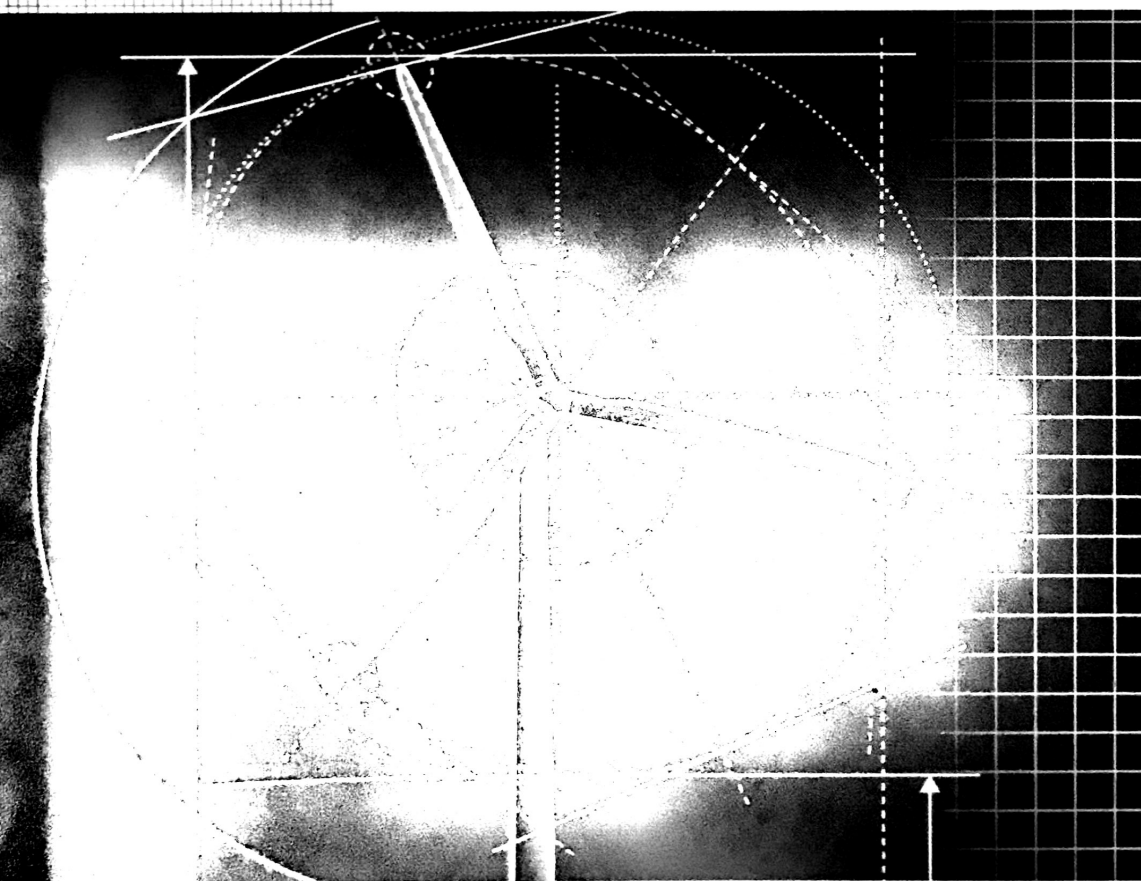


I M P I A N T I
Quaderni per la progettazione

Mario Alejandro Rosato

Progettazione di microturbine eoliche

Guida pratica per la costruzione di turbine
ad asse orizzontale e verticale



 **EPC**
EDITORE

TEORIA GENERALE DELLE MACCHINE EOLICHE



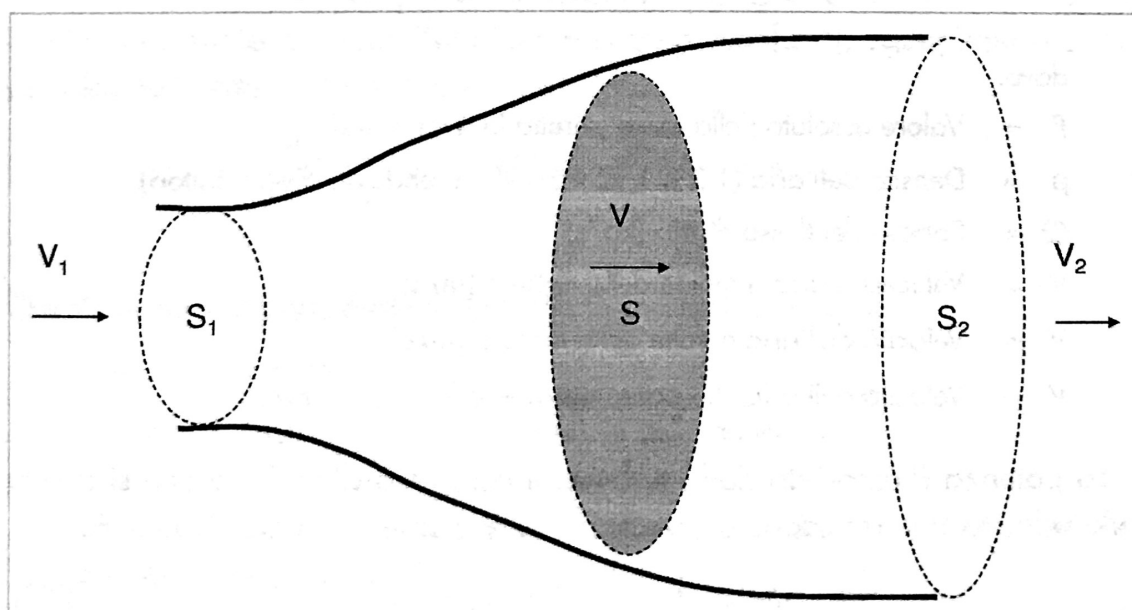
2.1 Il teorema di Betz

Il primo a studiare scientificamente le turbine eoliche fu l'ingegnere e fisico tedesco Albert Betz, il quale, attraverso una serie di ragionamenti giunse a determinare la massima potenza estraibile da un flusso d'aria.

Il Teorema di Betz è tanto fondamentale per le macchine eoliche quanto quello di Carnot per le macchine termiche.

La teoria di Betz si fonda su 2 postulati:

- Il flusso attraversante un'immaginaria sezione S_1 di una turbina, a monte del piano di rotazione della stessa, possiede una velocità V_1 .
- Il flusso in una sezione S_2 , a valle della turbina, possiede una velocità V_2 (vedi Fig. 2.1).



◀ **Figura 2.1**
Il movimento
di un fluido
attraverso
una turbina
ideale

Nella realtà, il flusso a valle della turbina è vorticoso, fatto che complica molto le analisi, per cui l'ipotesi semplificativa di Betz consiste nell'assumere che

la rotazione della turbina non trasmetta al fluido alcun moto in senso tangenziale. In ultima analisi, il flusso è bidimensionale e le sue componenti sono solo assiali e radiali.

In virtù del *Principio di Conservazione dell'Energia*, se una turbina estrae una certa quantità di energia da un flusso d'aria, questo deve cedere la stessa quantità di energia cinetica. Pertanto, la velocità V_2 deve essere inferiore alla velocità V_1 . Se supponiamo che l'aria è incompressibile, allora si deve soddisfare la seguente equazione di continuità:

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 = S \cdot V$$

Si rammenta che dal prodotto di un'area per una velocità si ottiene un volume per unità di tempo ($m^2 \cdot m/s = m^3/s$). Pertanto nell'equazione di continuità il volume d'aria che fluisce attraverso una data area è costante, come conseguenza dell'ipotesi che l'aria sia incompressibile.

Affinché tale equazione sia soddisfatta, la sezione S_1 , relativa al flusso entrante nella turbina, deve essere inferiore alla sezione S_2 , relativa al flusso in uscita.

La sezione S indica la superficie spazzata dalla rotazione dell'elica.

Se valutiamo la forza (F) esercitata dalla turbina sul flusso d'aria in movimento, per l'*Equazione di Eulero*, il suo valore assoluto è dato dalla seguente espressione:

$$F = Q \cdot (V_1 - V_2) = S \cdot V \cdot \rho \cdot (V_1 - V_2)$$

dove:

F = Valore assoluto della forza (diretta in avanti) [N]

ρ = Densità dell'aria (1,2 a 1,25 kg/m³, dipende da diversi fattori)

Q = Portata del flusso d'aria [kg/s]

V_1 = Velocità d'aria a monte della turbina [m/s]

V_2 = Velocità dell'aria a valle della turbina [m/s]

V = Velocità dell'aria che passa attraverso la turbina [m/s]

La potenza P assorbita dalla turbina, il cui punto d'applicazione si sposta alla velocità V in relazione alle molecole d'aria in movimento, è data da:

$$P = F \cdot V = \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot (V_1 - V_2) \quad [2.1]$$

Se ora consideriamo la potenza assorbita dalla turbina come la variazione



di energia cinetica della massa d'aria (ΔE), passante attraverso la sezione S della turbina per ogni secondo, avremo la seguente espressione:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V \cdot (V_1^2 - V_2^2) = P \quad [2.2]$$

Uguagliando l'equazione [2.1] e l'equazione [2.2] otteniamo:

$$P = \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V \cdot (V_1^2 - V_2^2)$$

$$V \cdot (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \cdot (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} \cdot (V_1 - V_2) \cdot (V_1 + V_2)$$

dalla quale, semplificando, raggiungiamo l'importante conclusione che:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad [2.3]$$

Se successivamente sostituiamo la [2.3] nella [2.1] otterremo la seguente espressione:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (V_1 + V_2) \cdot (V_1^2 - V_2^2) \quad [2.4]$$

Se assumiamo che V_1 sia costante, potremo poi calcolare il valore di V_2 che rende massima la potenza P derivando l'equazione [2.4], uguagliando a 0 e calcolando le radici, come segue:

$$\frac{dP}{dV_2} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (V_1^2 - 2 \cdot V_1 \cdot V_2 - 3 \cdot V_2^2) = 0$$

Questa equazione quadratica ammette le seguenti due radici:

$$V_2 = -V_1 \text{ (fisicamente insignificante)}$$

$$V_2 = V_1/3 \text{ (corrisponde al massimo valore della potenza)}$$

Se ora introduciamo il valore V_2 nell'espressione di P , otterremo il valore massimo di potenza estraibile dal flusso d'aria:

$$P_{\max} = \frac{8}{27} \cdot \rho \cdot S \cdot V_1^3 = \frac{16}{27} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot V_1^3 \right)$$

TEORIA AERODINAMICA SEMPLIFICATA PER IL CALCOLO DEI ROTORI AD ASSE ORIZZONTALE



3.1 Definizione del problema

Abbiamo visto nei capitoli precedenti che l'aria, passando attraverso ad una turbina eolica in movimento, perde velocità nel verso in cui si muove il flusso. Dovuto al fatto che le turbine degli aerogeneratori sono sprovviste di alette direzionali o deflettori, il movimento di rotazione delle pale genera una componente tangenziale nel moto dell'aria. L'espansione del flusso, invece, genera una componente radiale. È stato dimostrato che tale componente radiale è trascurabile, mentre quella tangenziale non lo è poiché produce vortici che comportano perdite di energia.

