

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 5  
sistemi MDOF - particolari

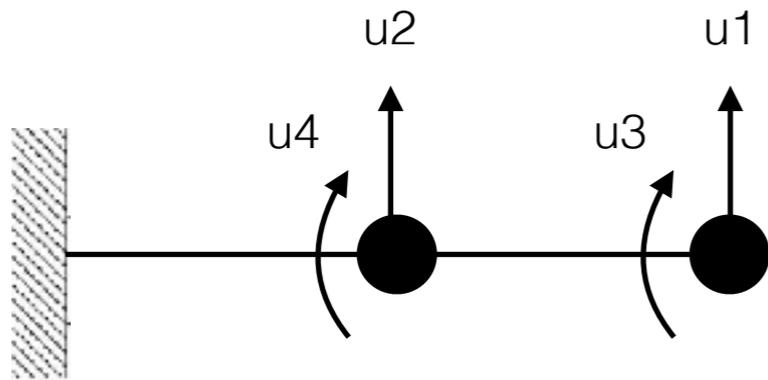
# Sistemi MDOF - modale

le matrici di massa e rigidezza sono simmetriche (teorema reciprocità Maxwell)

sono definite positive, derivano da T e V, per ogni spostamento e distribuzione di velocità diversa da 0

la matrice di rigidezza può essere semidefinita positiva se ci sono moti rigidi ( $V=0$ ) e flessibili ( $V>0$ );  
 $\det[k]=0$  o se il rango < ordine... modi rigidi

se ci sono gdl senza informazioni relative all'inerzia la matrice di massa può essere semidefinita positiva  $\det[m]=0$



$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Sistemi MDOF - modale

gli autovalori sono tra loro ortogonali!

prendiamo due autovalori distinti  $\omega_r, \omega_s$   $\omega_r \neq \omega_s$   
e i relativi autovettori

$$[k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

\* ..moltiplico per trasposta autovettore s

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$

..per la simmetria..

$$[k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s$$

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$

\*\* ..moltiplico per trasposta autovettore r

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$

..sottraggo \* a \*\*

$$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0$$

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = 0$$

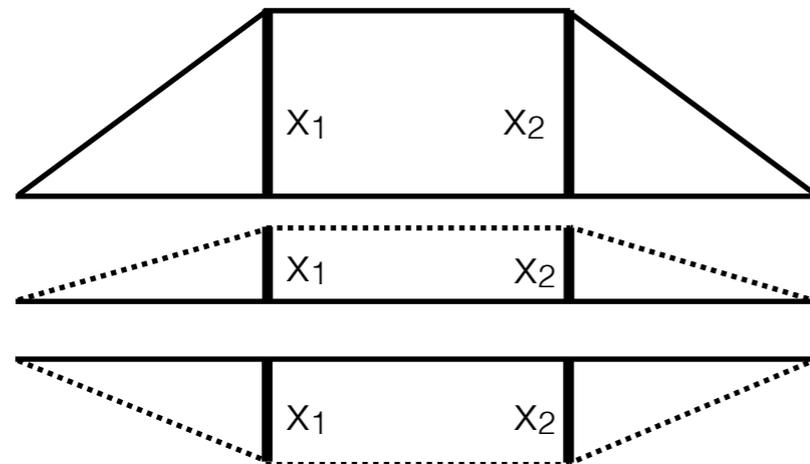
$$\{\phi_i\}_r^T [k] \{\phi_i\}_r = \omega_r^2 \{\phi_i\}_r^T [m] \{\phi_i\}_r$$

# Sistemi MDOF - modale

gli autovalori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa!  
(derivano da valori di  $\omega_i$  che annullano il det. matrice rigidità dinamica!)

$$k_r = \omega_r^2 m_r$$

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$$



definito un elemento del vettore,  
si derivano gli altri (N-1) elementi ..

esistono diverse maniere di scalare  
le forme modali:

Scalo il modo r:  $\{\phi_i\}_r = 1$  per una generica coordinata i

$\{\phi_i\}_r = 1$  per la coordinata con spostamento massimo i

$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_r = M_r = 1$  la massa modale abbia un valore definito

$\|\phi\|_r = 1$  la norma (euclidea, infinito,..) dell'autovettore sia unitaria

# Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono distinti.. si calcolano così:

$$([k] - \omega^2 [m])\{X\} = \{0\}$$

l'equazione del moto...

$$([k] - \omega_r^2 [m])\{\phi_r\} = \{0\}$$

in risonanza...

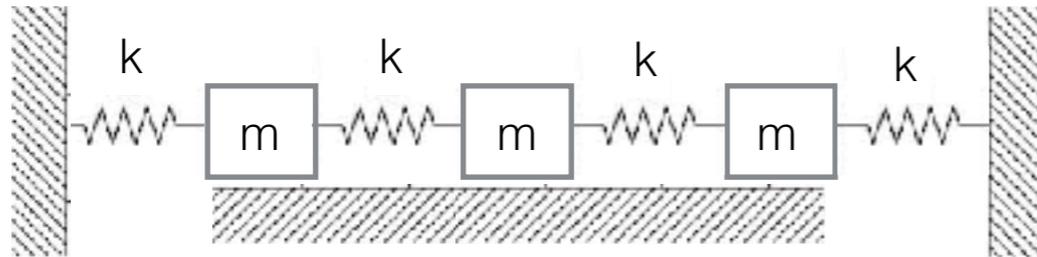
$$\begin{bmatrix} \overset{1 \times 1}{D_{aa}(\omega_r)} & \overset{1 \times N-1}{D_{ab}(\omega_r)} \\ \underset{N-1 \times 1}{D_{ba}(\omega_r)} & \underset{N-1 \times N-1}{D_{bb}(\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{1 \times 1}{1} \\ \underset{N-1 \times 1}{\phi_b} \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

partizionando opportunamente...

in risonanza  $\det[D(\omega_r)] = 0$ , matrice singolare, ma  $\omega_r$  è un autovalore distinto il rango di  $[D(\omega_r)]$  sarà  $N-1$  quindi  $[D_{bb}(\omega_r)]$  non è singolare ed è invertibile..

$$\begin{matrix} \underset{N-1 \times 1}{\{\phi_b\}} = - \underset{N-1 \times N-1}{[D_{bb}(\omega_r)]}^{-1} \underset{N-1 \times 1}{\{D_{ba}(\omega_r)\}} \\ \underset{N-1 \times 1}{\{\phi_r\}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ - \underset{N-1 \times N-1}{[D_{bb}(\omega_r)]}^{-1} \underset{N-1 \times 1}{\{D_{ba}(\omega_r)\}} \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

# Sistemi MDOF - modale



esempio...  $[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m=1$   
 $k=1$

