

Provetta di elementi di fisica della materia (04-05-2018):

Domande:

- 1) Si dimostri che $[L^2, L_z] = 0$ partendo dalle definizioni di $L_x = -i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})$, $L_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z})$, $L_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$
- 2) Si descrivano vantaggi e limiti dell'approssimazione di dipolo elettrico.
- 3) Si enuncino e discutano le regole di selezione per transizioni di dipolo tra livelli atomici diversi.
- 4) Si ricavi l'Hamiltoniana di interazione tra una particella senza spin, di carica q e massa m ed un campo elettromagnetico.
- 5) Si produca un grafico della dipendenza radiale delle funzioni d'onda di atomi idrogenoidi, specificando il numero di massimi e nodi per le funzioni $R_{n1}=R_{30}$, R_{31} , R_{32} ed i loro moduli.

Problemi:

Problema 1) Il Trizio è un isotopo dell'idrogeno dove il nucleo consiste di due neutroni ed un protone, con carica nucleare $Z=1$ soggetto ad un processo di decadimento radiativo che vede gli atomi di Trizio decadere in ioni di He^+ con $Z=2$ (2 protoni e un neutrone nel nucleo) attraverso l'emissione di un elettrone di alta energia che sfugge "istantaneamente" al potenziale di attrazione nucleare. Assumendo che il trizio si trovi inizialmente nel ground state elettronico, che il processo di decadimento sia istantaneo e che quindi la funzione d'onda dell'elettrone nel ground state del trizio non venga perturbata dal processo di decadimento, si calcoli:

- a) Le probabilità che a seguito del processo di decadimento l'elettrone si trovi nello stato φ_{100} e φ_{200} dello ione He^+ ($Z=2$). Si trascurino gli effetti dovuti alla massa nucleare finita.
- b) Per quali stati φ_{nlm} dello stato con $Z=2$ avremo probabilità non nulla? Lo si dimostri.
- c) Supponiamo in prima approssimazione che lo stato raggiunto a seguito del decadimento sia una combinazione lineare tra stati dell'atomo con $Z=2$ del tipo: $|\varphi(0^+) \rangle = a|\varphi_{100} \rangle + b|\varphi_{200} \rangle$, con $|\varphi_{nlm} \rangle$ autostati dell'energia dello ione He^+ . Quale sarà la funzione d'onda dello stato al tempo $t=t' > 0$?
- d) Assumendo che la funzione d'onda al punto c) sia normalizzata, si calcoli il valore di aspettazione della distanza media dal nucleo (per $t > 0$) e la sua evoluzione nel tempo. La distanza media dell'elettrone dal nucleo evolve nel tempo a seguito del processo di decadimento?

Problema 2) Si consideri un atomo di H inserito un campo elettrico uniforme orientato lungo la direzione z (effetto Stark). Si calcoli con un termine perturbativo dell'Hamiltoniana ($H' = eEz$, con e =carica dell'elettrone, E =campo elettrico):

- a) La correzione al primo ordine perturbativo dell'energia del ground state (φ_{100})
- b) la correzione al primo ordine perturbativo dell'energia dei livelli con $n=2$ (suggerimento: si noti che gli elementi di matrice $\langle \varphi_{2lm} | z | \varphi_{2l'm'} \rangle = 0$ per $l \neq l' \pm 1$ e $m \neq m'$).

Shell	Quantum numbers			Spectroscopic notation	Wave function $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$
	n	l	m		
K	1	0	0	1s	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} \exp(-Zr/a_0)$
L	2	0	0	2s	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (1 - Zr/2a_0) \exp(-Zr/2a_0)$
		1	0	2p ₀	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Zr/a_0) \exp(-Zr/2a_0) \cos \theta$
		1	± 1	2p _{± 1}	$\frac{1}{\mp 8\sqrt{\pi}} (Z/a_0)^{3/2} (Zr/a_0) \exp(-Zr/2a_0) \sin \theta \exp(\pm i\phi)$

Tabella: Funzioni d'onda atomo di idrogeno in coordinate polari.