Esistono diversi modelli matematici del funzionamento delle eliche. Per la progettazione di una mini o microturbina eolica, possiamo avvalerci di una teoria completa ma semplificata, la cui validità è stata verificata sperimentalmente da diversi autori. Le nostre ipotesi di lavoro saranno dunque le seguenti:

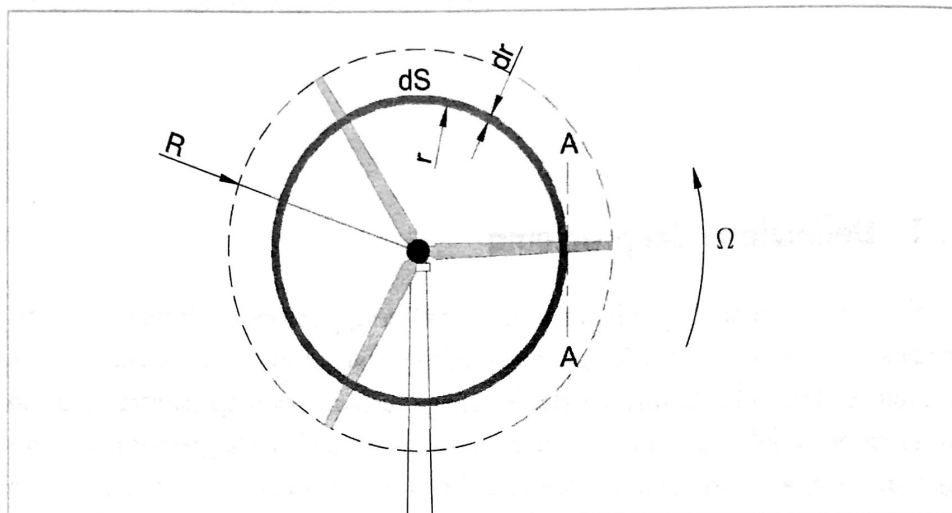
- a) infinitamente a monte della turbina, l'aria si muove sull'asse x con velocità V_1 , e la pressione è P_0 .
- b) Infinitamente a valle della turbina, l'aria si muove sull'asse x con velocità $V_2 < V_1$, ed inoltre è animata da un moto rotazionale la cui velocità angolare è ω . La pressione atmosferica è sempre pari a P_0 .
- c) Un infinitesimo a monte del piano di rotazione della turbina, la pressione è P , la velocità sull'asse delle x è V ed inoltre la rotazione delle pale con velocità angolare Ω induce sull'aria un moto rotazionale con la stessa velocità angolare.
- d) Un infinitesimo a valle, del piano di rotazione della turbina, la pressione è P_1 , la velocità sull'asse delle x è sempre V , ma il moto rotazionale indotto sull'aria ha una velocità angolare è pari ad $(\Omega + \omega)$.

e) Analizzeremo i flussi d'aria attraverso un'area differenziale dS , situata ad una distanza generica r dall'asse di rotazione della turbina. Lo spessore di questo anello differenziale è dr .

Nella figura 3.1 rappresentiamo la turbina vista dal lato a monte, e le grandezze corrispondenti. Si osserva che:

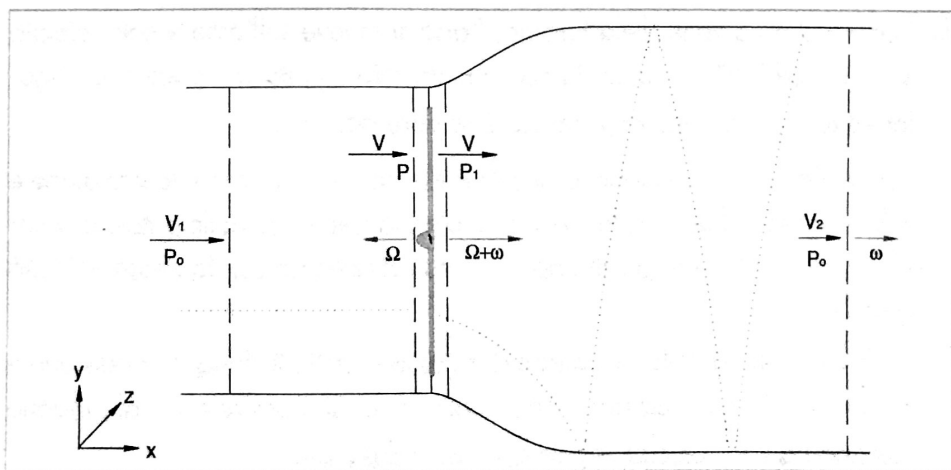
$$dS = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

Figura 3.1
Vista frontale della turbina e della corona differenziale in esame



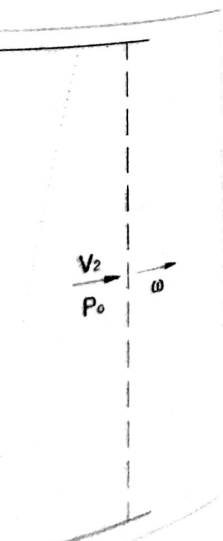
Nella figura 3.2 rappresentiamo la turbina vista di lato, come se fosse un disco di spessore infinitesimale. La linea tratteggiata rappresenta il percorso di una particella d'aria: unidirezionale a monte del rotore e vorticoso a valle del medesimo. Le velocità angolari Ω , ω e $(\Omega+\omega)$ sono rappresentate dai loro vettori (ortogonali al piano di rotazione, e quindi paralleli all'asse x) e in colore grigio più chiaro. Per il principio di azione e reazione, il moto rotatorio delle particelle d'aria ha il verso contrario a quello delle pale della turbina. Le velocità lineari V_1 , V e V_2 sono rappresentate dai vettori in colore nero.

Figura 3.2
Vista laterale della turbina, delle velocità, delle pressioni e del flusso d'aria attraverso un elemento differenziale dell'elica

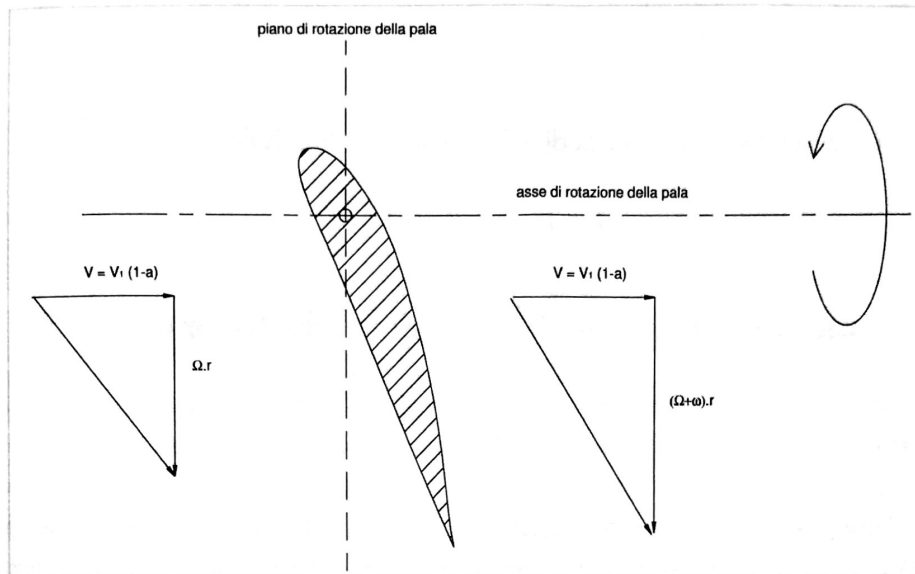


ziale dS , situata ad
ina. Lo spessore di
a monte, e le gran-

come se fosse un
enta il percorso di
orticoso a valle del
entate dai loro vet-
asse x) e in colore
oto rotatorio delle
a turbina. Le velo-
re nero.



Nella figura 3.3 osserviamo la composizione delle velocità a monte e a valle dell'elemento di pala a cui si riferisce la sezione A-A della figura 3.1.



Per calcolare la potenza sviluppata da un elemento differenziale di pala, innanzi tutto utilizzeremo le equazioni di quantità di movimento della meccanica newtoniana classica e, successivamente, quelle delle forze aerodinamiche applicate ad un elemento della pala, già descritte nel capitolo 2. L'integrazione estesa a tutta la lunghezza della pala ci fornirà dunque la potenza totale. Conoscendo la potenza massima ottenibile, saremmo dunque in grado di definire, per ogni punto della pala, la corda e l'angolo di attacco ottimali del profilo.

Prima di passare a calcolare la potenza in presenza di vortici e le grandezze che ne derivano, necessitiamo definire alcuni coefficienti ausiliari che rendono più facili i calcoli.

3.1.1 Coefficiente di perdita di velocità, a

Siccome la velocità attraverso l'elica, V , non è nota a priori, allora risulta utile definire un coefficiente adimensionale che ci consenta di esprimere V in funzione della velocità del vento a monte della pala, V_1 . Si definisce allora il coefficiente a come:

$$a = 1 - \frac{V}{V_1} \quad \text{quindi} \quad V = V_1 \cdot (1 - a)$$



QUADERNI
per la progettazione

Figura 3.3
Composizione
vettoriale delle
velocità in un
elemento
di pala
generico
dell'elica in
movimento
(corrispondente
alla sezione
A-A della
figura 3.1)

Nel dimostrare il teorema di Betz (Capitolo 2, paragrafo 2.1 a pag. 25) avevamo trovato che si deve compiere la seguente relazione fra V , V_1 e V_2 :

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Se introduciamo l'equivalente di V in funzione di V_1 , risulta:

$$V = V_1 \cdot (1 - a) = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$2 \cdot V_1 \cdot (1 - a) - V_1 = V_2$$

$$V_2 = V_1 \cdot (2 - 2a - 1)$$

$$V_2 = V_1 \cdot (1 - 2a)$$

Pertanto, il coefficiente a ci consente di calcolare alcune velocità in funzione di altre secondo la nostra convenienza. Pur non conoscendo a priori il valore a sappiamo inoltre che lo stesso deve essere compreso fra 0 ed 1/2, ed idealmente dovremmo procurare che sia il più vicino possibile a 1/3. Questa conclusione è conseguenza del Teorema di Betz perché, nelle condizioni ideali di massima potenza, il valore di a deve essere pari ad 1/3. Un valore di a pari ad 1/2 renderebbe nulla V_2 , cosa fisicamente impossibile. Un valore di a nullo comporterebbe che V_2 è pari a V_1 , quindi la turbina sarebbe frenata.

3.1.2 Coefficiente di velocità specifica locale λ_r

È il coefficiente λ definito in un punto generico della pala situato a distanza r dal centro.