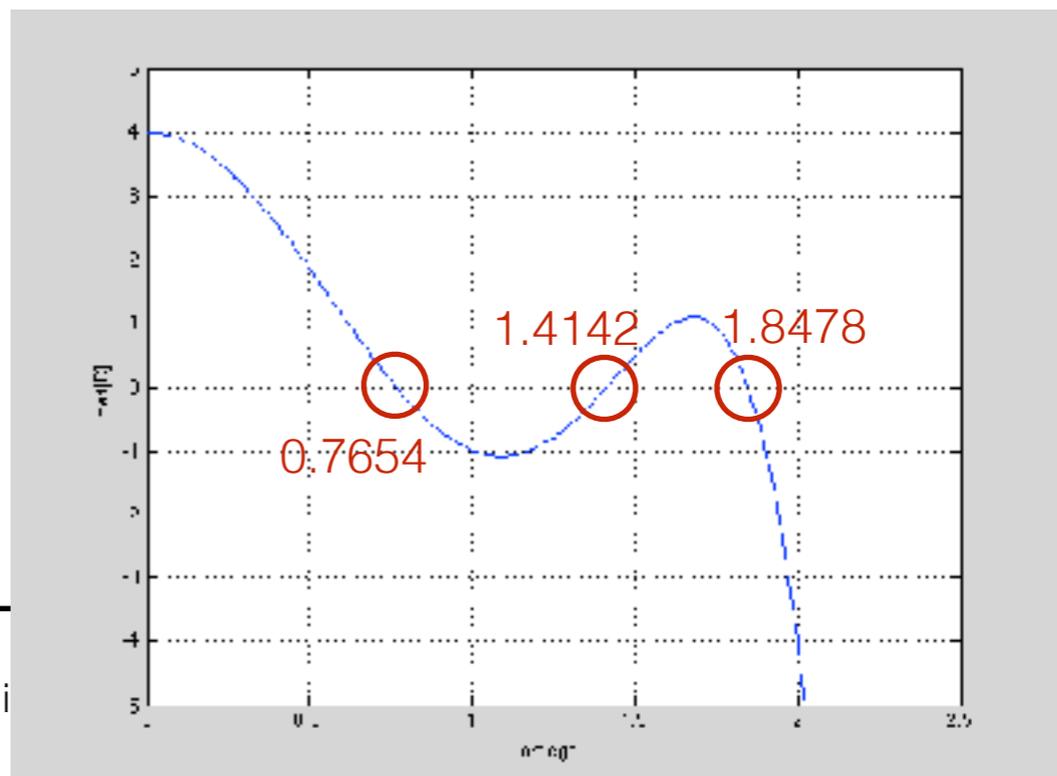
$$[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[D(\omega)] = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(\omega)] = (2 - \omega^2) \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(\omega)] = (2 - \omega^2)(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)$$

andamento di  $\det[D(\omega)]$



# Sistemi MDOF - modale

esempio...

per  $\omega_2$  calcolo l'autovettore con le formule appena viste...

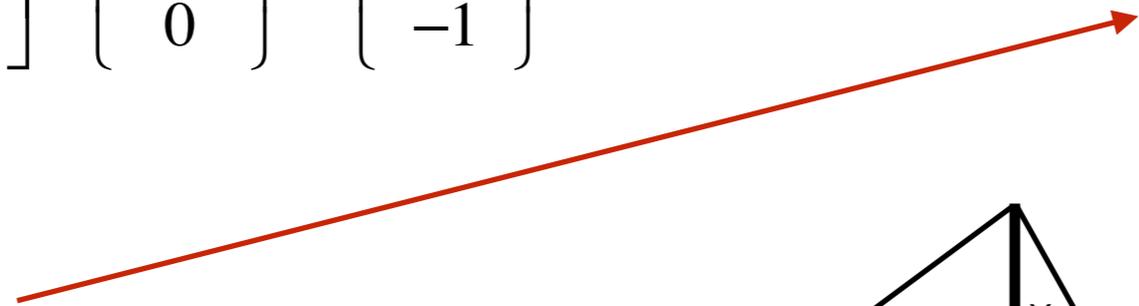
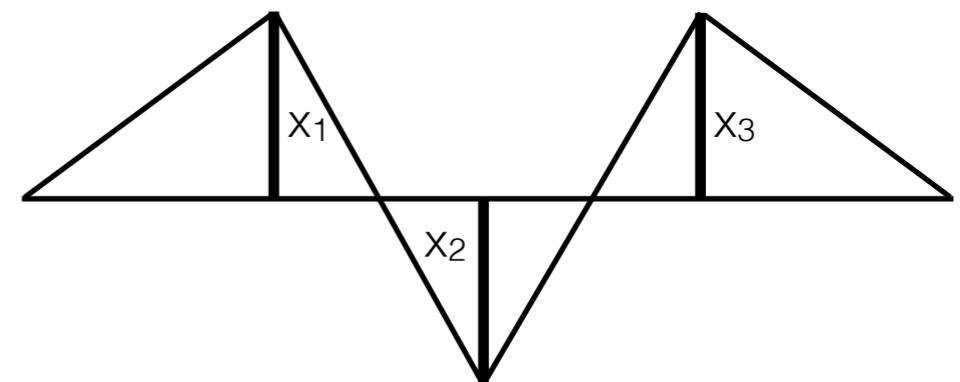
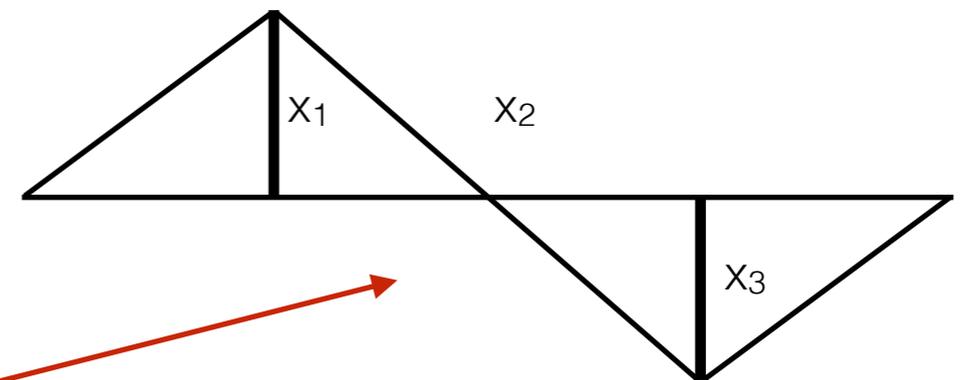
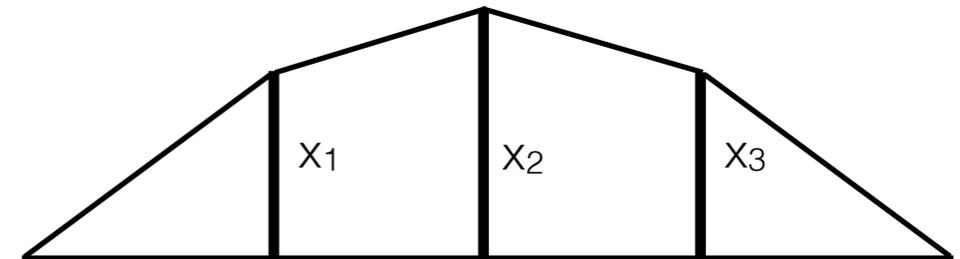
$$[D(\omega_2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi_b\} = -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1} \{D_{ba}(\omega_r)\}$$

