 \\ 0 & -\gamma^2 k_2 & \gamma^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 - \gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}$$

..esiste una formulazione matriciale per i sistemi ramificati più complessi che porta alla scrittura equazioni per di sistemi “in linea” equivalenti.. (matrice forze interne, vincoli e rapporti di trasmissione)

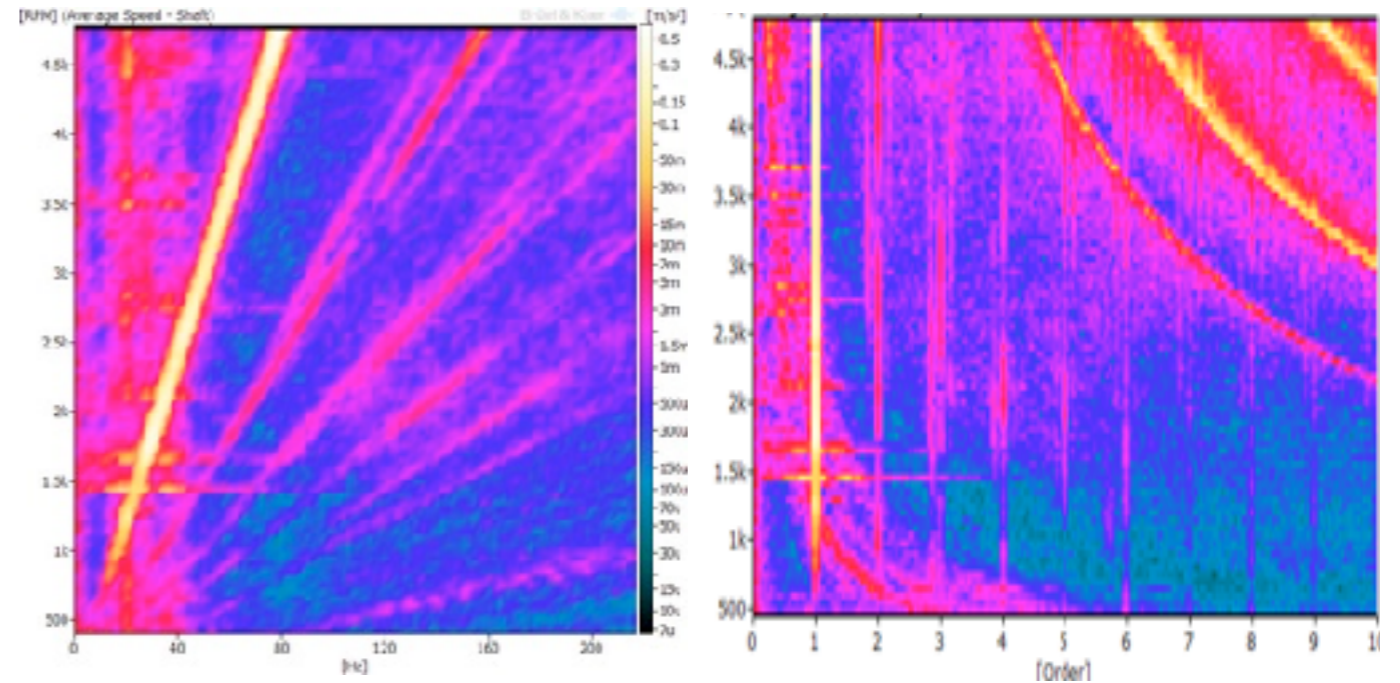
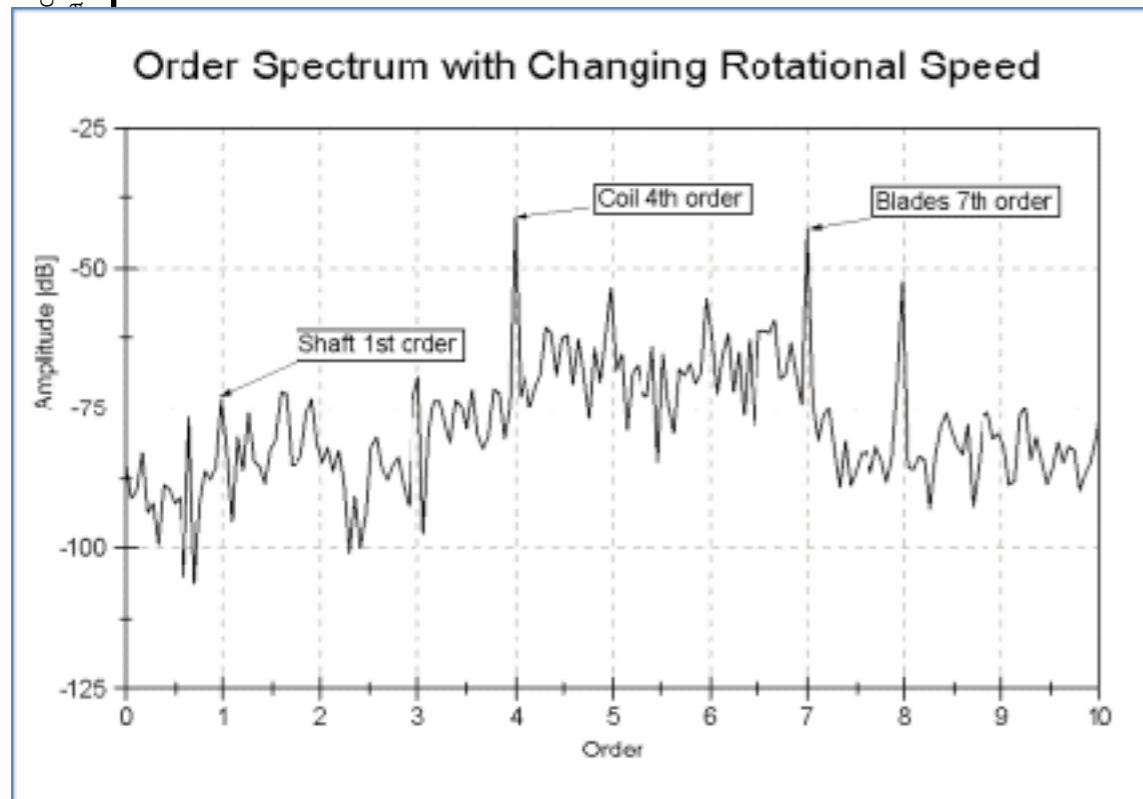
..analogamente ai sistemi lineari... si calcolano anche le risposte forzate!!