Ricordiamo che λ vale per l'estremità della pala secondo la formula:

$$\lambda = \frac{u}{V_1} = \frac{\Omega \cdot R}{V_1}$$

Analogamente, si definisce il coefficiente λ_r in un punto generico come:

$$\lambda_r = \frac{\Omega \cdot r}{V_1} = \frac{\lambda \cdot r}{R}$$

3.1.3 Coefficiente di velocità angolare

La velocità angolare della turbina è pari ad Ω . L'interazione delle pale del rotore con l'aria induce su quest'ultima una componente rotazionale, la cui velocità angolare è pari ad ω . Definiamo la relazione fra dette velocità angolari come:

$$a' = \frac{\omega}{2 \cdot \Omega}$$

3.2 La teoria del tubo di flusso anulare con scia vorticoso

I seguenti ragionamenti ci condurranno a trovare le relazioni che legano α , a' e λ . Conoscendo tali relazioni, ricaveremo anche i valori di V , V_2 e ω . Pertanto, conoscendo le velocità relative in ogni punto della pala, potremo applicare la teoria aerodinamica per calcolare prima le forze su una porzione e poi lungo tutta la pala. Il nostro primo obiettivo sarà trovare quali sono le condizioni che massimizzano la potenza, in modo da progettare la geometria della pala affinché vengano raggiunte le prestazioni ottimali.

Osserviamo le figure 3.1 e 3.2. Applicheremo l'equazione di conservazione dell'energia (nota come equazione di *Bernoulli*) ad una sezione infinitamente a monte della turbina e ad un'altra sezione situata a distanza infinitesimale a monte della turbina. In queste condizioni l'equazione di Bernoulli diventa:

$$P_0 + \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} = P + \frac{\rho \cdot V^2}{2}$$

Se applichiamo ora l'equazione di Bernoulli ad una sezione posta un infinitesimo a valle della turbina e ad un'altra sezione posta infinitamente a valle della turbina, otterremo la seguente equazione:

$$P_0 + \frac{\rho \cdot V_2^2}{2} = P_1 + \frac{\rho \cdot V^2}{2}$$

Sottraendo membro a membro entrambe le equazioni si ottiene

$$P_0 + \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} - P_0 - \frac{\rho \cdot V_2^2}{2} = P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} - P_1 - \frac{\rho \cdot V^2}{2}$$

$$\frac{\rho \cdot V_1^2}{2} - \frac{\rho \cdot V_2^2}{2} = P - P_1 = \Delta P$$



Ricordando le relazioni fra V_1 , V_2 ed il coefficiente a postulate nel paragrafo 3.1.1 a pag. 59, possiamo sostituire nell'equazione precedente la velocità V_2 (ignota) con il suo equivalente in funzione di V_1 e a .

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_2^2) = \frac{\rho}{2} \cdot [V_1^2 - V_1^2 \cdot (1-2a)^2]$$

$$\Delta P = \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} \cdot [1 - (1-2a)^2] = \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} \cdot (1 - 1 + 4a - 4a^2)$$

$$\Delta P = 2 \cdot \rho \cdot V_1^2 \cdot a \cdot (1-a)$$

La forza assiale esercitata dal vento sulla corona differenziale dS si può dunque calcolare come segue:

$$dF_a = \Delta P \cdot dS = 2 \cdot \rho \cdot V_1^2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$dF_a = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot r \cdot dr \quad [3.1]$$

Ora applicheremo l'equazione di Bernoulli ad entrambi i lati di una corona circolare, di raggio r ed area dS . Dalla figura 3.3 si evince che, essendo il flusso bidimensionale (componenti di velocità dell'aria in x e in y), dobbiamo considerare le risultanti vettoriali di dette componenti di velocità, V_m e V_v (i suffissi stanno a indicare, rispettivamente, le risultanti a monte e a valle della superficie dS).

Si otterrà:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot V_m^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot V_v^2}{2}$$

Per il Teorema di Pitagora (Fig. 3.3) abbiamo che:

$$V_m^2 = V^2 + (\Omega \cdot r)^2 = V_1^2 \cdot (1-a)^2 + (\Omega \cdot r)^2$$

$$V_v^2 = V^2 + (\Omega + \omega)^2 \cdot r^2 = V_1^2 \cdot (1-a)^2 + (\Omega + \omega)^2 \cdot r^2$$

Rimpiazzando i valori di V_m e V_v nell'equazione di Bernoulli e riordinando i termini otteniamo:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{\rho}{2} \cdot [V^2 + (\Omega + \omega)^2 \cdot r^2 - V^2 - (\Omega \cdot r)^2]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \cdot [(\Omega + \omega)^2 - \Omega^2]$$



$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \cdot [(\Omega^2 + 2\Omega\omega + \omega^2) - \Omega^2]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \cdot [2\Omega\omega + \omega^2]$$

Se ora utilizziamo il coefficiente a' definito al punto 3.1.3, possiamo rimpiazzare la componente ignota ω per il suo equivalente in funzione della componente nota Ω :

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \cdot [2\Omega \cdot (2\Omega a') + (2\Omega a')^2]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \cdot [4\Omega^2 a' + 4\Omega^2 a'^2]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \Omega^2}{2} \cdot [a' + a'^2]$$

$$\Delta p = 2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot a' \cdot [1 + a']$$

La spinta assiale sulla corona dS varrà, allora:

$$dF_a = \Delta p \cdot dS = 2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot a' \cdot (1 + a') \cdot (\pi \cdot 2r \cdot dr)$$

$$dF_a = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot a' \cdot (1 + a') \cdot r^3 dr \quad [3.2]$$

Abbiamo dunque ottenuto due espressioni equivalenti per la forza dF_a , una in funzione del coefficiente a e della velocità V_1 e l'altra in funzione del coefficiente a' e della velocità angolare Ω .

Uguagliando dunque l'equazione [3.1] con l'equazione [3.2] otteniamo:

$$4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^2 \cdot a \cdot (1 - a) \cdot r \cdot dr = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot a' \cdot (1 + a') \cdot r^3 dr$$

$$V_1^2 \cdot a \cdot (1 - a) = \Omega^2 \cdot a' \cdot (1 + a') \cdot r^2$$

$$\frac{a \cdot (1 - a)}{a' \cdot (1 + a')} = \frac{\Omega^2 \cdot r^2}{V_1^2}$$

Ricordando la definizione del coefficiente di velocità specifica locale, λ_r pre-

sentata al punto 3.1.2, l'equazione precedente diventa:

$$\lambda_r^2 = \frac{a \cdot (1 - a)}{a' \cdot (1 + a')} \quad [3.3]$$

Ora che conosciamo i rapporti fra a , a' e λ_r , possiamo calcolare la potenza erogata dal differenziale di pala. Dalla figura 3.3 desumiamo che, poiché la componente assiale di velocità del vento, V , rimane costante ad un lato e all'altro della pala, sarà solo la componente tangenziale a generare lavoro. Per calcolare la forza tangenziale sull'elemento di pala, ricordiamo che il principio di impulso e quantità di moto stabilisce che:

$$F \cdot t = m \cdot \Delta V$$

dove:

F = è la forza agente su una porzione di materia di massa

m = durante un tempo t , e

ΔV = indica la variazione della velocità che subirà la massa m .

Deduciamo dunque che:

$$F = \frac{m}{t} \cdot \Delta V = q \cdot \Delta V$$

perché, per definizione, il quoziente fra una unità di massa ed una unità di tempo è la portata, q . Assumendo che l'aria si comporti come un fluido incompressibile, fatto che si riscontra vero nelle condizioni di operazione abituali di una turbina eolica, la portata dq che attraversa l'area dS rappresentata nella figura 3.1 si può calcolare come:

$$dq = \rho \cdot dS \cdot V$$

Dalla figura 3.3 deduciamo che quando l'aria attraversa la turbina, la componente di flusso assiale non subisce variazioni di velocità (per le ipotesi del teorema di Betz) mentre la componente di flusso tangenziale subisce una variazione di velocità, ΔV , data da:

$$\Delta V = (\Omega + \omega) \cdot r - \Omega \cdot r = \omega \cdot r$$

per cui possiamo esprimere la forza tangenziale esercitata dall'aria sull'elemento differenziale di pala all'interno della corona di area dS come:

$$dF_t = \rho \cdot dS \cdot V \cdot \omega \cdot r$$

[3.3]

lare la potenza
che, poiché la
e ad un lato e
generare lavoro.
amo che il prin-

Possiamo dunque rimpiazzare dS per la sua espressione completa, e V per il suo equivalente in funzione della velocità del vento nota, V_1 , utilizzando per questo scopo il coefficiente a :

$$dF_t = \rho \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr) \cdot [V_1 \cdot (1-a)] \cdot \omega \cdot r$$

$$dF_t = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \omega \cdot r^2 \cdot dr$$

Rimpiazziamo ora la grandezza ignota ω per il suo equivalente, utilizzando il coefficiente a' :

$$dF_t = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot 2 \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^2 \cdot dr$$

$$dF_t = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^2 \cdot dr \quad [3.4]$$

La potenza generata da questa forza, per definizione, è uguale al prodotto fra il momento che produce rispetto al centro di rotazione e la sua velocità angolare, quindi avremo:

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^2 \cdot dr \cdot r \cdot \Omega$$

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega^2 \cdot a' \cdot r^3 \cdot dr$$

Rimpiazziamo Ω^2 per il suo equivalente in funzione di λ_r

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot (1-a) \cdot \frac{\lambda_r^2}{r^2} \cdot a' \cdot r^3 \cdot dr$$

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^2 \cdot a' \cdot r \cdot dr \quad [3.5]$$

Siccome si deve compiere sempre che $\lambda_r > 0$, la potenza sarà massima quando il prodotto $a' \cdot (1-a)$ sarà massimo, cioè quando la sua derivata sarà nulla. Siccome a e a' sono funzioni una dell'altra, allora la derivata del prodotto di due funzioni (nel nostro caso la funzione $(1-a)$ e la funzione a') si calcola con la regola del prodotto

$$y = f_{(x)} \cdot g_{(x)} \Rightarrow y' = f'_{(x)} \cdot g_{(x)} + f_{(x)} \cdot g'_{(x)}$$

Pertanto:

$$\frac{d}{da} (1-a) \cdot a' + (1-a) \frac{da'}{da} = 0$$

$$(1-a) \cdot \frac{da'}{da} = a'$$

$$(1-a) \cdot da' = a' \cdot da$$

[3.6]

aria sull'ele-
me:



Sappiamo che a e a' sono legate dall'equazione [3.3], la quale possiamo riscrivere come:

$$\lambda_r^2 \cdot a' \cdot (1 + a') = a \cdot (1 - a)$$

Siccome a' è funzione di a , possiamo differenziare membro a membro rispetto ad a quest'ultima equazione, applicando la regola della catena:

$$D[f_{(g(x))}] = f'_{(g(x))} \cdot g'(x)$$

Otteniamo dunque:

$$\lambda_r^2 \cdot (1 + 2a') \cdot \frac{da'}{da} = (1 - 2a)$$

$$\lambda_r^2 \cdot (1 + 2a') \cdot da' = (1 - 2a) \cdot da \quad [3.7]$$

Moltiplicando membro a membro la [3.6] e la [3.7] otteniamo:

$$\lambda_r^2 \cdot (1 + 2a') \cdot a' \cdot da \cdot da' = (1 - 2a) \cdot (1 - a) \cdot da \cdot da'$$

$$\lambda_r^2 \cdot (1 + 2a') \cdot a' = (1 - 2a) \cdot (1 - a)$$

Rimpiazzando ora il valore di λ_r^2 dall'equazione [3.3] risulta:

$$\frac{a \cdot (1 - a)}{a' \cdot (1 + a')} = \frac{(1 - 2a) \cdot (1 - a)}{(1 + 2a') \cdot a'}$$

$$\frac{a}{(1 + a')} = \frac{(1 - 2a)}{(1 + 2a')}$$

$$a + 2aa' = 1 - 2a + a' - 2aa'$$

$$4aa' - a' = 1 - 3a$$

$$a' = \frac{1 - 3a}{4a - 1} \quad [3.8]$$

Riassumendo, le equazioni [3.3] e [3.8] vincolano a , a' e λ affinché la potenza estratta sia massima.