$$\{\phi_b\} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

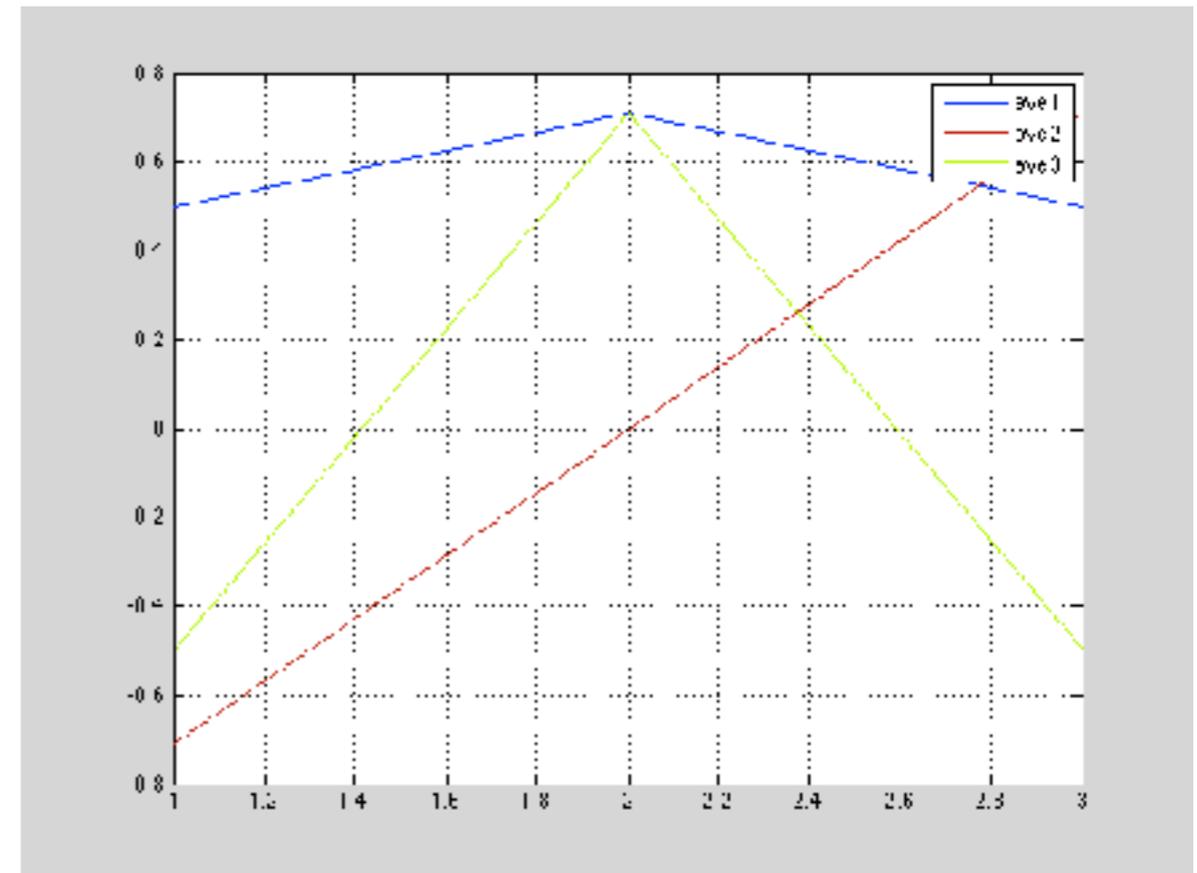
ave =  
 1.0000 1.0000 1.0000  
 1.4142 -0.0000 -1.4142  
 1.0000 -1.0000 1.0000



# Sistemi MDOF - modale

esempio...

```
>> m=  
 1  0  0  
 0  1  0  
 0  0  1  
  
>> k=  
 2 -1  0  
-1  2 -1  
 0 -1  2  
  
>> [ave,ava]=eig(k,m)  
  
ave =  
 0.5000 -0.7071 -0.5000  
 0.7071  0.0000  0.7071  
 0.5000  0.7071 -0.5000  
  
ava =  
 0.5858  0  0  
 0  2.0000  0  
 0  0  3.4142
```



# Sistemi MDOF - modale

esempio...

se scalo la matrice in modo che il primo elemento del vettore sia unitario.....

ave =

1.0000	1.0000	1.0000
1.4142	-0.0000	-1.4142
1.0000	-1.0000	1.0000

se scalo la matrice in modo che l'elemento massimo del vettore sia unitario.....

ave =

0.7071	-1.0000	-0.7071
1.0000	0.0000	1.0000
0.7071	1.0000	-0.7071

ave'\*m\*ave=

2.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	2.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	2.0000

# Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono ripetuti ( $\Delta\omega < 1\%$ ) .. si calcolano così:

immaginiamo l'ordine di ripetizione sia  $p$ , il rango di  $[D(\omega)]$  sarà  $N-p$ , si potrà scrivere allora similmente a prima

$$\begin{bmatrix} \overset{p \times p}{D_{aa}(\omega_r)} & \overset{p \times N-p}{D_{ab}(\omega_r)} \\ \underset{N-p \times p}{D_{ba}(\omega_r)} & \underset{N-p \times N-p}{D_{bb}(\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{p \times 1}{\phi_a} \\ \underset{N-p \times 1}{\phi_b} \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{N-p \times 1}{\{\phi_b\}} = - \underset{N-p \times N-p}{[D_{bb}(\omega_r)]}^{-1} \underset{N-p \times p}{[D_{ba}(\omega_r)]} \underset{p \times 1}{\{\phi_a\}}$$

il termine  $\phi_a$  deve essere definito con  $p$  vettori indipendenti!

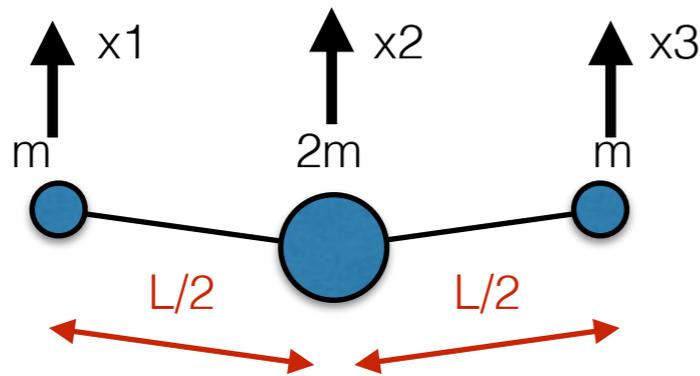
$$\{\phi_a\}_r = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_a\}_{r+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots \quad \{\phi_a\}_{r+p-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..espansione > sovrapposizione modale

..se i modi rappresentano una base del sistema, ogni deformazione di questo si può esprimere come una CL di forme modali...