Rotodinamica - torsionale

Le macchine rotanti hanno generalmente due modalità di funzionamento:
 a regime costante (es. alternatore / turbina produzione elettricità)
 a regime variabile (es. motore autoveicolo)..

..in entrambi i casi è interessante tracciare l'andamento nel tempo il livello (RMS) delle componenti armoniche delle forze che agiscono su queste..
 (le vibrazioni che si generano e che bisogna controllare dipendono da queste forze!)

..effettuando l'analisi agli ordini!
 (ricordiamo il legame tra il regime di funzionamento e le risonanze del sistema)



Macchinario rotante - analisi agli ordini

Un ordine è un fenomeno che si presenta un certo numero di volte all'interno di un giro completo del rotore..

ad esempio..

lo squilibrio avrà un periodicità 1x

l'eccitazione delle palette una periodicità 7x

l'eccitazione elettrica una periodicità 4x

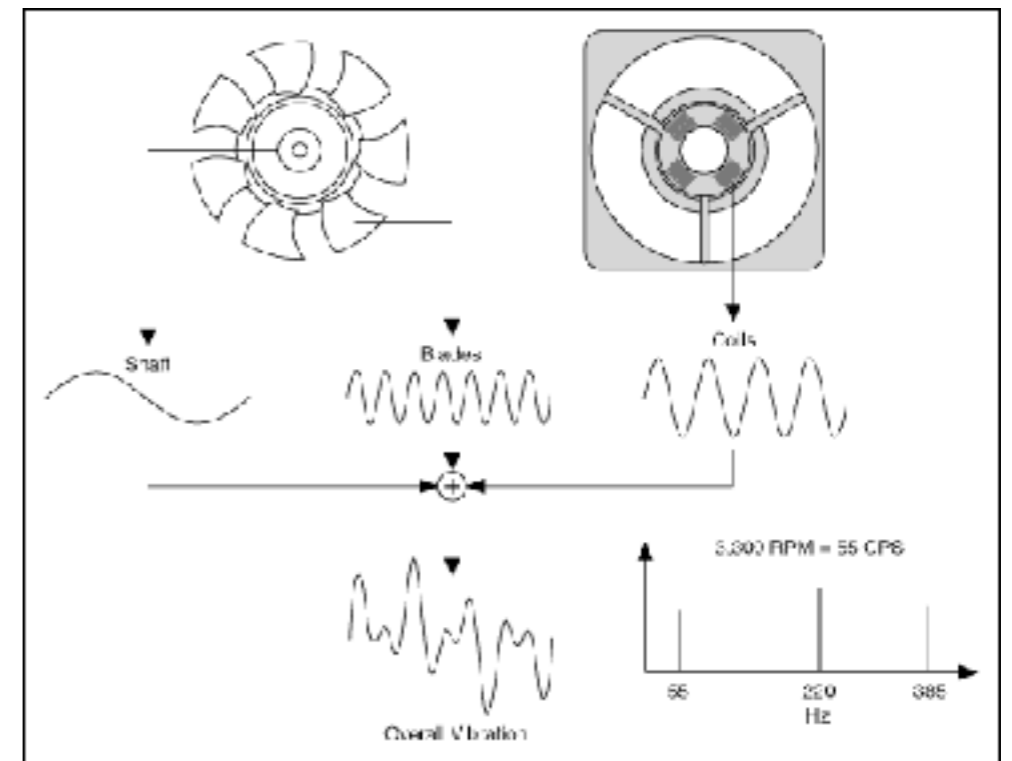
...indipendentemente dalla velocità di rotazione del ventilatore!

indipendentemente dalle risonanze del sistema!