Nell'equazione [3.5] rimpiazziamo ora r per il suo equivalente in funzione di λ_r definito al paragrafo 3.1.2.

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot a' \cdot (1 - a) \cdot \lambda_r^2 \cdot \frac{R \cdot \lambda_r}{\lambda} \cdot dr$$

Sempre in base alla stessa equivalenza definita in 3.1.2, possiamo sostituire dr come segue:

$$\frac{dr}{d\lambda_r} = \frac{R}{\lambda} \Rightarrow dr = \frac{R}{\lambda} \cdot d\lambda_r$$

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot a' \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^2 \cdot \frac{R \cdot \lambda_r}{\lambda} \cdot \frac{R}{\lambda} \cdot d\lambda_r$$

$$dP = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot \frac{R^2}{\lambda^2} \cdot a' \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^3 \cdot d\lambda_r$$

Pertanto è possibile ottenere la potenza totale prodotta dalla turbina integrando fra $\lambda_r = 0$ (centro del rotore) e $\lambda_r = \lambda$ (estremità della pala). Quindi:

$$P = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot \frac{R^2}{\lambda^2} \int_0^\lambda a' \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^3 \cdot d\lambda_r$$

In queste condizioni, il coefficiente di potenza C_p vale:

$$C_p = \frac{P}{\frac{\rho}{2} V_1^3 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot R^2}{\frac{\rho}{2} V_1^3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \lambda^2} \int_0^\lambda a' \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^3 \cdot d\lambda_r$$

$$C_p = \frac{8}{\lambda^2} \int_0^\lambda a' \cdot (1-a) \cdot \lambda_r^3 \cdot d\lambda_r \quad \begin{array}{l} \text{[3.9]} \\ \text{detta integrale} \\ \text{di Glauert} \end{array}$$

La risoluzione algebrica dell'integrale di *Glauert* è estremamente difficile, se non impossibile, a causa della complessità delle relazioni fra a , a' e λ_r .

Nel 1935 il matematico e ricercatore aerodinamico inglese *Herman Glauert* la risolse con un metodo grafico. Oggi risulta assai più comodo tabulare a' e λ_r in funzione di a utilizzando un foglio di calcolo, e ricavare mediante integrazione discreta il valore di C_p massimo risultante per ogni valore di λ . Il nostro compito viene così agevolato perché il valore di a è limitato all'intervallo $1/2$ e $1/3$, altrimenti non può avere senso fisico, quindi è possibile dividere questo intervallo in n intervalli discreti e integrare semplicemente sommando le celle adiacenti. La tabella 3.1 esemplifica il calcolo nell'intervallo di λ_r compreso fra 0 (centro di rotazione della pala) e $\lambda_r=0,5$.

Tab. 3.1 - Esempio di calcolo dell'integrale dell'equazione [3.9] mediante foglio elettronico

a	λ_r	a'	Integrale	Cp
0,25	0	0	0	0
0,251	0,006966	61,75	1,09E-07	0,017952
0,252	0,014007	30,5	5,5E-07	0,022441
0,253	0,021127	20,0833333	1,56E-06	0,027917
0,254	0,028327	14,875	3,37E-06	0,033635
0,255	0,03561	11,75	6,25E-06	0,039446
0,256	0,042979	9,66666667	1,05E-05	0,045301
0,257	0,050435	8,17857143	1,63E-05	0,051179
0,258	0,057983	7,0625	2,4E-05	0,057068
0,259	0,065623	6,19444444	3,39E-05	0,062965
0,26	0,073361	5,5	4,63E-05	0,068865
0,261	0,081198	4,93181818	6,16E-05	0,074767
0,262	0,089138	4,45833333	8,01E-05	0,08067
0,263	0,097184	4,05769231	0,000102	0,086573
0,264	0,10534	3,71428571	0,000128	0,092476
0,265	0,11361	3,41666667	0,000159	0,098379
0,266	0,121998	3,15625	0,000194	0,104281
0,267	0,130507	2,92647059	0,000235	0,110183
0,268	0,139143	2,72222222	0,000281	0,116086
0,269	0,147909	2,53947368	0,000334	0,121989
0,27	0,15681	2,375	0,000393	0,127893
0,271	0,165853	2,22619048	0,00046	0,133798
0,272	0,175041	2,09090909	0,000535	0,139705
0,273	0,184381	1,9673913	0,000619	0,145615
0,274	0,193878	1,85416667	0,000712	0,151528
0,275	0,20354	1,75	0,000815	0,157444
0,276	0,213372	1,65384615	0,00093	0,163364
0,277	0,223383	1,56481481	0,001056	0,16929
0,278	0,233578	1,48214286	0,001195	0,175221
0,279	0,243967	1,40517241	0,001348	0,181159
0,28	0,254558	1,33333333	0,001516	0,187103
0,281	0,265361	1,26612903	0,001699	0,193056
0,282	0,276383	1,203125	0,0019	0,199018
0,283	0,287637	1,14393939	0,00212	0,20499

Tab. 3.1 (segue) - Esempio di calcolo dell'integrale dell'equazione [3.9] mediante foglio elettronico

a	λ_r	a'	Integrale	Cp
0,284	0,299133	1,08823529	0,00236	0,210972
0,285	0,310883	1,03571429	0,002621	0,216966
0,286	0,3229	0,98611111	0,002906	0,222974
0,287	0,335196	0,93918919	0,003216	0,228995
0,288	0,347788	0,89473684	0,003554	0,235032
0,289	0,36069	0,8525641	0,003921	0,241086
0,29	0,373919	0,8125	0,00432	0,247157
0,291	0,387494	0,77439024	0,004753	0,253248
0,292	0,401435	0,73809524	0,005224	0,25936
0,293	0,415763	0,70348837	0,005737	0,265494
0,294	0,430501	0,67045455	0,006293	0,271653
0,295	0,445675	0,63888889	0,006898	0,277838
0,296	0,461312	0,60869565	0,007556	0,284051
0,297	0,477444	0,57978723	0,008272	0,290295
0,298	0,494102	0,55208333	0,00905	0,296571
0,298347	0,500004	0,54275128	0,009331	0,298601

La figura 3.4 mostra il C_p calcolato nel modo descritto in precedenza, nell'intervallo $0 < \lambda < 12$.

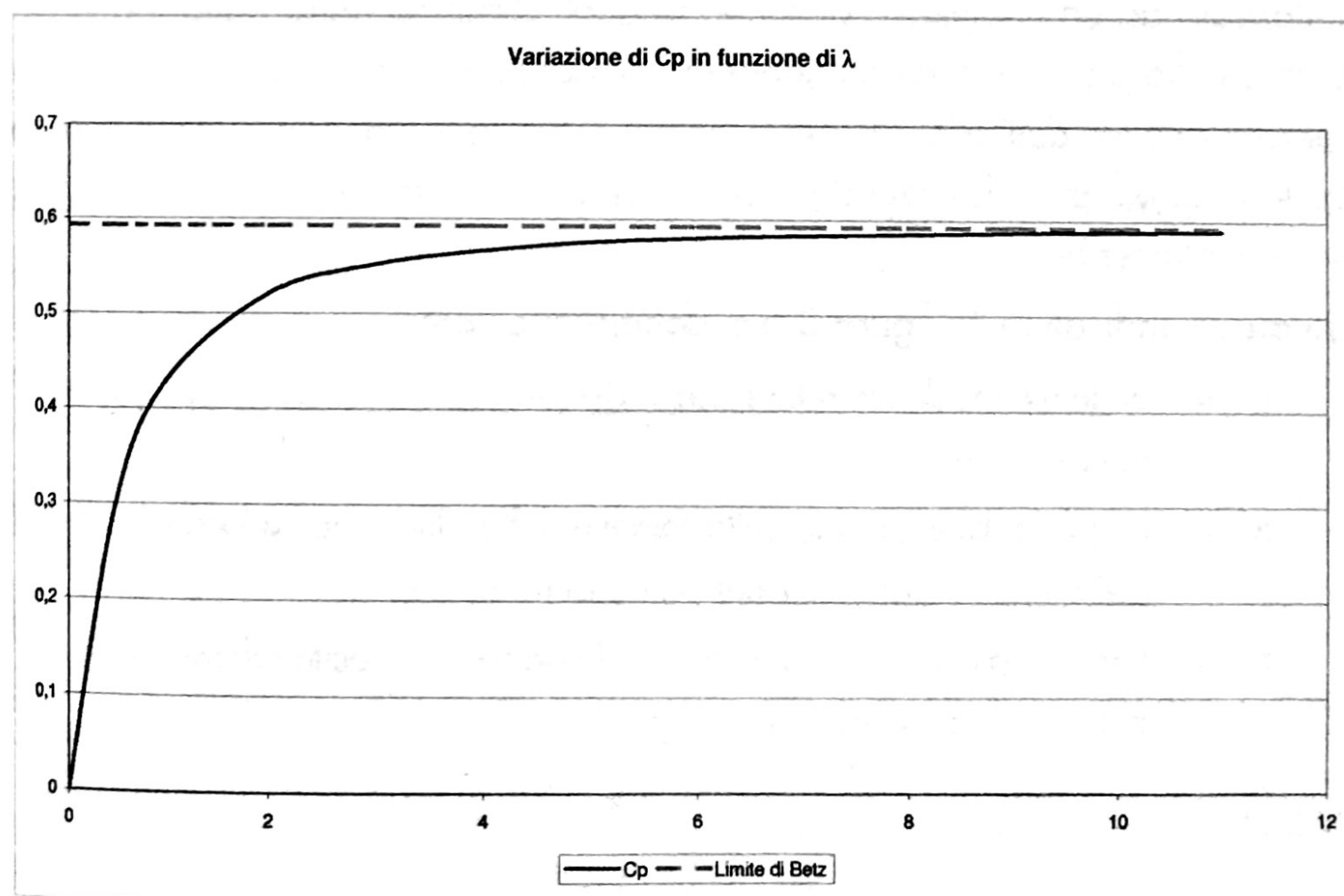


Figura 3.4
Variazione del coefficiente di potenza C_p in funzione di λ , di una pala reale comparata con il limite di Betz. Rielaborazione con foglio elettronico dell'integrale di Glauert (1935) realizzata dall'Autore

La teoria di *Glauert*, condensata nella figura 3.4, evidenzia che il rendimento aerodinamico cresce con λ e si avvicina in modo asintotico al limite di Betz. Con questa teoria non siamo ancora in grado di progettare una pala, ma le espressioni ottenute in precedenza ci servono a definire le condizioni al contorno che ogni elemento di pala deve soddisfare affinché la pala, nel suo insieme, risulti ottima.