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N c_r \{\phi\}_r \quad \text{..con...} \quad c_r = \frac{1}{M_r} \{\phi\}_r^T [m] \{x\}$$



$$[\phi] = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right\}_3 \end{array} \right]$$

..se vogliamo rappresentare un modo simmetrico..  
il termine  $c_1$  della CL deve essere nullo... (il modo 1 è asimmetrico)

$$c_1 = \frac{\{\phi\}_1^T [m] \{x\}}{\{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1} \quad c_1 = \frac{\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ a \end{Bmatrix}}{\left\{ \phi \right\}_1^T [m] \left\{ \phi \right\}_1} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} ma \\ 2mb \\ ma \end{Bmatrix} = 0$$

# Sistemi MDOF - modale

..condizioni iniziali

..partendo dalla soluzione di primo tentativo..

$$\{x\} = \{X\} \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{..considerando il modo } r..$$

$$\{x\}_r = c_r \phi_r \cos(\omega_r t - \alpha_r) \quad \text{..estendendo a tutti i modi..}$$

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N c_r \phi_r \cos(\omega_r t - \alpha_r) = \sum_{r=1}^N \phi_r [A_r \cos(\omega_r t) + B_r \sin(\omega_r t)]$$

..con i 2N coefficienti da determinare in base alle CI

$$\{x(0)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} a_r \quad \text{..moltiplicando per}$$

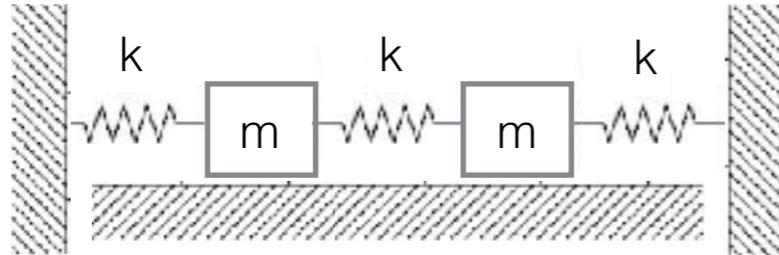
$$\{\dot{x}(0)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} \omega_r b_r \quad \{\phi\}_s^T [m]$$

$$a_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

..con le seguenti CI

$$\{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{x(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_0 \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \quad \text{..calcolo le masse modali}$$

$$[m]\{x(0)\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ X_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix} \quad \text{..calcolo l'influenza delle CI}$$

$$[m]\{\dot{x}(0)\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$a_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m] \{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

..sostituendo quanto appena calcolato...

$$a_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = \frac{X_0}{2}$$

$$b_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

$$a_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = -\frac{X_0}{2}$$

$$b_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

..si ottiene la soluzione già vista..

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^2 a_r \{\phi_r\} \cos(\omega_r t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{X_0}{2} \begin{Bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

vediamo cosa succede alle funzioni di trasferimento nel caso MDOF

$$[Z(p)] = [p^2 [m] + p[c] + [k]]$$

$$[H(p)] = [Z(p)]^{-1}$$

$$[H(\omega)] = [H(p)] \Big|_{j\omega}$$

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)}$$

$$H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega)$$

Partiamo dalla matrice di rigidezza dinamica è di dimensioni  $N \times N$ , la sua inversa è la matrice delle funzioni di trasferimento

Queste valutate per  $p=j\omega$  si chiamano Funzioni di Risposta in Frequenza (FRF) (sempre  $N \times N$ )

Il generico termine  $H_{ij}(\omega)$  è il rapporto tra la trasformata della risposta  $X_i$ , sulla trasformata dell'eccitazione  $F_j$ .

Per la simmetria delle matrici di partenza, la matrice  $[H]$  è simmetrica!

# Sistemi MDOF - modale

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$[H(\omega)] = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{B_r}$$

Come nel caso SDOF anche nel caso MDOF ci sono diverse rappresentazioni

- \* come rapporto di polinomi
- \* come somma di residui (frazioni parziali) (vedi parte 2)

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_p)}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_{2N})}$$

..prodotto di p zeri  
..prodotto di 2N poli

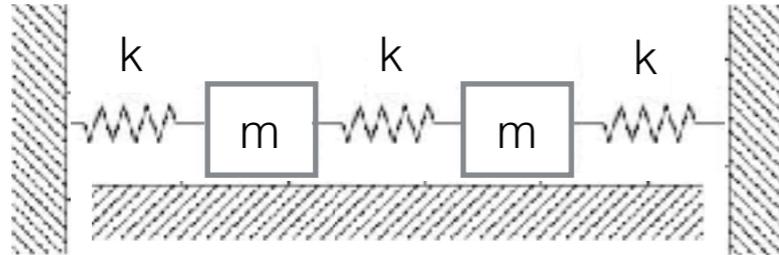
$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

..somma di N modi  
(ciascuno con 2 contributi  
traloro complessi coniugati)

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{..matrice di rigidezza dinamica}$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & -(k_{21} - \omega^2 m_{21}) \\ -(k_{12} - \omega^2 m_{12}) & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21})}$$

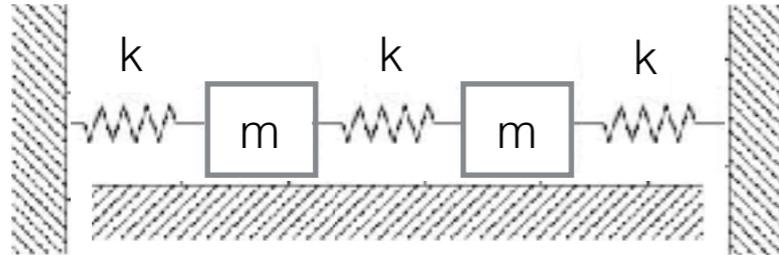
$$(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21}) =$$

$$(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)$$

..note che siano le radici dell'eq.caratteristica, o poli

# Sistemi MDOF - modale

..esempio



$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & k_{21} - \omega^2 m_{21} \\ k_{12} - \omega^2 m_{12} & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21})}$$

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

..le 4 FRF del sistema a 2 DOF..

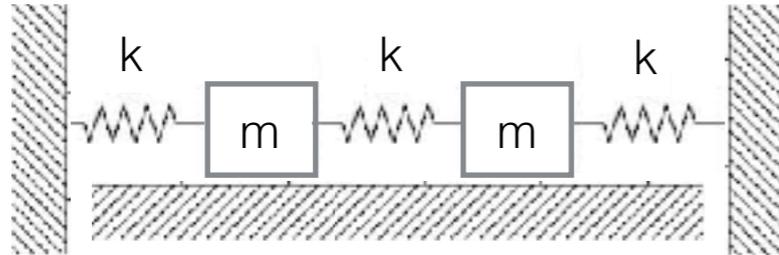
$$H_{12}(\omega) = H_{21}(\omega) = \frac{k_{12} - \omega^2 m_{12}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$H_{22}(\omega) = \frac{k_{11} - \omega^2 m_{11}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

..le N\*N FRF del sistema a N DOF..

# Sistemi MDOF - modale

..esempio



..analogamente al caso SDOF si cerca la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$= \frac{c_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(j\omega - \lambda_2^*)} + \frac{c_3}{(j\omega - \lambda_2)} + \frac{c_4}{(j\omega - \lambda_1^*)}$$

..moltiplico per  $(j\omega - \lambda_1)$ ..

$$c_1 = \frac{k_{22} - \lambda_1^2 m_{22}}{(\lambda_1 - \lambda_1^*)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2^*)} = A_{111}$$

..valuto per  $j\omega = \lambda_1$ ..