NB gli ordini possono non essere numeri interi!

rapporto di trasmissione 1:2.3

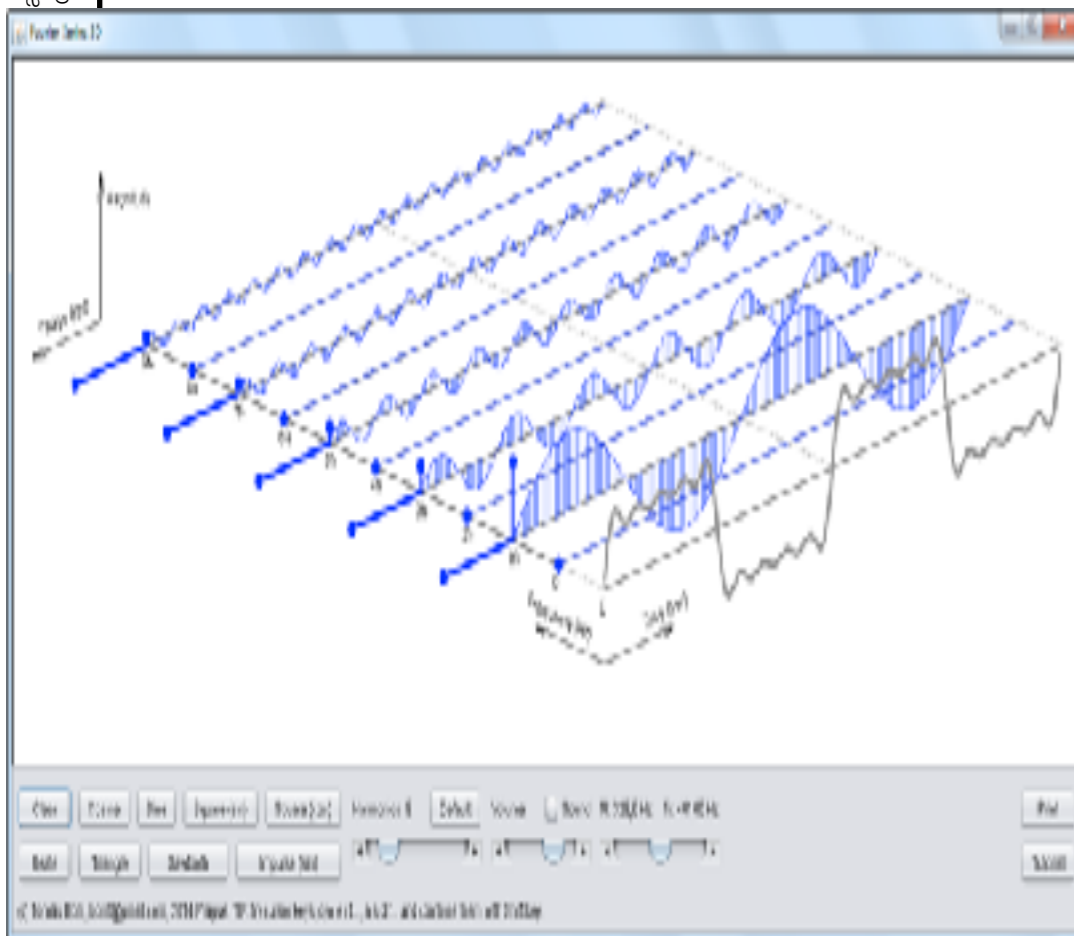
ci saranno gli ordini x2.3 x4.6 x6.9...



Macchinario rotante - analisi agli ordini

Solitamente il segnale vibrazione misurato su una macchina, viene campionato a brevi intervalli di tempo equispaziati per fare l'analisi di Fourier e trovarne lo spettro in frequenza..(..more on this later on..)

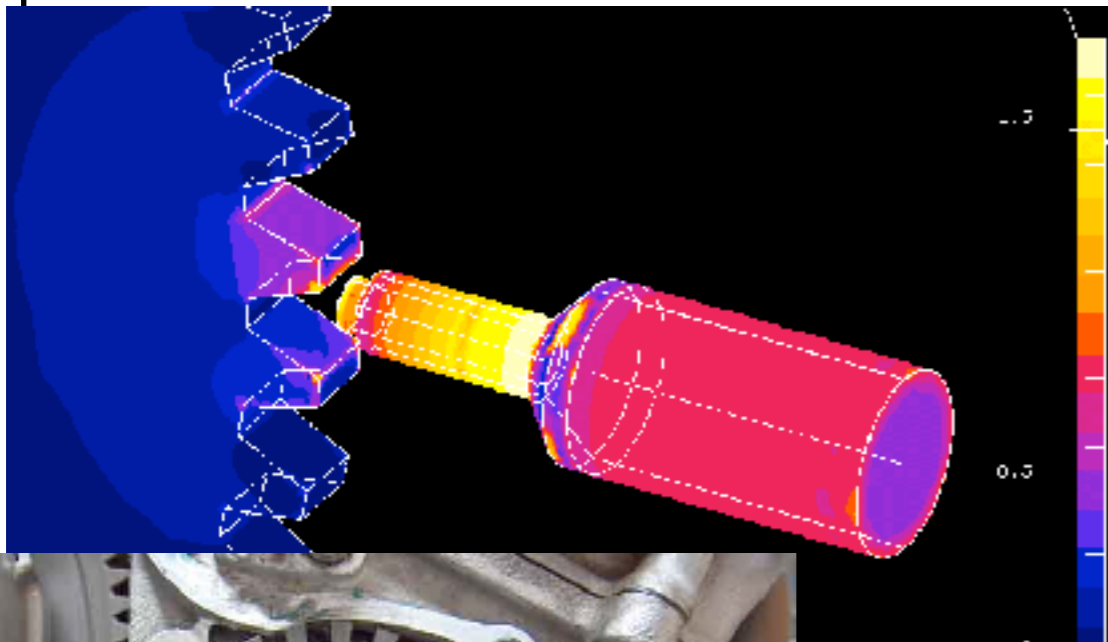
Se la velocità della macchina è variabile il contenuto in frequenza del segnale cambia..(cambia lo spettro)
e contemporaneamente cambia anche il numero di campioni per rotazione del rotore..(cambia la risoluzione)



