Value-at-Risk: bootstrap

- vantaggi:
  - procedura non parametrica (model-free) $\Rightarrow$ non richiede stima di parametri e scelta di un modello
  - procedura semplice da implementare
  - implicitamente include asimmetria e code pesanti
  - si estende in maniera relativamente semplice al caso di autocorrelazione e/o volatilità stocastica
- svantaggi:
  - molto sensibile alla lunghezza del data set: tipicamente si usano da 250 a 1000 osservazioni giornaliere (da 1 a 4 anni); per ottenere la stessa accuratezza del metodo parametrico sono richiesti campioni di dimensioni anche superiori
  - $\Rightarrow$ serie temporali potrebbero non essere disponibili
  - lunghe serie sono richieste per includere eventi estremi
  - "Ghost feature": il metodo reagisce lentamente a variazioni nel rischio di mercato
  - nel caso n-periodale la procedura può essere computazionalmente pesante

Teoria dei Valori Estremi

- la teoria dei valori estremi (EVT) è una branca della probabilità e statistica il cui scopo è
  - costruire modelli per la misurazione (ie calcolare probabilità, quantili, momenti, ...) di eventi estremi
  - sviluppare procedure per la stima di tali modelli
- cosa significa estremo? alcune possibili definizioni:
  - *eccedente l'ordinario, usuale, o atteso*
  - *non frequente, non comune, raro*
  - *remoto in ogni direzione*

Teoria dei Valori Estremi

▷ alcune citazioni famose sulla Teoria dei Valori Estremi (fonte: `http://www.isse.ucar.edu/extremevalues/quotes.html`)

- ⋆ Sir Ronald Fisher:
  "The 'one chance in a million' will occur, with no less and no more than its appropriate frequency, however surprised we may be that it should occur to us."
- ⋆ Emil Gumbel:
  "Il est impossible que l'improbable n'arrive jamais."
  "Il y aura toujours une valeur qui dépassera toutes les autres."
- ⋆ John Tukey:
  "As I am sure almost every geophysicist knows, distributions of actual errors and fluctuations have much more straggling extreme values than would correspond to the magic bell-shaped distribution of Gauss and Laplace."

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

▷ formalizzando i concetti visti prima, si consideriuna sequenza di variabili aleatorie

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

independenti e identicamente distribuiti (iid)

▷ tipica interpretazione: l'indice n rappresenta il tempo, cioè X_n potrebbe essere

- ⋆ livello del mare (in una data posizione) / ammontare nevicata / ammontare pioggia / velocità del vento / rendimento / . . . al giorno n-esimo
- ⋆ oppure minuto / ora / settimana / mese / anno

▷ n potrebbe essere l'indice dell'n-esima osservazione (eg $X_n =$ magnitudo del n-esima scossa di terremoto)

▷ interpretazione "spaziale" di n: X_n potrebbe essere

- ⋆ livello del mare all'n-esima posizione
- ⋆ sinistro registrato dall'n-esima polizza assicurativa
- ⋆ tempo registrato dall'n-esimo atleta in una gara

Teoria dei Valori Estremi

- ▷ Approccio classico alla EVT (block-maxima approach) permette di approssimare probabilità tipo

$$P[\max\{X_1, \dots, X_n\} > x]$$

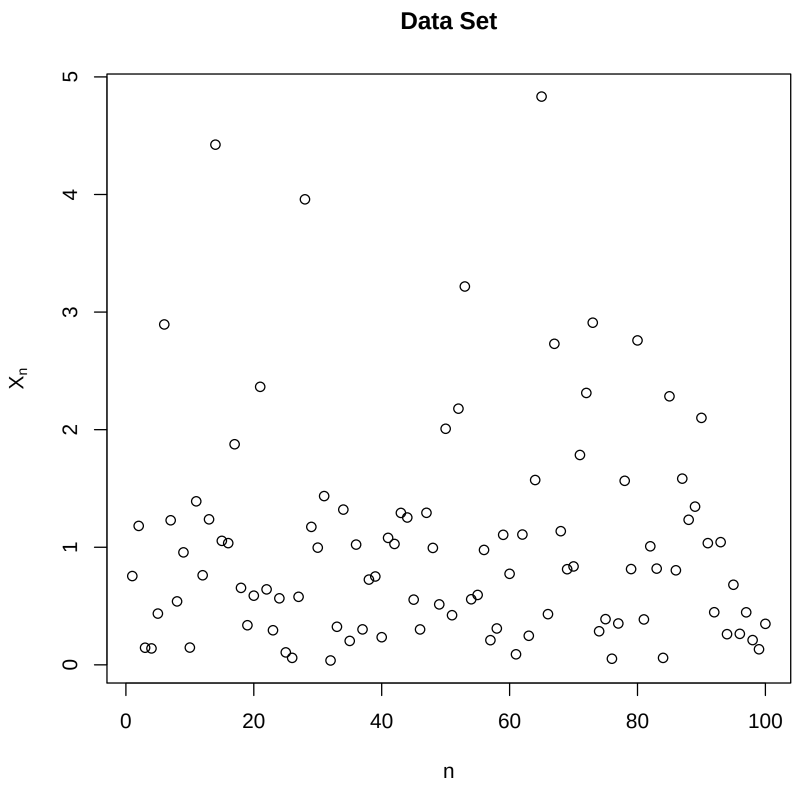
per n grande, cioè la probabilità che almeno una osservazione ecceda il livello x