3.3 La teoria delle forze aerodinamiche sull'elemento di pala

Ora, affronteremo la progettazione delle pale dal punto di vista delle forze aerodinamiche agenti sull'elemento differenziale della pala già definito nelle figure 3.1 e 3.3. Utilizzeremo i risultati ottenuti nel paragrafo 3.2 mediante la teoria di *Glauert* delle velocità indotte (principalmente le espressioni di a e a').

È doveroso fare una premessa alla trattazione che esporremo in seguito: nella progettazione di turbine commerciali di grande taglia generalmente si utilizzano modelli di calcolo più sofisticati di quello che esporremo in seguito. Poiché i profili delle pale delle turbine di piccola potenza operano in condizioni di basso Re e, considerando che in prossimità del suolo il profilo di velocità del vento è irregolare, non ha molto senso basare il progetto delle pale in teorie più complesse. La validità del metodo descritto di seguito è stata comunque verificata in galleria del vento da diversi autori riportati in Bibliografia.

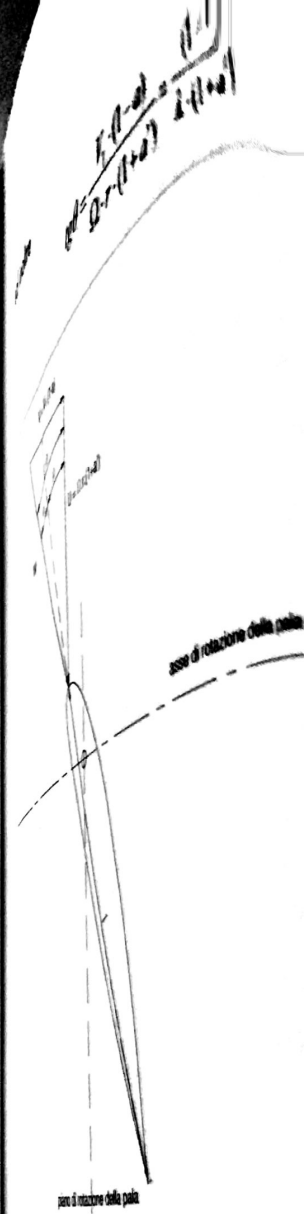
Osserviamo la figura 3.1. L'esperienza insegna che un elemento della pala compreso tra due raggi, r e $r+dr$ e in presenza di una corrente di aria, sarà sottoposto ad un complesso di forze, le quali dipenderanno dalla forma del profilo della pala nonché dall'angolo d'incidenza tra la corda del profilo e la velocità relativa dell'aria, W . Nella figura 3.5 si osservano le velocità relative fra la pala e l'aria, derivate dalla figura 3.3 e dalla teoria di *Glauert* trattata precedentemente.

Gli angoli indicati nella figura 3.5 si definiscono come:

- α = angolo d'incidenza sulla sezione del profilo, definita alla distanza r dal centro di rotazione;
- φ = angolo di calettamento della sezione del profilo o passo locale dell'elica alla distanza r dal centro di rotazione;
- θ = angolo fra il piano di rotazione della pala e la velocità relativa W , a distanza r dal centro di rotazione.

Dalla figura stessa si deduce che:

$$\theta = \alpha + \varphi$$



La figura 3.5 si deduce inoltre che:

$$W^2 = U^2 + V^2 = V_1^2 \cdot (1-a)^2 + \Omega^2 \cdot r^2$$

velocità relativa W , incidendo sul profilo con l'angolo α .

C_L - portanza o portanza;

C_D - forza di trascinamento o resistenza.

Queste forze sono dati dalle due seguenti espressioni:

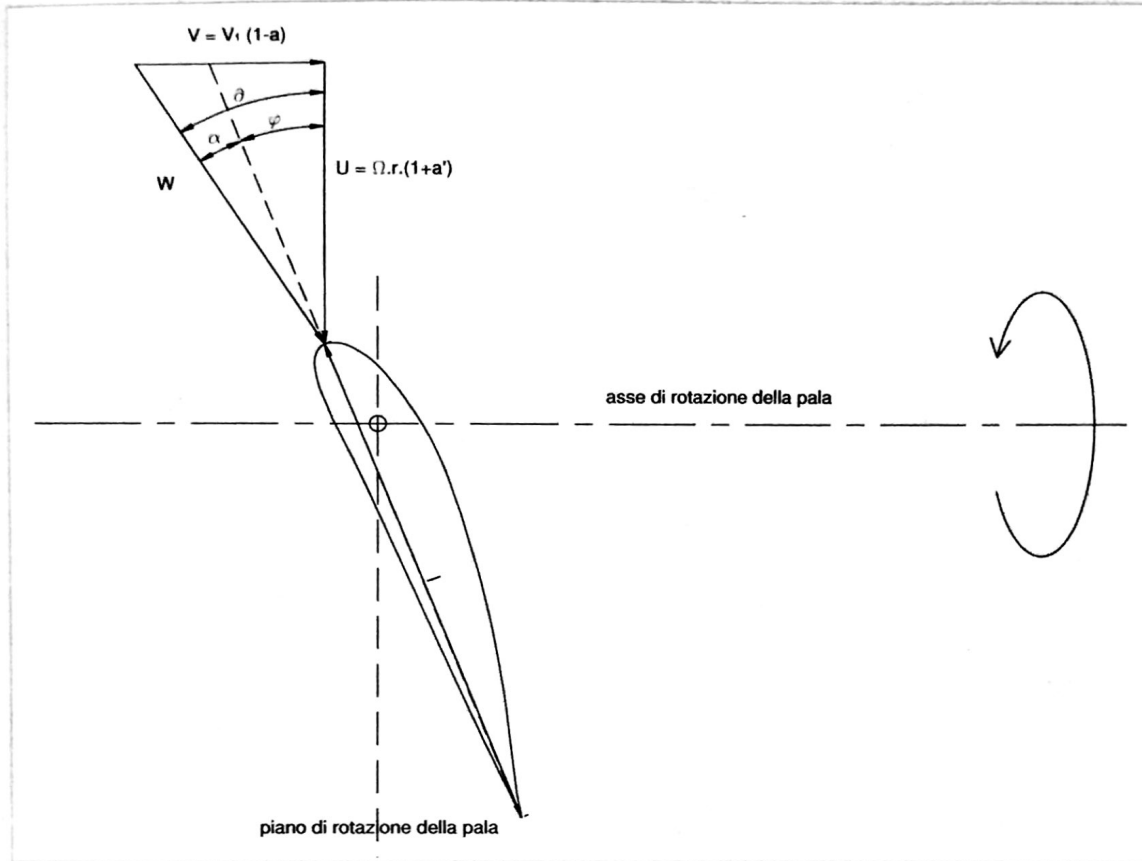
$$dF_z = \frac{\rho}{2} C_L \cdot l \cdot W^2$$

$$dF_x = \frac{\rho}{2} C_D \cdot l \cdot W^2$$

La portanza dF_z è diretta perpendicolarmente alla corda del profilo e la resistenza dF_x è diretta lungo la corda del profilo.

ed inoltre

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_1 \cdot (1-a)}{\Omega \cdot r \cdot (1+a')} = \frac{(1-a)}{\lambda \cdot (1+a')} \quad [3.10]$$



QUADERNI
per la progettazione



Figura 3.5
Schema delle velocità relative ad un elemento differenziale di pala posto a una distanza r dal centro di rotazione

Dalla figura 3.5 si deduce inoltre che:

$$W^2 = U^2 + V^2 = V_1^2 \cdot (1-a)^2 + \Omega^2 \cdot r^2 \cdot (1+a')^2$$

La velocità relativa W , incidendo sul profilo con angolo α , genera le seguenti forze aerodinamiche:

- dF_z = sustentazione o portanza;
- dF_x = forza di trascinamento o resistenza.

I valori di queste forze sono dati dalle due seguenti espressioni:

$$dF_z = \frac{\rho}{2} C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr$$

$$dF_x = \frac{\rho}{2} C_x \cdot l \cdot W^2 \cdot dr$$

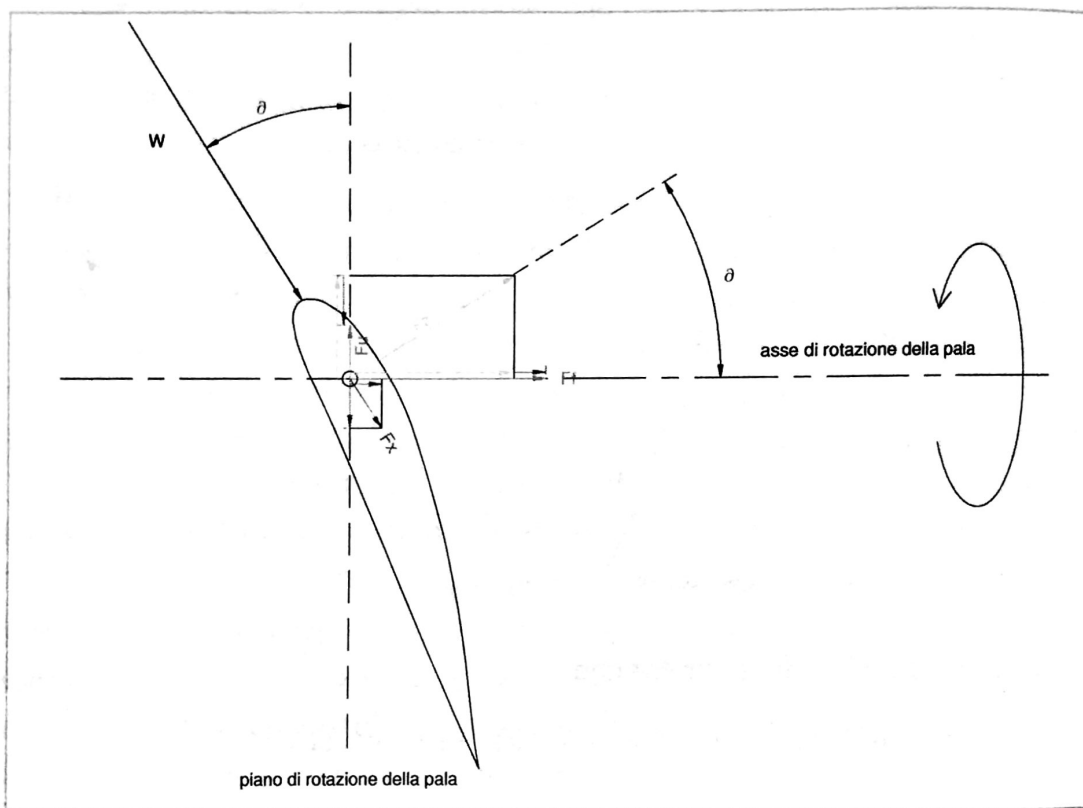
dove:

l = è la lunghezza della corda del profilo, per ora incognita.