Si vuole misurare la velocità istantanea del rotore (tachimetrica)
e si vuole eliminare l'influenza delle variazioni di velocità
(ricampionamento nel dominio dell'angolo)

Macchinario rotante - analisi agli ordini

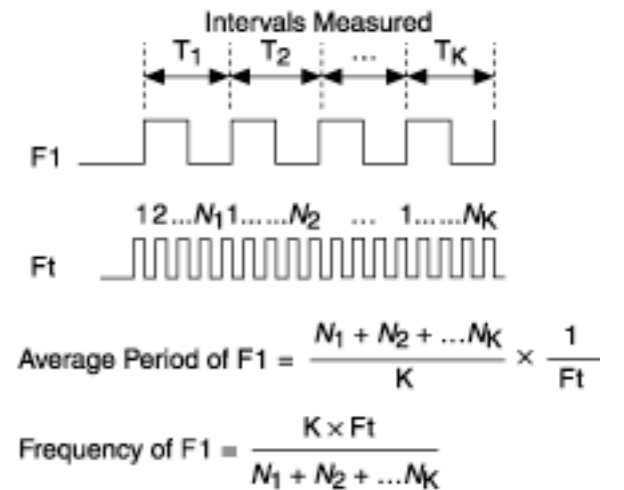
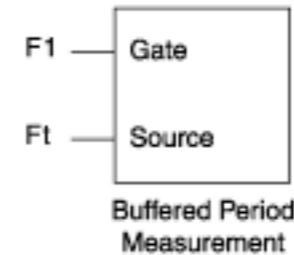
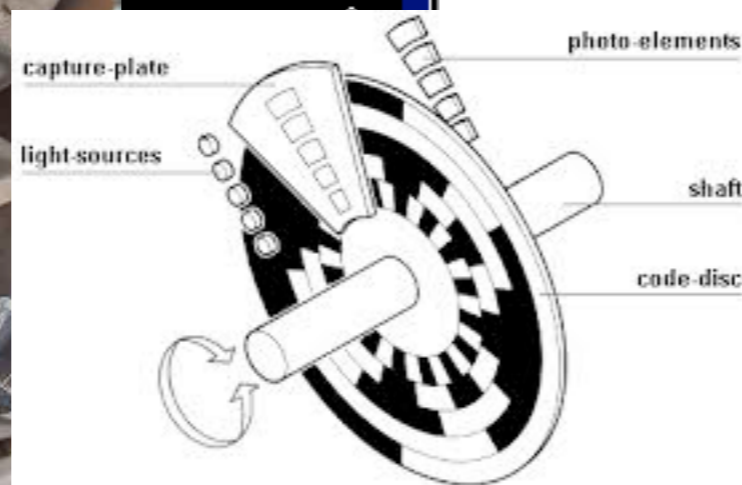
Tachimetrica: si misura l'intervallo di tempo tra due impulsi successivi di un trasduttore



Sensori Induttivi, Capacitivi, Ottici, Counter...