- ▷ si possono considerare minimi, dal momento che

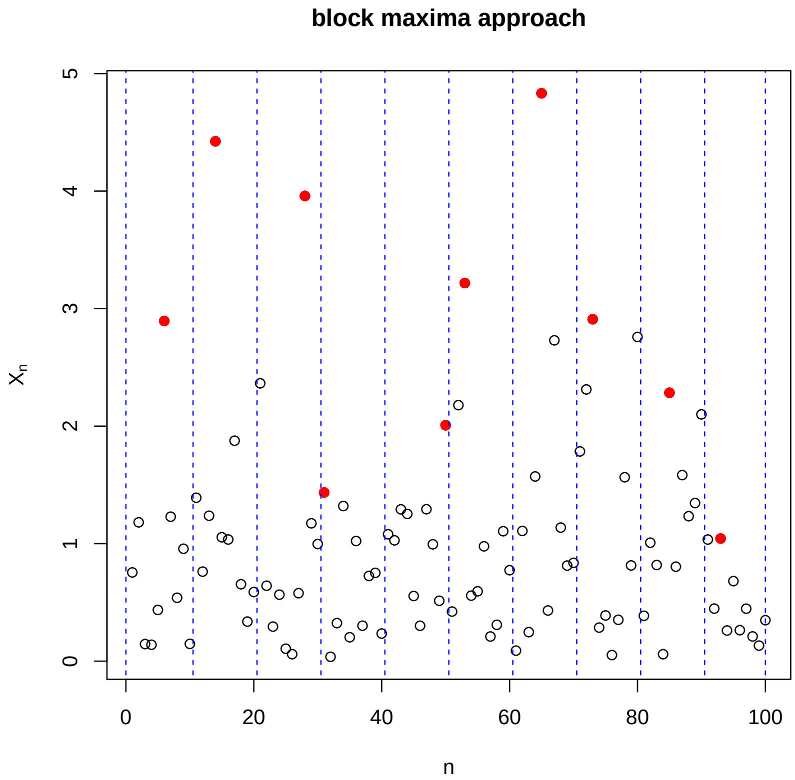
$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}$$

- ▷ in questo approccio,
  - ⋆ un evento estremo corrisponde alla massima osservazione
  - ⋆ il campione viene diviso in blocchi e il massimo viene estratto da ogni blocco $\rightsquigarrow$ la scelta del blocco è critica
  - ⋆ valori inferiori al massimo vengono scartati