..e analogamente gli altri residui

$$c_2 = \frac{k_{22} - \lambda_1^{*2} m_{22}}{(\lambda_1^* - \lambda_1)(\lambda_1^* - \lambda_2)(\lambda_1^* - \lambda_2^*)} = A_{111}^* \quad c_3 = \frac{k_{22} - \lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1^*)(\lambda_2 - \lambda_2^*)} = A_{112} \quad c_4 = \frac{k_{22} - \lambda_2^{*2} m_{22}}{(\lambda_2^* - \lambda_1)(\lambda_2^* - \lambda_1^*)(\lambda_2^* - \lambda_2)} = A_{112}^*$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\begin{bmatrix} A_{11r} & A_{12r} \\ A_{21r} & A_{22r} \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11r}^* & A_{12r}^* \\ A_{21r}^* & A_{22r}^* \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

Tanti contributi così quanti sono i modi (N)

..in realtà non serve calcolare tutte le matrici dei residui, perché queste sono complesse coniugate a due a due..

..in realtà non serve calcolare tutti gli elementi delle matrici dei residui, perché queste sono simmetriche..

# Sistemi MDOF - modale

La matrice dei residui  $A_r$  è proporzionale alla forma modale  $\phi_r$

$$[A_r] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

..vediamo come, partendo dalla matrice di rigidezza dinamica..

$$[Z(\omega)][Z(\omega)]^{-1} = [I] \quad [Z(\omega)]^{-1} = \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$[Z(\omega)] \frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} = [I]$$

$$[Z(\omega)] adj[Z(\omega)] = \det[Z(\omega)] [I] \quad \text{..valutiamola per } \lambda_r \text{.. } \det[Z(\lambda_r)] = 0$$

$$[Z(\lambda_r)] adj[Z(\lambda_r)] = \{0\} \quad \text{..prendiamo la i-esima colonna}$$

# Sistemi MDOF - modale

$$[Z(\lambda_r)]\{z(\lambda_r)\}_i^A = \{0\}$$



$$[Z(\lambda_r)]\{X\}_{\lambda_r} = [Z(\lambda_r)]\{\phi\}_r = \{0\}$$

$$\{\phi_r\} = \beta_{ir} \{z(\lambda_r)\}_i^A$$

..ricordiamo la definizione di  $[Z(\omega)]$ ..

..da cui la menzionata proporzionalità..

..essendo  $m$  e  $k$  matrici simmetriche, anche  $\text{adj}[Z(\lambda_r)]$  sarà simmetrica..

..lo stesso discorso vale per le righe e per le colonne...

$$\text{adj}[Z(\lambda_r)] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix} = [A_r]$$

# Sistemi MDOF - modale

..sfruttiamo la proprietà appena vista per sintetizzare le FRF ..

Un sistema a N DOF ha potenzialmente N\*N FRF,  
è improponibile calcolarle/misurarle tutte!

Ci si limita ad un set discreto (un paio di righe o di colonne complete)  
ed eventualmente si sintetizzano quelle mancanti d'interesse!

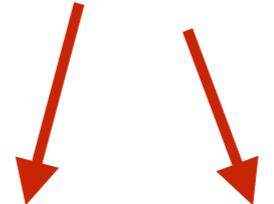
..ricordiamo..

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

..prendiamo la k-esima colonna..

$$\begin{Bmatrix} H_{1k}(\omega) \\ H_{2k}(\omega) \\ \dots \\ H_{Nk}(\omega) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\{A_r\}_k}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\{A_r\}_r^*}{j\omega - \lambda_r^*}$$

.. k-esima colonna della  
matrice dei residui..



# Sistemi MDOF - modale

$$[A_r] = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

..prendiamo la k-esima colonna..

$$\begin{Bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \dots \\ A_{Nk} \end{Bmatrix}_r = Q_r \begin{Bmatrix} \phi_1\phi_k \\ \phi_2\phi_k \\ \dots \\ \phi_N\phi_k \end{Bmatrix}_r = Q_r \phi_{kr} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$$

..da cui deriviamo l'espressione per il generico termine dalla matrice dei residui..

$$A_{pqr} = Q_r \phi_{pr} \phi_{qr}$$

..e da questa l'espressione per la sintesi:

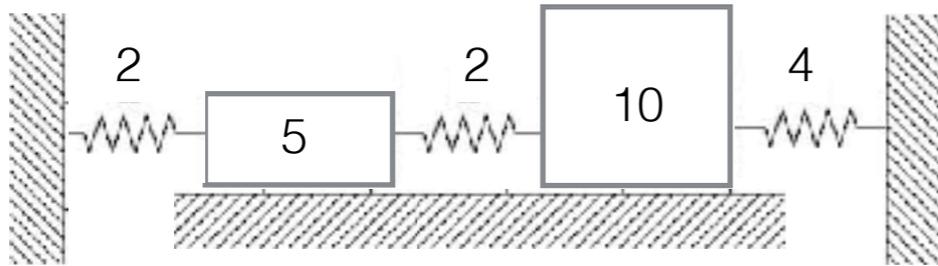
$$A_{pqr} = \frac{A_{kpr} A_{kqr}}{A_{kk}} = \frac{Q_r \phi_{kr} \phi_{pr} Q_r \phi_{kr} \phi_{qr}}{Q_r \phi_{kr} \phi_{kr}}$$

.. serve conoscere il termine diretto  $A_{kk}$ !!!

..schemino..

# Sistemi MDOF - modale

..esempio..



$$[m] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

..senza smorzamento..

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

..problema autovalori

$$\left| [[k] + s^2[m]] \right| = \{0\}$$

$$\left| [[m]^{-1}[k] + s^2[I]] \right| = \{0\}$$

$$\left| \left[ \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right| = \{0\}$$

$$\left| \left[ [k]^{-1}[m] + \frac{1}{s^2}[I] \right] \right| = \{0\}$$

$$\left[ \begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

# Sistemi MDOF - modale

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \text{..per la soluzione non banale..}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s^2}\right)\left(2 + \frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{2} = 0 \quad \alpha = \frac{1}{s^2} \quad \alpha^2 + \frac{7}{2}\alpha + \frac{5}{2} = 0 \quad \alpha_{1,2} = \begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \pm j \end{cases} \quad \text{..i poli del sistema sono puramente immaginari !! c=0..}$$

sostituisco  $\lambda_1 = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}}$  in [\*] per valutare l'autovettore

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

# Sistemi MDOF - modale

$$-X_1 + X_2 = \{0\} \quad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

sostituisco  $\lambda_1 = \pm j$  in [\*] per valutare l'autovettore 2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\frac{1}{2}X_1 + X_2 = \{0\} \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2}X_1 \end{Bmatrix}$$

da cui la matrice modale che deve essere scalata opportunamente!!

$$[\phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

$X_1$  può assumere qualsiasi valore...  
ma si può fare in modo che la matrice  
di massa modale sia unitaria....

# Sistemi MDOF - modale

$$[\phi]^T [m][\phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

si ottengono due equazioni.. per le due masse modali (unitarie)...

$$5X_1^2 + 10X_1^2 = 1$$

$$5X_1^2 + \frac{5}{2}X_1^2 = 1$$

da cui i due termini di scalaggio

$$X_{11} = \pm \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$X_{12} = \pm \sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}$$

matrice modale scalata!

# Sistemi MDOF - modale

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$[\Phi]^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [k][\Phi]\{q\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \{0\}$$

..nel caso in cui ci fossero forzanti..

$$[\Phi]^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [k][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T \{p\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..le equazioni sono disaccoppiate! 2 sistemi SDOF disuniti...risposte note...