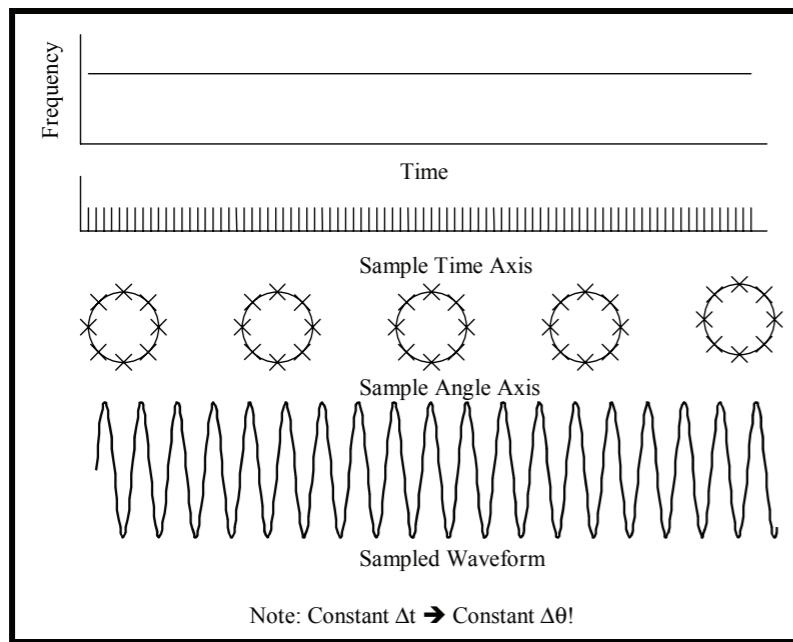
$$v_r(t) = \frac{60}{N_p(t_2 - t_1)}$$

N_p numero di impulsi per giro

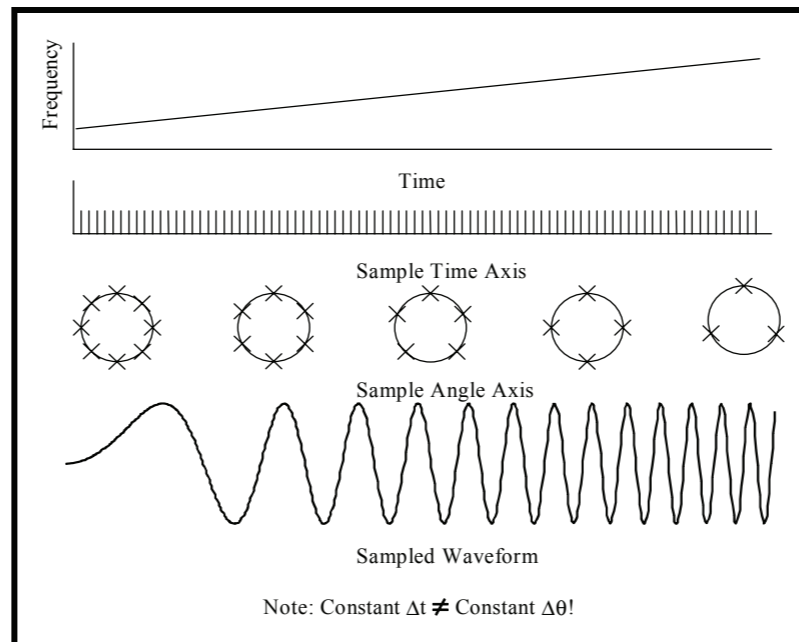


Macchinario rotante - analisi agli ordini

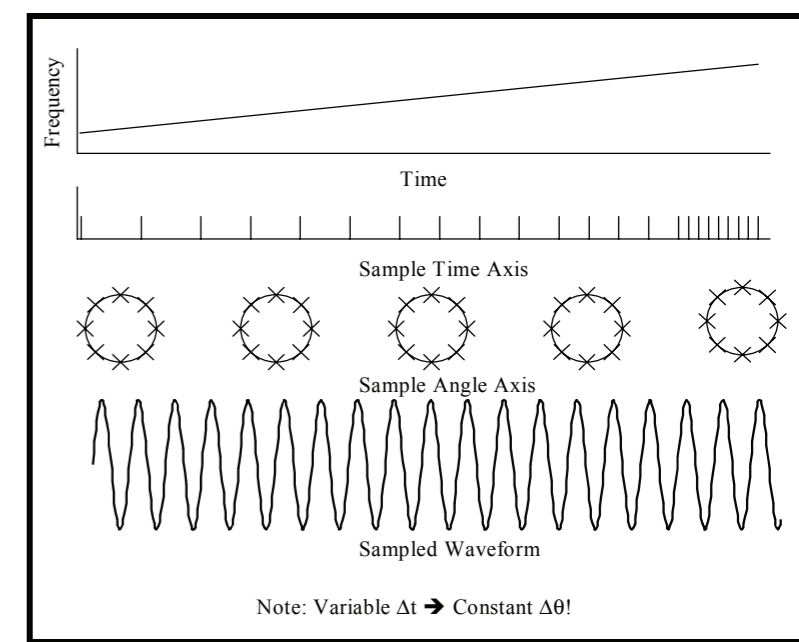
Ricampionamento nel dominio dell'angolo: si fa in modo che in un giro, indipendentemente dalla sua durata di questo ci siano N campioni $\Delta t \rightarrow \Delta \theta$