Il nostro obiettivo è appunto determinare quale deve essere il valore ottimale di l per una data coppia di valori, C_z e C_x , scelti dalla curva delle caratteristiche del profilo alare che si vuole determinare.

La figura 3.6 mostra le forze F_z e F_x rispettivamente perpendicolare e coassiale alla velocità relativa W , e le loro proiezioni in senso assiale, F_f (forza che genera solo sforzo di flessione sulla pala, ma non produce lavoro utile) e tangenziale, F_u (forza che genera lavoro utile). Nel riferirci all'elemento di pala, chiameremo queste forze rispettivamente dF_f e dF_u .

Figura 3.6
Forze aerodinamiche e le loro proiezioni assiale e tangenziale



Dalla trigonometria elementare, esprimeremo il valore di dF_u come:

$$dF_u = dF_z \cdot \text{sen } \theta - dF_x \cdot \text{cos } \theta$$

Possiamo riscrivere dF_u come:

$$dF_u = \frac{\rho}{2} C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \text{sen } \theta - \frac{\rho}{2} C_x \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \text{cos } \theta \quad [3.11]$$

Con lo stesso ragionamento, possiamo scrivere:

$$dF_f = \frac{\rho}{2} C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \text{cos } \theta + \frac{\rho}{2} C_x \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \text{sen } \theta \quad [3.12]$$

In un profilo alare operante in condizioni ottimali, si compie sempre che $C_z \gg C_x$, e per questo motivo possiamo semplificare le equazioni [3.11] e [3.12] come segue:

$$dF_u \approx \frac{\rho}{2} C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \sin \theta \quad [3.13]$$

$$dF_f \approx \frac{\rho}{2} C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \cos \theta \quad [3.14]$$

Se il numero di pale è pari a z , possiamo dunque scrivere che la forza assiale dF sulla corona differenziale di pala è pari a:

$$dF_a = \frac{\rho}{2} \cdot z \cdot C_z \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \cos \theta$$

Rimpiazzando W^2 con il suo equivalente in funzione di θ otterremo:

$$dF_a = \frac{\rho}{2} \cdot z \cdot C_z \cdot l \cdot \frac{V_1^2 \cdot (1-a)^2}{\sin^2 \theta} \cdot dr \cdot \cos \theta \quad [3.15]$$

Se uguagliamo l'equazione [3.12] con l'equazione [3.1], ottenuta precedentemente con la teoria delle velocità indotte, otterremo:

$$dF_a = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1^2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot r \cdot dr = \frac{\rho}{2} \cdot z \cdot C_z \cdot l \cdot \frac{V_1^2 \cdot (1-a)^2}{\sin^2 \theta} \cdot dr \cdot \cos \theta$$

$$4 \cdot a = \frac{z \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot C_z \cdot \frac{(1-a)}{\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

Allo stesso modo con cui abbiamo definito il coefficiente di solidità, σ di una turbina (paragrafo 2.4.3.1 a pag. 42), ora definiamo il coefficiente di solidità per una corona differenziale della stessa turbina. Chiameremo questo nuovo coefficiente *solidità locale*, σ_l come:

$$\sigma_l = \frac{z \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$\frac{a}{(1-a)} = \frac{\sigma_l \cdot C_z \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta} \quad [3.16]$$

La forza utile dF_u genera un momento torcente rispetto all'asse di rotazione. Imponendo il numero di pale (z) calcoliamo come segue la coppia motrice dif-



ferenziale totale che si ottiene:

$$dM = z \cdot r \cdot dF_u$$

[3.17]

Dall'equazione [3.4] possiamo scrivere:

$$dM = dF_l \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^3 \cdot dr$$

e se uguagliamo questa espressione con l'equazione [3.17], otteniamo:

$$4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^3 \cdot dr = z \cdot r \cdot dF_u$$

Rimpiazzando l'espressione di dF_u secondo l'equazione [3.13] nell'equazione precedente, risulta:

$$4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r^3 \cdot dr = z \cdot r \cdot C_z \cdot \frac{\rho}{2} \cdot l \cdot W^2 \cdot dr \cdot \text{sen}\theta$$

la quale possiamo semplificare e riscrivere nei seguenti termini:

$$4 \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r = C_z \cdot \frac{z \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot W^2 \cdot \text{sen}\theta$$

Rimpiazzando W^2 per il suo equivalente trigonometrico (dalla Fig. 3.5) e introducendo il coefficiente σ_l , rimane:

$$4 \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \Omega \cdot a' \cdot r = \sigma_l \cdot C_z \cdot \frac{V_1^2 \cdot (1-a)^2}{\text{sen}^2\theta} \cdot \text{sen}\theta$$

$$4 \cdot \Omega \cdot a' \cdot r = \sigma_l \cdot C_z \cdot \frac{V \cdot (1-a)}{\text{sen}\theta}$$

$$a' = \sigma_l \cdot C_z \cdot \frac{V \cdot (1-a)}{4 \cdot \Omega \cdot r \cdot \text{sen}\theta}$$

Se rimpiazziamo $V \cdot (1-a)$ con il suo equivalente trigonometrico secondo l'equazione [3.10], possiamo riscrivere a' come segue:

$$a' = \sigma_l \cdot C_z \cdot \frac{\Omega \cdot r \cdot (1+a') \cdot \text{tg}\theta}{4 \cdot \Omega \cdot r \cdot \text{sen}\theta}$$

$$\frac{a'}{1+a'} = \sigma_l \cdot C_z \cdot \frac{\text{tg}\theta}{4 \cdot \text{sen}\theta}$$

$$\frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma_l \cdot C_z}{4 \cdot \cos\theta}$$

[3.18]

Se nell'equazione [3.18] rimpiazziamo a' per il suo equivalente secondo l'equazione [3.8], otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{1-3a}{4a-1} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \cos \theta} \\
 1 + \frac{1-3a}{4a-1} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \cos \theta} \\
 \frac{1-3a}{4a-1+1-3a} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \cos \theta} \\
 \frac{1-3a}{a} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \cos \theta} \\
 \frac{1}{a} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \cos \theta} + 3 \\
 a &= \frac{4 \cdot \cos \theta}{\sigma_1 \cdot C_z + 12 \cdot \cos \theta} \quad [3.19]
 \end{aligned}$$

Rimpiazzando l'equazione [3.19] nella [3.16], otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{4 \cdot \cos \theta}{\sigma_1 \cdot C_z + 12 \cdot \cos \theta} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta} \\
 \left(1 - \frac{4 \cdot \cos \theta}{\sigma_1 \cdot C_z + 12 \cdot \cos \theta} \right) &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta} \\
 \frac{4 \cdot \cos \theta}{\sigma_1 \cdot C_z + 12 \cdot \cos \theta} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta} \\
 \frac{4 \cdot \cos \theta}{\sigma_1 \cdot C_z + 12 \cdot \cos \theta - 4 \cdot \cos \theta} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta} \\
 \frac{4}{\sigma_1 \cdot C_z + 8 \cdot \cos \theta} &= \frac{\sigma_1 \cdot C_z}{4 \cdot \sin^2 \theta} \\
 4 &= \frac{(\sigma_1 \cdot C_z)^2 + \sigma_1 \cdot C_z \cdot 8 \cdot \cos \theta}{4 \cdot \sin^2 \theta}
 \end{aligned}$$

$$16 \cdot \sin^2 \theta = (\sigma_1 \cdot C_z)^2 + \sigma_1 \cdot C_z \cdot 8 \cdot \cos \theta$$

Osservare che questa è un'equazione di secondo grado, nella quale la variabile è il prodotto $\sigma_1 \cdot C_z$. Le due radici saranno dunque

$$\sigma_1 \cdot C_z = 4 \cdot (-1 - \cos \theta)$$



e

$$\sigma_l \cdot C_z = 4 \cdot (1 - \cos \theta) \quad [3.20]$$

La prima non ha senso fisico poiché nell'intervallo d'interesse, si deve compiere che $\cos \theta > 0$, affinché $\sigma_l \cdot C_z > 0$, quindi solo vale l'equazione [3.20]. Abbiamo ottenuto dunque un'equazione che lega direttamente la solidità locale σ_l , e quindi la corda del profilo, l , con l'angolo θ .

Il coefficiente C_z viene scelto arbitrariamente dal progettista sulla base di determinati criteri prestazionali, ed il valore di C_x risulta di conseguenza, in quanto la loro relazione è univoca. Per esempio si può scegliere il valore ottimo, ossia il C_z che corrisponde al massimo del rapporto C_z/C_x (massima efficienza aerodinamica del profilo). Va sottolineato però che i valori di C_z e C_x riscontrabili, nella letteratura aerodinamica, valgono per un profilo di lunghezza infinita. In un profilo reale, e precisamente nella punta della pala, si produce un vortice, dovuto alla differenza di pressione tra l'intradosso e l'estradosso dello stesso e alla assenza di una condizione al contorno che ne impedisca la formazione. Sono state proposte pale con deflettori situati nella punta per evitare proprio questo effetto, però in pratica non sono utilizzati. Dalla teoria aerodinamica, è noto che l'attrito indotto dai vortici di punta di pala si può calcolare con la Formula di Oswald:

$$C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \cdot e \cdot AR}$$

dove:

C_{xi} = coefficiente di resistenza indotta dai vortici;

C_z = coefficiente di portanza (da tabelle aerodinamiche per profili infiniti);

e = fattore di Oswald = 0,85 ÷ 0,9 per pale molto allungate;

AR = rapporto di aspetto (aspect ratio) = L/l ;

L = lunghezza totale della pala (dall'attaccatura con il mozzo fino all'estremità);

l = corda media della pala.