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..dalla matrice di rigidezza dinamica, calcoliamo le FRF...

$$[Z(s)] = \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}$$

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{(5s^2 + 4)(10s^2 + 6) - 4}$$

..noti i poli si può usare la rappresentazione a frazioni parziali...

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{50 \left( s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left( s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)}$$

# Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 6}{50 \left( s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left( s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)}$$

$$H_{11}(s) = \frac{A_{111}}{\left( s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{111}^*}{\left( s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{112}}{(s - j)} + \frac{A_{112}^*}{(s + j)} \quad \dots \text{con la solita tecnica..}$$

$$A_{111} = -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \quad A_{111}^* = \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \quad A_{112} = -\frac{j}{15} \quad A_{112}^* = \frac{j}{15}$$

..analogamente per tutte le altre FRF e per tutti gli altri termini mancanti..

# Sistemi MDOF - modale

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j}{15} & \frac{j}{30} \\ \frac{j}{30} & -\frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s - j)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j}{15} & -\frac{j}{30} \\ -\frac{j}{30} & \frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s + j)}$$

$$Q_1 = \pm j \frac{\sqrt{2/5}}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = \pm \frac{j}{60} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. proporzionale

$$[c] = \frac{1}{2}[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} [\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

..la trasformazione modale diagonalizza la matrice di smorzamento..

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..i modi sono gli stessi che nel caso non smorzato..

# Sistemi MDOF - modale

..ma cambia significativamente la matrice delle FRF..

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 3s + 6 & s + 2 \\ s + 2 & 5s^2 + 2s + 4 \end{bmatrix}}{50s^4 + 35s^3 + 75s^2 + 20s + 20}$$

..i poli diventano complessi, si spostano verso sx nel semipiano di Laplace..

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} -\frac{1}{10} \pm j \frac{\sqrt{39}}{10} \\ -\frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

..NB i poli sono 4 a due a due complessi coniugati!

# Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 3s + 6}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)}$$

$$H_{11}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{-j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

$$Q_1 = \pm j\frac{\sqrt{39}}{117} \quad \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$H_{12}(s) = \frac{s + 2}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{-j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

$$Q_1 = \pm \frac{j\sqrt{15}}{225} \quad \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right\}$$

# Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. non proporzionale  $[c] = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..la trasformazione non disaccoppia le equazioni del sistema..  
bisogna utilizzare l'espansione di Duncan-Collar

..cambiano le FRF..

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 5s + 6 & 4s + 2 \\ 4s + 2 & 5s^2 + 6s + 4 \end{bmatrix}}{50s^4 + 85s^3 + 84s^2 + 40s + 20}$$

# Sistemi MDOF - modale

..cambiano poli, e residui..

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -0.095 + j0.629 \\ \lambda_1^* = -0.095 - j0.629 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = -0.754 + j0.645 \\ \lambda_2^* = -0.754 - j0.645 \end{array} \right.$$

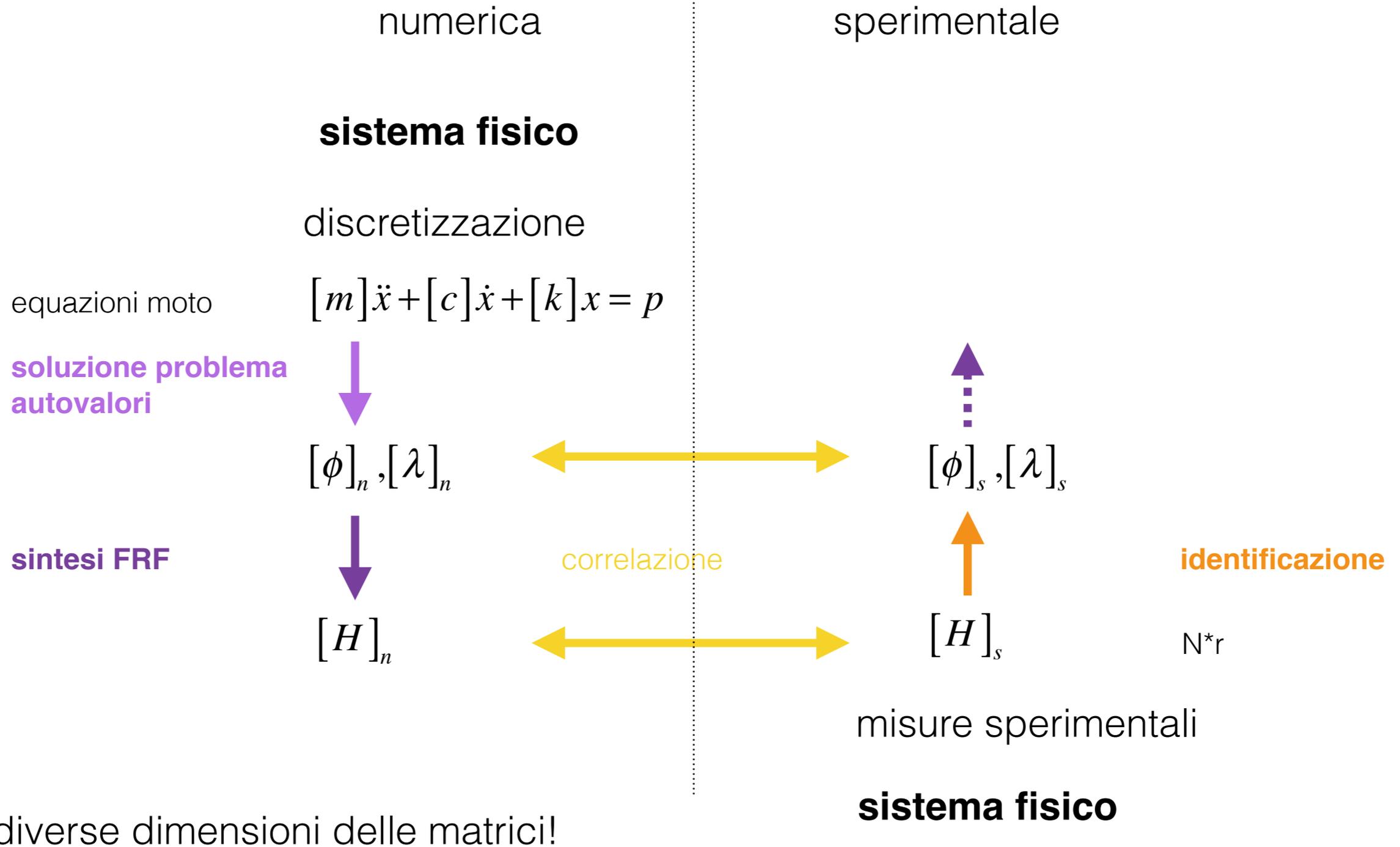
$$H_{22}(s) = \frac{0.0037 - j0.0587}{(s - \lambda_1)} + \frac{0.0037 + j0.0587}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{0.0037 - j0.0163}{(s - \lambda_2)} + \frac{0.0037 + j0.0163}{(s - \lambda_2^*)}$$