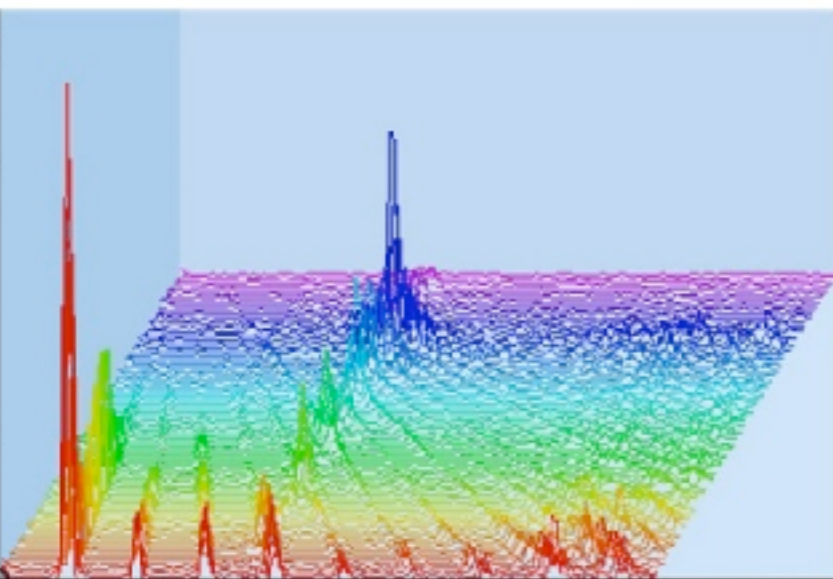
RPM costante
tempo



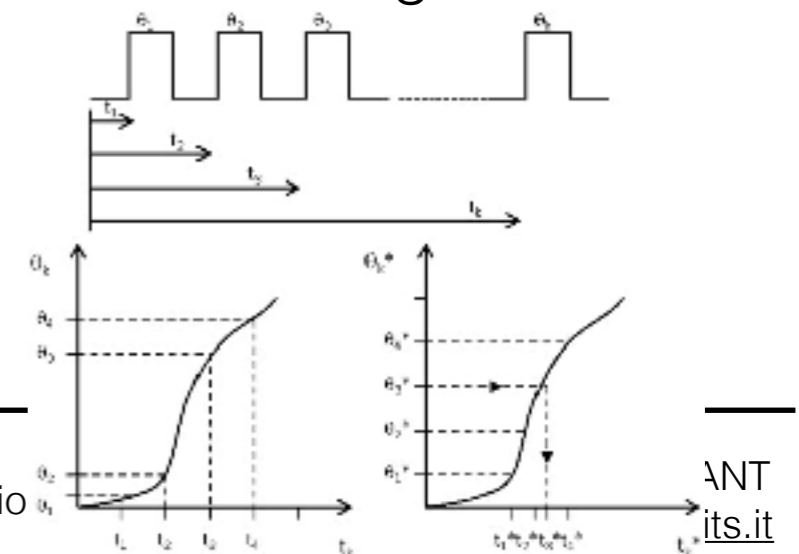
RPM variabile
tempo



RPM variabile
angolo

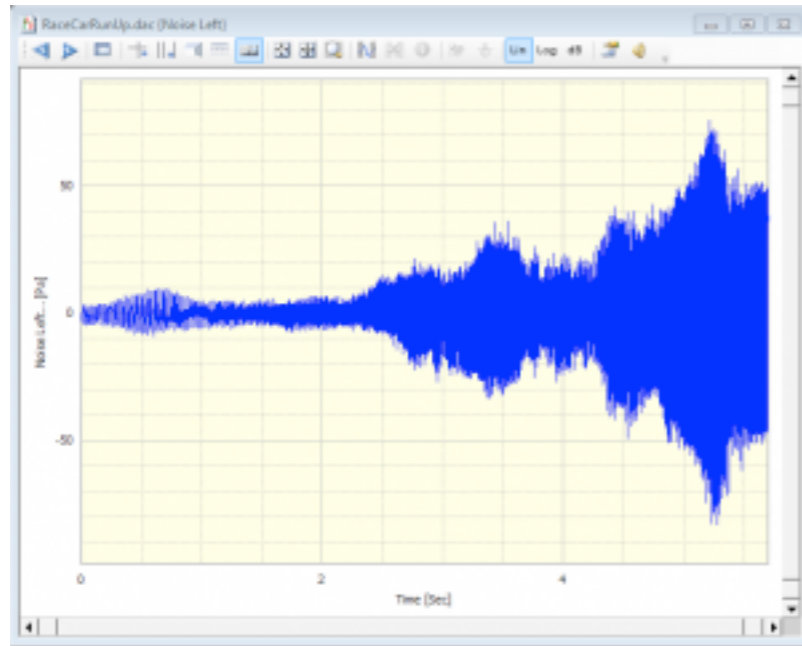


..interpolazione dei segnali accelerometrici..