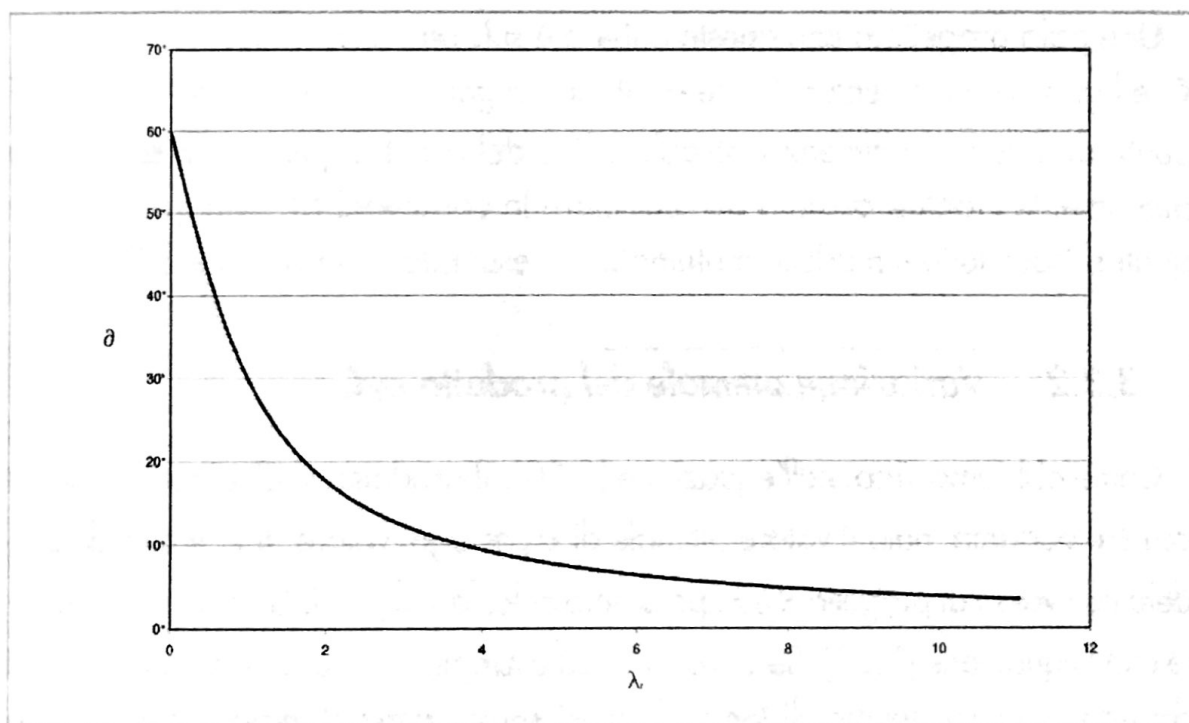
Nella pratica, dovremo considerare per i nostri calcoli il valore di C_z ricavato dalle tabelle di dati aerodinamici, ed il valore reale di resistenza aerodinamica, C_{xr} ricavato con la semplice formula:

$$C_{xr} = C_x + C_{xi}$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi necessari per progettare ogni sezione della pala, ciononostante, le considerazioni esposte nei paragrafi successivi ci aiuteranno nella definizione dei criteri progettuali.

3.3.1 Variazione ottimale dell'angolo θ

Poiché in ogni posizione r della pala desideriamo estrarre il massimo di energia dal vento, ne consegue che α e α' devono soddisfare le equazioni [3.3] e [3.8]. Poiché l'angolo θ si ricava dall'equazione [3.10], ne consegue che θ è funzione di λ_r . Allo stesso modo che abbiamo tabulato il coefficiente di potenza locale in funzione di α , α' e λ_r , possiamo calcolare l'angolo θ ottimale in ogni posizione r della pala, perché λ_r è direttamente proporzionale a r secondo la definizione data al punto 3.1.2. La figura 3.7 mostra come varia θ in funzione di λ_r .



La curva nella figura si può rappresentare con la seguente funzione matematica equivalente, più semplice da utilizzare:

$$\theta = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\lambda_r} \right) \quad [3.21]$$

Poiché dall'equazione [3.20] il prodotto $\sigma_r C_z$ dipende solo da $\cos \theta$, una volta noto il suo valore ottimale, per ogni valore di λ_r e definiti i valori di R e di λ , possiamo calcolare il prodotto $\sigma_r C_z$ direttamente con l'equazione [3.20].

A questo punto, definiamo ad esempio un valore di corda l , costante lungo



Figura 3.7
Variazione
ottimale
dell'angolo θ
in funzione
di λ_r

tutta la pala, e calcoliamo di conseguenza σ_l per ogni valore di r , secondo la definizione della solidità locale:

$$\sigma_l = \frac{z \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Nota σ_l , possiamo dunque in ogni punto della pala ricavare il valore di C_z necessario a soddisfare l'equazione [3.20]. Una volta noto C_z , dalle caratteristiche del profilo possiamo ricavare l'angolo d'incidenza α e dunque definire il passo della sezione della pala nel punto r , cioè corrispondente all'angolo φ della figura 3.5. Dal punto di vista pratico, questo approccio è utile, ad esempio, per realizzare una pala a partire da un profilo estruso: affinché la corda si mantenga costante lungo la pala il profilo dovrà essere deformato mediante uno sforzo di torsione tale che l'angolo φ , in ogni punto, sia pari a quello risultante dalle equazioni:

$$\theta = \alpha + \varphi \quad \theta = \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \quad \alpha = \alpha' - \beta \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{C_z \cdot \pi \cdot l}{R}\right)$$

Una pala progettata con questo criterio è sub-ottimale, in quanto il valore di C_z e l'angolo d'incidenza che ne risultano, in genere non coincideranno con il punto di massima efficienza aerodinamica del profilo, quindi non soddisfano pienamente l'ipotesi assunta per postulare le equazioni [3.13] e [3.14], sulle quali si basa tutto il modello matematico presentato nella sezione 3.3.

3.3.2 *Variazione ottimale del prodotto $\sigma_l \cdot C_z$*

Come abbiamo visto, nell'equazione [3.20], il prodotto $\sigma_l \cdot C_z$ dipende solo da $\cos \theta$ e pertanto: noto il valore ottimale di θ per ogni valore di λ_r e avendo predefinito i valori di progetto R e λ_r , possiamo calcolare il prodotto $\sigma_l \cdot C_z$ direttamente con l'equazione [3.20]. Se volessimo, ad esempio, costruire una pala a partire da una semplice tavola di legno (quindi senza svergolamento) innanzitutto dovremmo definire arbitrariamente un valore costante per l'angolo φ della figura 3.5. Definito l'angolo φ e noto in ogni punto r della pala l'angolo θ , ricavato dall'equazione [3.10], è immediato calcolare l'angolo d'incidenza α . Noto α , di conseguenza si ricava C_z dalle caratteristiche del profilo, ed essendo noto il prodotto $\sigma_l \cdot C_z$, risulta immediato calcolare la corda l in ogni sezione della pala.

3.3.3 *Pala ottimale con massima efficienza aerodinamica*

Il coefficiente di finezza f dato dal quoziente C_z/C_x , rappresenta l'efficienza aerodinamica di un profilo. Nei paragrafi precedenti abbiamo basato le nostre



ipotesi di calcolo sul fatto che $C_z \gg C_x$, fatto assolutamente vero solo con valori dell'angolo d'incidenza relativamente piccoli (in genere inferiori a 5°). Il f è massimo solo in un punto della polare del profilo. Possiamo dunque progettare una pala in modo che massimizzi l'energia catturata dal vento, se in ogni punto r si compiono simultaneamente le condizioni delle equazioni [3.10] e [3.20], ed inoltre, se si sceglie il valore di C_z corrispondente al massimo f in modo che siano rispettate le ipotesi delle equazioni [3.13] e [3.14] in ogni sezione della pala. La pala risultante sarà caratterizzata dunque da un certo svergolamento e anche dalla corda variabile fra la sua attaccatura e la sua estremità. Poiché λ_r è direttamente proporzionale ad r , possiamo tabulare il prodotto $\sigma_f \cdot C_z \cdot \lambda_r$ in funzione di λ_r il quale a sua volta è funzione di α e α' , nello stesso modo utilizzato per disegnare la curva della figura 3.7. La grafica di questa funzione rappresenta, in modo adimensionale, la variazione della corda lungo la pala. Il risultato si osserva nella figura 3.8.

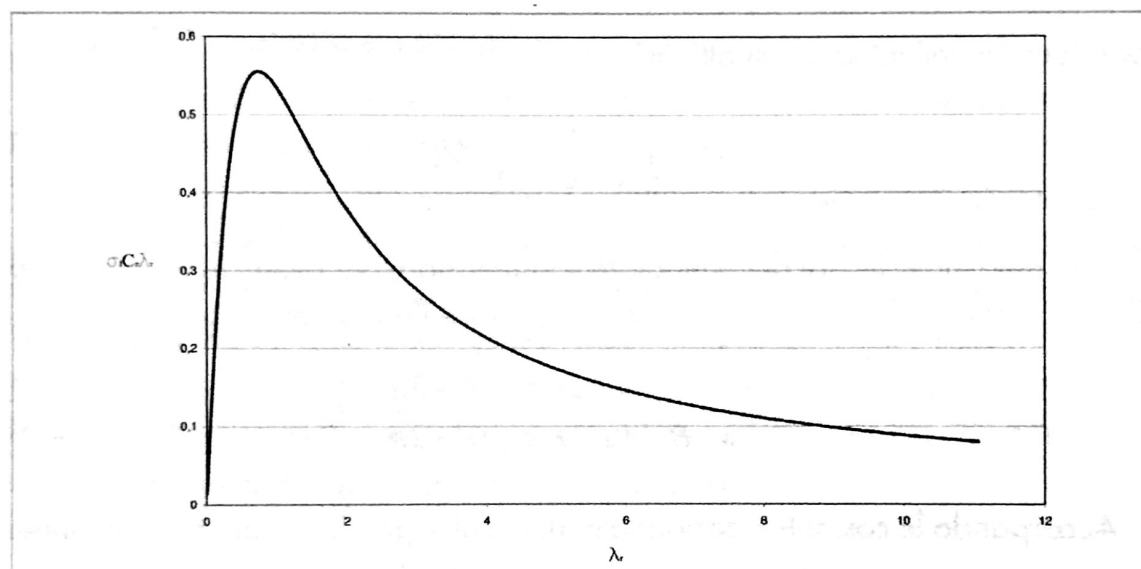


Figura 3.8
Variazione
ottimale
della corda,
per C_z
costante

3.4 Conclusioni

Dalla trattazione esposta nella sezione 3.3, e dai paragrafi 3.3.1 a 3.3.3 possiamo trarre le seguenti conclusioni:

3.4.1 Variazione della corda

Quando si progetta una turbina lenta, nella quale λ è compreso tra 0 e 1, la corda è sempre crescente.

Quando si progetta una turbina veloce, nella quale $\lambda > 2$, la corda cresce dall'asse fino al punto nel quale $\lambda \approx 1$ e poi diminuisce fino alla periferia.