..ma soprattutto gli autovettori.. che diventano complessi!  
(di diversi DOF non raggiungono gli estremi di spostamento simultaneamente!)

$$\text{per } \lambda_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\}_1 = \left\{ \begin{array}{l} -0.0034 - j0.0501 \\ 0.0037 - j0.0587 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0.0502 & -93.96^\circ \\ 0.0588 & -86.93^\circ \end{array} \right\}$$

$$\text{per } \lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\}_2 = \left\{ \begin{array}{l} -0.0034 + j0.0452 \\ 0.0037 - j0.0163 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0.0454 & +94.30^\circ \\ 0.0167 & -77.21^\circ \end{array} \right\}$$

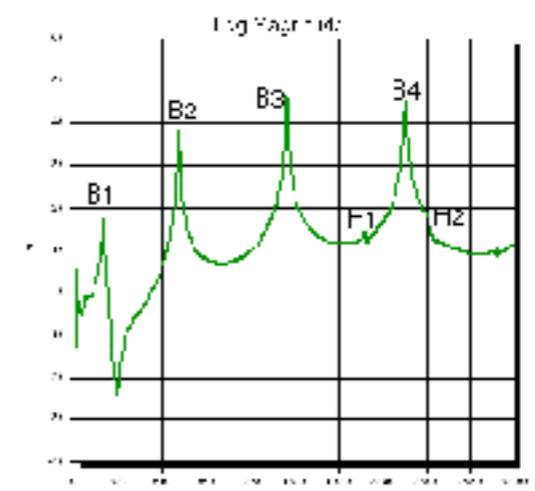
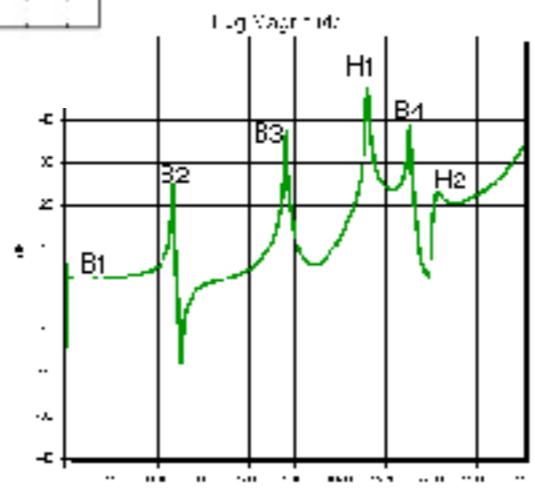
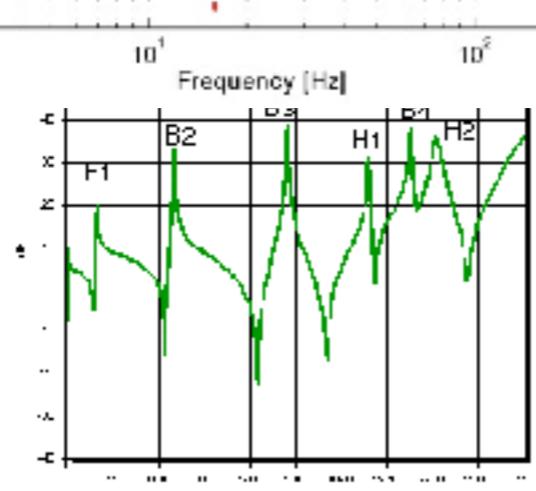
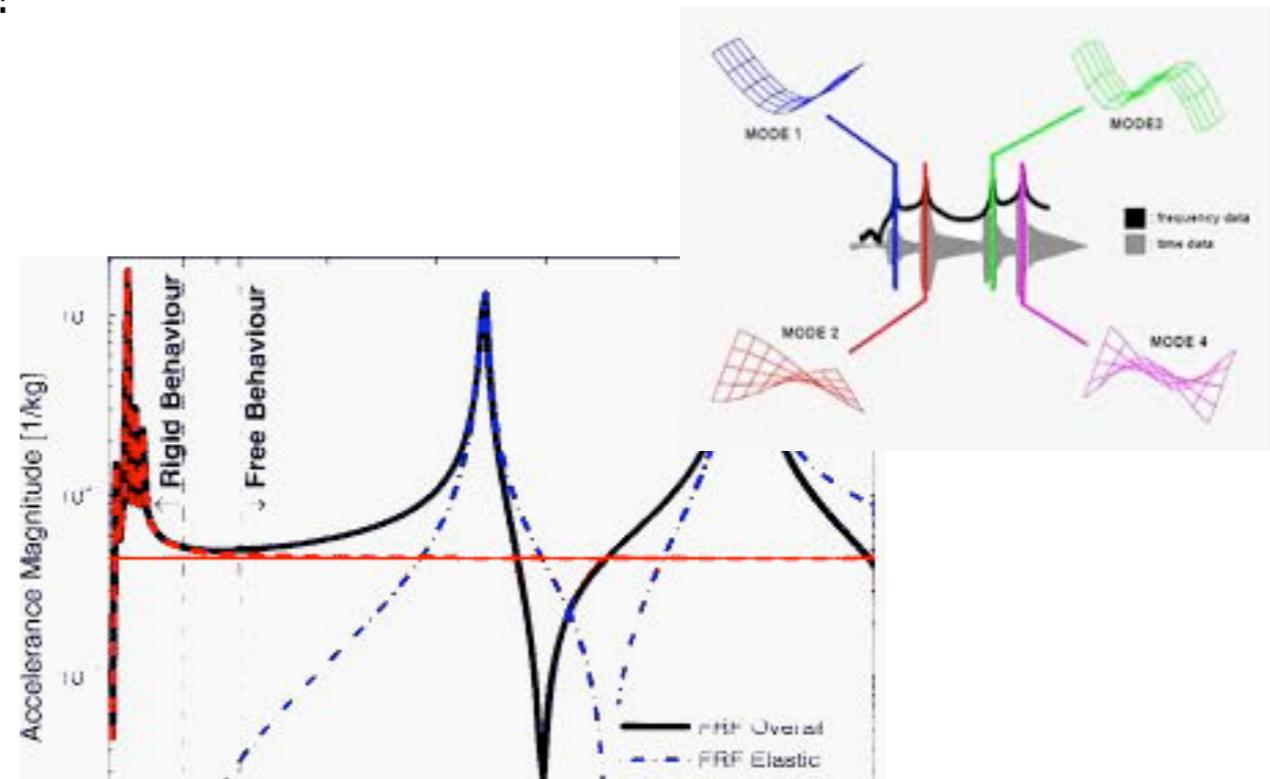
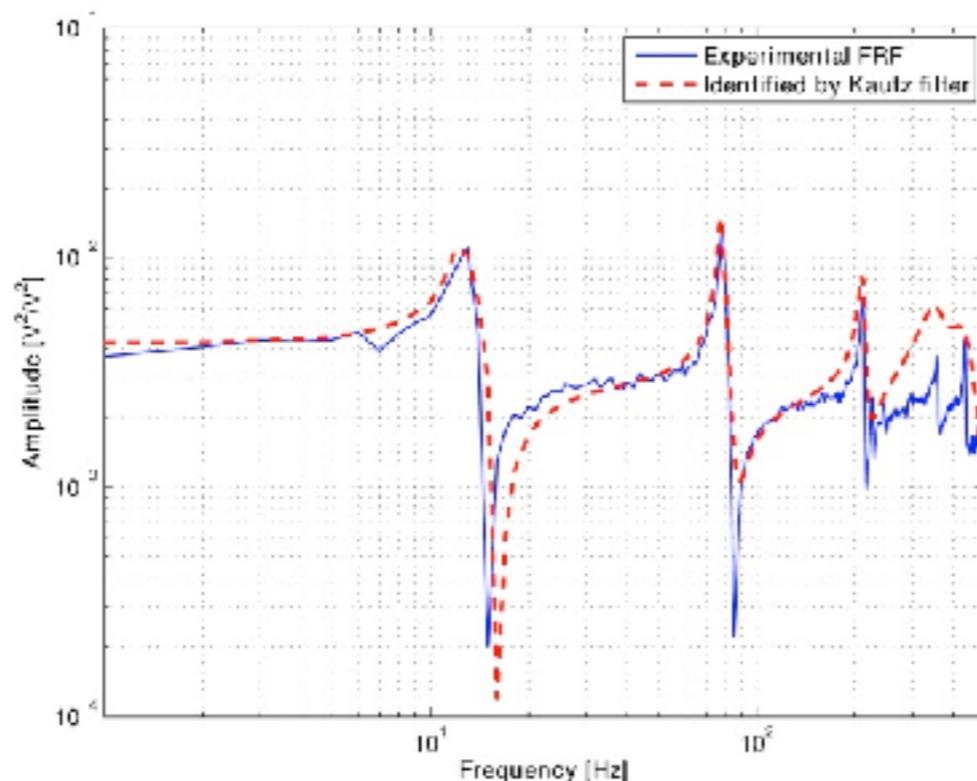
# Sistemi MDOF - modale