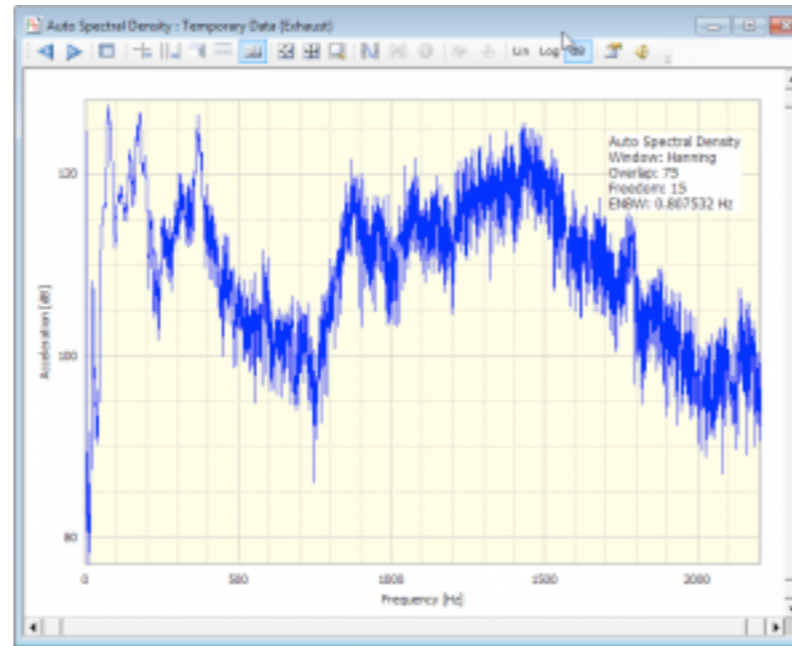


Macchinario rotante - analisi agli ordini

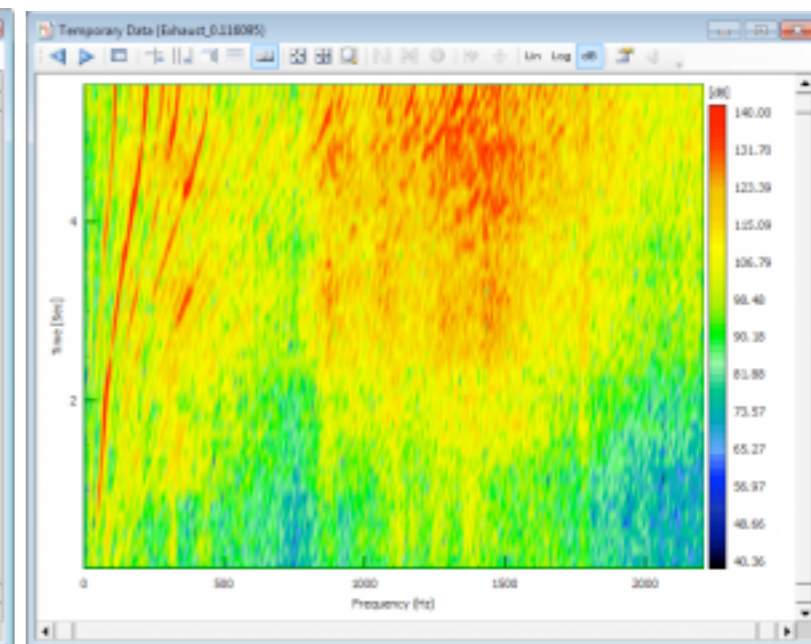
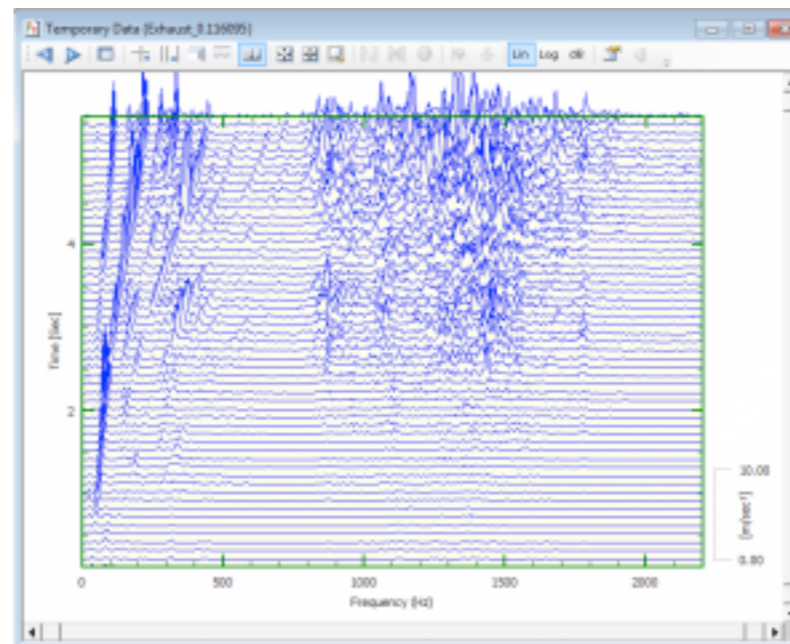
Segnale nel tempo..
run up di un macchinario