3.4.2 Relazione fra solidità, velocità specifica ed efficienza della turbina

Se ricordiamo il concetto di solidità, definita come quoziente fra l'area delle pale e l'area totale spazzata dal rotore, e lo esprimiamo matematicamente in forma generale, otteniamo:

$$\sigma = \int_0^R \frac{z \cdot l}{\pi \cdot R^2} dr$$

Poiché

$$\lambda_r = \frac{\Omega \cdot r}{V_1} \Rightarrow r = \frac{V_1 \cdot \lambda_r}{\Omega} \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda_r} = \frac{V_1}{\Omega} \Rightarrow dr = \frac{V_1}{\Omega} d\lambda_r$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene:

$$\sigma = \int_0^\lambda \frac{z \cdot l}{\pi \cdot R^2} \frac{V_1}{\Omega} d\lambda_r$$

Possiamo moltiplicare denominatore e numeratore per alcuni fattori, in modo da accorpare variabili e costanti, senza alterare l'equazione, come segue:

$$\sigma = \int_0^\lambda \frac{z \cdot l}{\pi \cdot R^2} \frac{V_1}{\Omega} \frac{\Omega \cdot C_z \cdot V_1 \cdot 2\pi}{\Omega \cdot C_z \cdot V_1 \cdot 2\pi} d\lambda_r$$

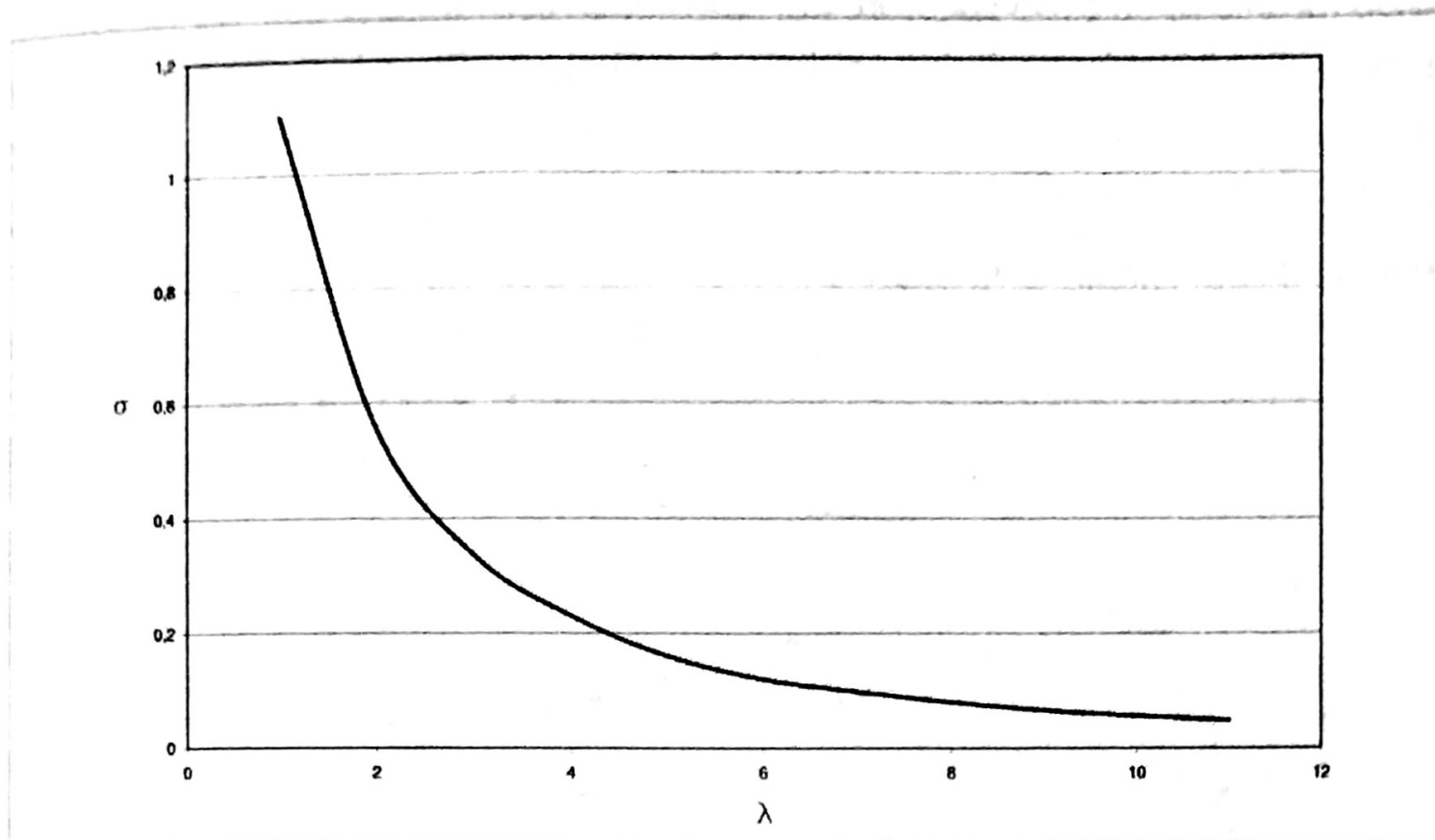
Accorpare le costanti e portandole fuori dal segno integrale rimane infine:

$$\sigma = \frac{2\pi \cdot V_1^2}{C_z \cdot \pi \cdot \Omega^2 \cdot R^2} \int_0^\lambda \frac{z \cdot l \cdot \Omega \cdot C_z}{V_1 \cdot 2\pi} d\lambda_r$$

Osservare che i termini all'interno dell'integrale corrispondono al prodotto $\sigma_l \cdot C_z \cdot \lambda_r$ e quelli all'esterno dell'integrale possono essere accorpati e semplificati come segue:

$$\sigma = \frac{2}{C_z \cdot \lambda^2} \int_0^\lambda \sigma_l \cdot C_z \cdot \lambda_r d\lambda_r$$

Possiamo risolvere numericamente questa integrale con un foglio di calcolo, assumendo, per esempio, $C_z = 0,8$ (profilo NACA 4412 con $\alpha = 5^\circ$). Si ricava il risultato che si può apprezzare nella figura 3.9.



3.4.2.1 Solidità e velocità specifica

Dalla figura 3.9 si evince che la solidità della turbina, σ , diminuisce con l'aumentare della velocità specifica λ .

Nella figura 3.9 si osserva inoltre che risulta $\sigma > 1$ per $\lambda < 1$. Questo è un risultato apparentemente contraddittorio, però non è fisicamente impossibile e spieghiamo il perché. In genere le turbine lente hanno molte pale, le quali si sovrappongono parzialmente, quindi la somma dell'area delle pale può risultare maggiore dell'area spazzata dal rotore. Nella pratica però, è impossibile fare arrivare la pala fino al centro geometrico, occupato invece dal mozzo.

Le turbine lente dunque, sono caratterizzate da $\sigma \approx 1$.

3.4.2.2 Solidità ed efficienza aerodinamica

Dalla *Teoria di Glauert*, il cui risultato si riassume graficamente nella figura 3.5, si deduce che il coefficiente di potenza teorico, C_p , cresce con λ . Poiché la solidità diminuisce con λ , le macchine eoliche a bassa solidità (e quindi con un numero di pale ridotto) saranno sempre più efficienti rispetto alle macchine eoliche di alta solidità, dotate di molte pale.

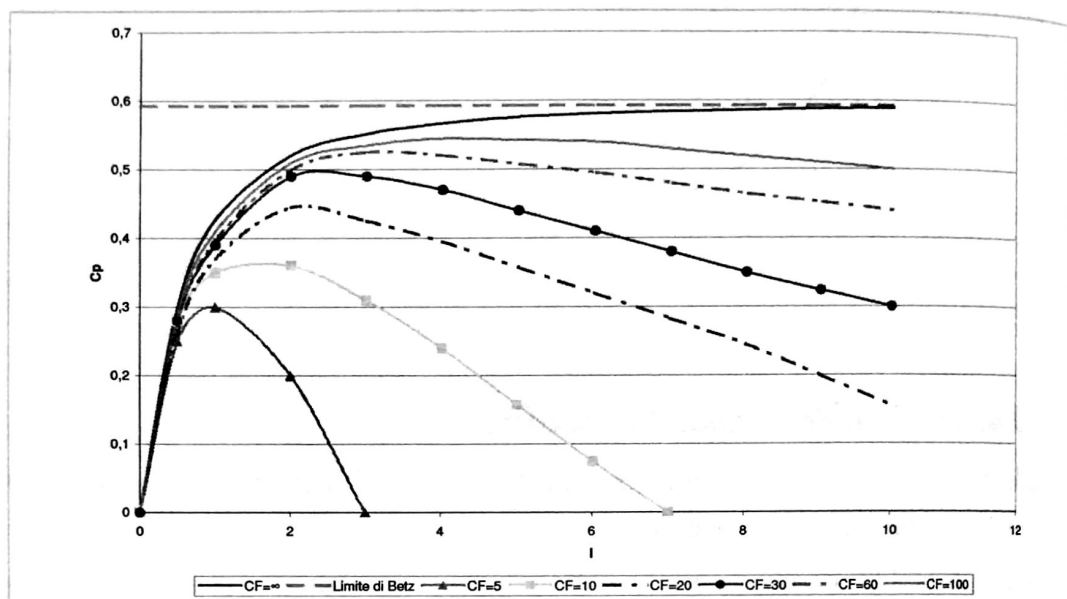
3.4.3 Influenza del coefficiente di finezza del profilo

Nello sviluppo della teoria dell'elemento di pala, abbiamo tralasciato la resistenza aerodinamica del profilo per poter ottenere le espressioni semplificate [3.13] e [3.14]. Questa ipotesi è abbastanza valida per i profili alari sottili, perfettamente lisci, e operanti con $Re > 500.000$. Nelle reali condizioni d' eser-



Figura 3.9
Solidità della turbina in funzione della sua velocità specifica, per $C_z=0,8$, assunto come costante

Figura 3.10
 Comparazione
 del C_p in
 funzione di λ ,
 per una turbina
 ideale senza
 attrito, e per
 diversi valori
 finiti di f .
 Valori tratti da
 Le Gourière,
 rielaborati
 graficamente
 dall'Autore



3.5 Bibliografia (in ordine alfabetico)

- Burton T., Sharpe D., Jenkins N., Bossanyi E., *Wind Energy Handbook*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2001.
- Hansen, M., *Aerodynamics of Wind Turbines*, Second Edition, Earthscan, London, 2008.
- Le Gourière D., *L'Énergie Éolienne – Théorie, conception et calcul pratique des installations*, deuxième édition, Eyrolles, Paris, 1982.
- Manwell J.F., Mcgowan J.G., Rogers A. L., *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
- Rosato M., *Progettazione di impianti minieolici*, corso multimediale, Acca Software, 2010.
- Rosato M., *Diseño de máquinas eólicas de pequeña potencia*, Editorial Progenza, Sevilla, 1992.