# Sistemi MDOF - modale

..identificazione..

Con identificazione si intende un processo che dalle FRF sperimentali, permette di calcolare Autovalori ed Autovettori del sistema, e costruire un modello matematico dello stesso che abbia delle FRF quanto più prossime a quelle misurate!



# Sistemi MDOF - modale

Ricordiamo che per le proprietà dei residui basta misurare un numero limitato di FRF (complete)..

$$[H(\omega)]_s = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

..e identificare i parametri del modello  
autovalori ( $\lambda_r$ ) autovettori ( $\phi_r$ ) residui ( $A_r$ )...

$$[H(j\omega)] = [V][j\omega[I] - [\lambda]]^{-1} [L]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_N \end{bmatrix} \quad \text{matrice modale}$$

$$[L] = [Q][V]^T \quad \text{matrice di partecipazione modale}$$

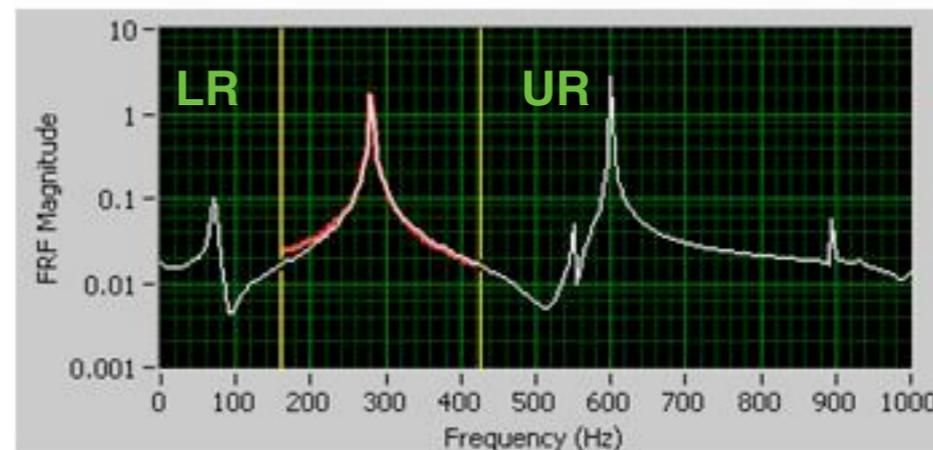
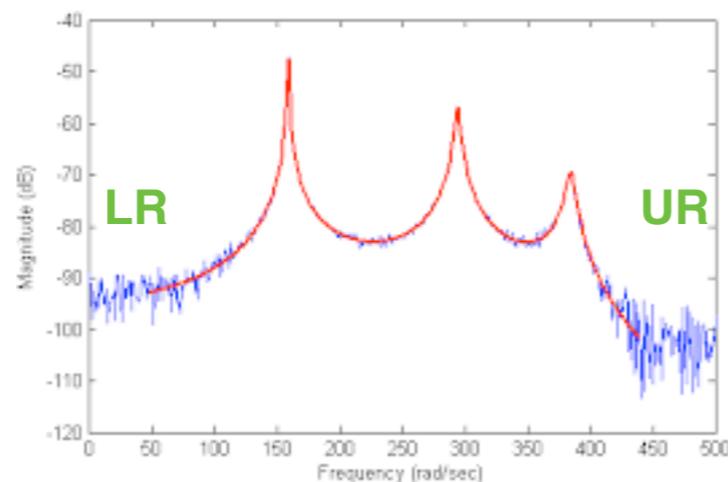
# Sistemi MDOF - modale

Le strutture reali sono continue.. hanno infiniti modi.. tra 0 e infinito...  
se ne misura un numero  $N_m$  (minore di infinito)... si approssima la soluzione!!

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)} + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2}$$

$[UR]$  Upper Residual.. per considerare i modi fuori-banda superiori

$\frac{[LR]}{\omega^2}$  Lower Residual.. per considerare i modi fuori-banda inferiori



# Sistemi MDOF - modale

Metodi di identificazione si classificano:

SDOF vs MDOF: un solo modo o più modi nella banda d'interesse

LOCALI vs GLOBALI: non tengono o tengono conto del fatto che i poli non dipendono da  $i, j$ ,  $p$  modi non dipendono dal punto di eccitazione  $j$ , i coefficienti di partecipazione non dipendono dal punto di misura  $i$

S excitation vs M excitation: si considera una a più colonne contemporaneamente

MODALI vs DIRETTI: identificano i parametri modali o le matrici di  $m, c, k$

REALI vs COMPLESSI: identificano forme modali reali o complesse

TEMPO vs FREQUENZA: identificano parametri modali dalle risposte all'impulso o dalle risposte in frequenza ..schemino..

<https://www.mpihome.com/en/service-support/modal-analysis-basics.html>

<http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/mspace.html>

# Sistemi MDOF - modale

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Calcolo della risposta forzata del sistema...

$$[H(\omega)] = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad X(\omega) = [H(\omega)]F(\omega) \quad x(t) = [h(t)]t(t)$$

con la trasformata inversa di Fourier...

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{14}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & \dots \\ H_{31}(\omega) & \dots & \dots & H_{34}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Analisi di sensitività autovalori ed autovettori alla variazione dei parametri del sistema...

**da aggiungere..**

Calcolo delle risposte del sistema a seguito di modifiche strutturali...

**da aggiungere..**

Calcolo delle risposte di sistemi accoppiati...

Aggiornamento parametri modelli numerici...

...