Segnale in frequenza..
diversi contributi in frequenza... spettro rumoroso

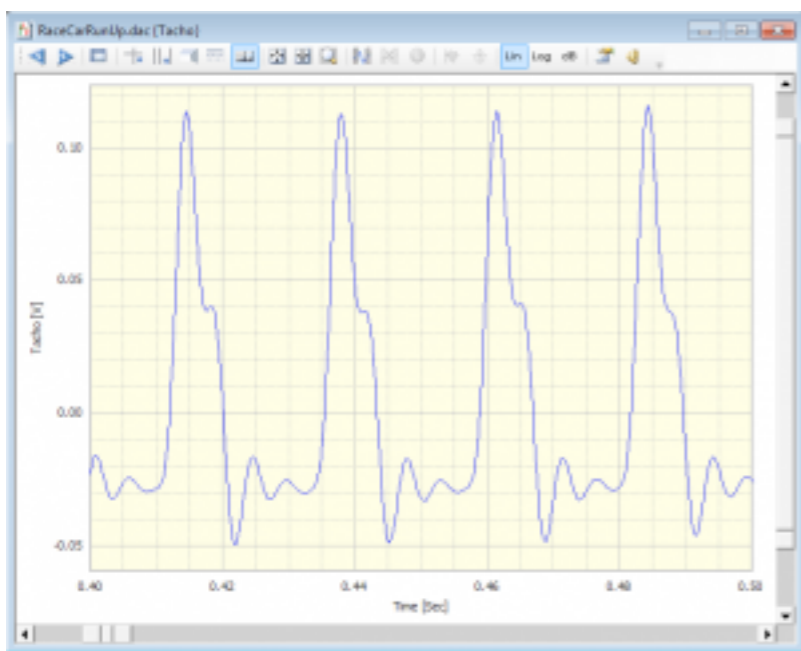


Segnale in frequenza..
(STFT)
al variare di RPM varia
il contenuto spettrale

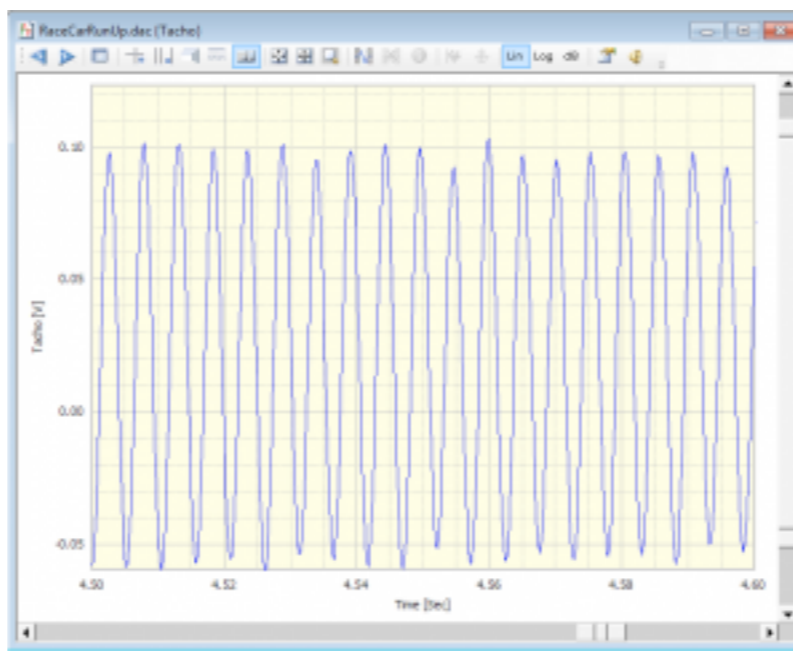


Macchinario rotante - analisi agli ordini

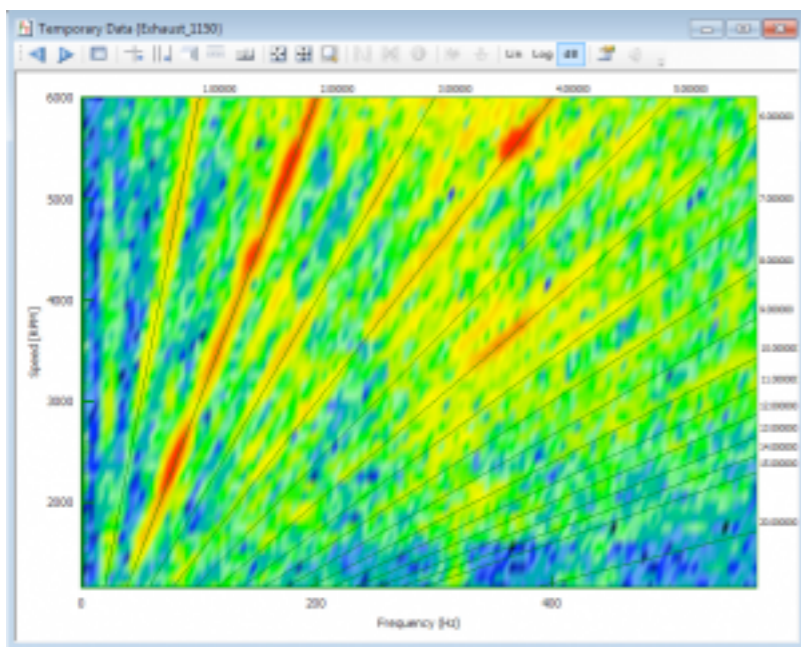
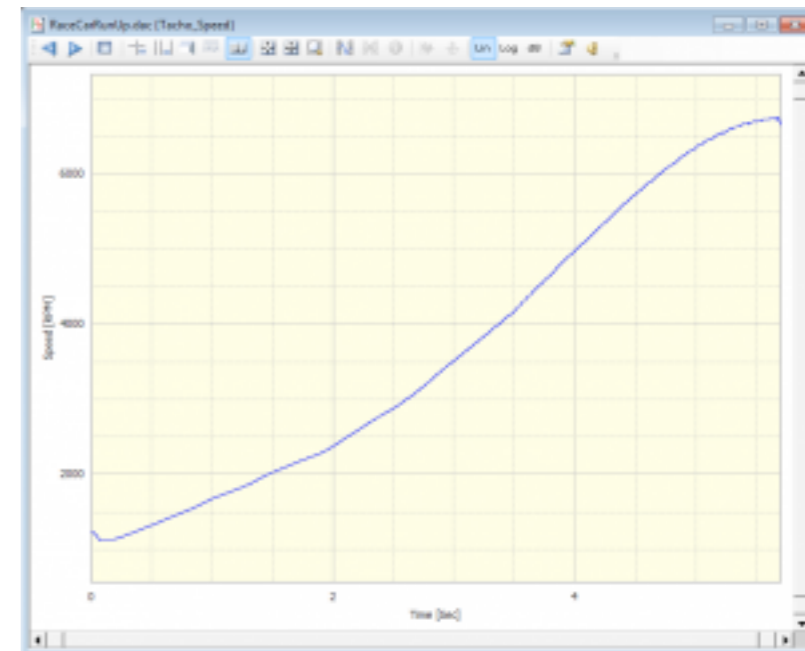
Tachimetrica a bassa velocità



Tachimetrica a alta velocità



Profilo di velocità



Nello spettrogramma si vede cambiare frequenza e ampiezza dell'ordine in funzione della velocità