Teoria dei Valori Estremi



Teoria dei Valori Estremi

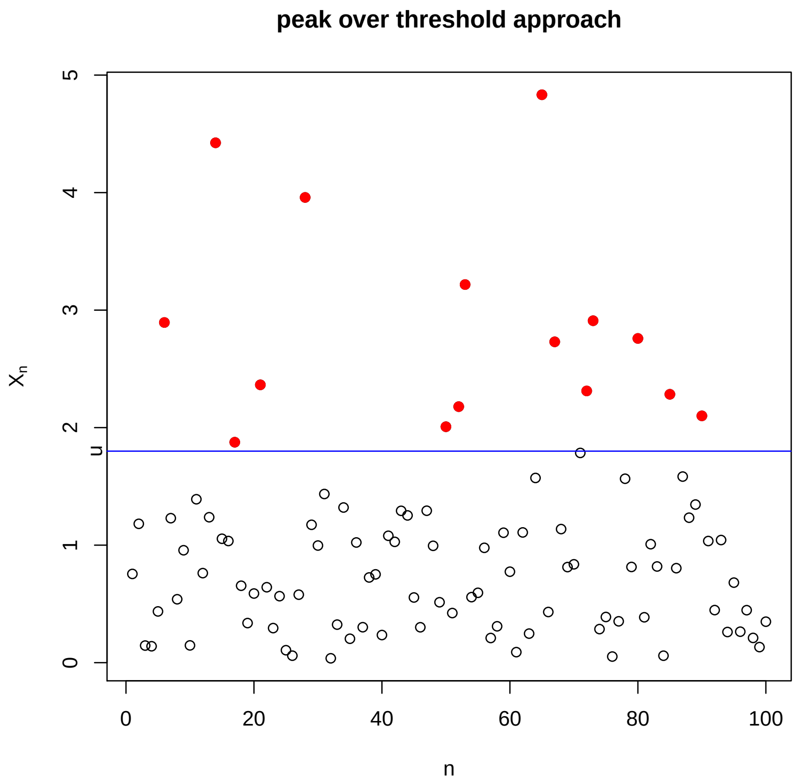


Teoria dei Valori Estremi

- Un approccio alternativo è chiamato Peak over Threshold (POT) approach: viene considerata una soglia elevata u e si possono approssimare quantità tipo
  - ⋆ $P[X_n > u + y | X_n > u]$, $y \geq 0$
  - ⋆ $E[X_n - u | X_n > u]$

  per n fissato e u grande
- nell'approccio POT
  - ⋆ un evento estremo corrisponde a un eccesso della soglia u
  - ⋆ valori inferiori a u vengono scartati
  - ⋆ la scelta di u è critica
  - ⋆ si possono considerare eccessi sotto una soglia u
    $P[X_n \leq u - y | X_n \leq u]$, $y \geq 0$

Teoria dei Valori Estremi



Teoria dei Valori Estremi

▷ Vantaggi dell'EVT

- ⋆ permette di utilizzare al meglio i dati disponibili per quantificare eventi estremi
- ⋆ tecniche statistiche standard non sono adatte:
  - il problema in questione richiede di valutare probabilità di eventi nella coda della distribuzione, possibilmente al di là del range dei dati
  - la teoria standard tratta i valori estremi come outliers
  - errori di stima possono essere amplificati quando si valutano eventi estremi
- ⋆ l'EVT invece usa una teoria asintotica (come nel CLT) che permette di calcolare le quantità richieste senza far ipotesi sulla distribuzione sottostante dei dati ⇝ l'errore di modello è meno importante
- ⋆ l'EVT fornisce una chiara indicazione sulla natura della coda della distribuzione dei dati

Teoria dei Valori Estremi

- ▷ difetti della EVT
  - ⋆ teoria asintotica ⇝ richiede larghezza campionaria sufficientemente grande perchè l'approssimazione sia efficace ⇝ trade-off tra
    - bias (distorsione del modello)
    - varianza (precisione degli stimatori)
  - ⋆ EVT di base assume osservazioni iid ⇝ spesso non soddisfatta
- ▷ estensioni della EVT
  - ⋆ EVT può essere estesa a osservazioni stazionarie (dipendenti)
  - ⋆ tuttavia, i dati spesso esibiscono trend e/o stagionalità ⇝ non stazionarie
  - ⋆ studio congiunto di due o più fenomeni correlati, eg
    - livello del mare (velocità del vento, quantità di pioggis, neve . . .) in due località diverse
    - velocità del vento e quantità di pioggia in una data località
    - serie finanziarie diverse — FX e azionario

  ⇝ EVT multivariata

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

- ▷ Sia $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di variabili aleatorie
- ▷ siamo interessati in valutazioni asintotiche sul massimo campionario e il minimo campionario

$$m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \;\; M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

- ▷ si può estendere la considerazione alle k osservazioni più grandi

$$X_{n:n} \leq X_{n-1:n} \leq \ldots \leq X_{2:n} \leq X_{1:n},$$

dove $X_{n:n} = m_n$ è il minimo, $X_{n-1:n}$ è il secondo più piccolo, $\ldots$, $X_{2:n}$ è il secondo più grande e $X_{1:n} = M_n$ è il massimo

Teoria dei Valori Estremi

- l'ipotesi di base è che le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ siano independenti e identicamente distribuite (iid); indichiamo con F la funzione di ripartizione comune agli X_i's
- è immediato ricavare la legge di M_n, F_{M_n}:

$$F_{M_n}(x) = F(x)^n$$

- Il comportamento asintotico di M_n quando $n \to +\infty$ è facilmente descritto: M_n converge in distribuzione alla variabile aleatoria degenere in $\bar{x} := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$:

$$M_n \to^{\mathrm{d}} \bar{x}$$

- risultato non utile, è necessaria una normalizzazione come nel CLT

Teoria dei Valori Estremi

- Teorema dei Tre Tipi (Tippet-Fisher 1928, Gnedenko 1943). Siano $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sono variabili aleatorie iid e $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$; se esistono $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ e una variabile aleatoria L non degenere con funzione di ripartizione H tale che

$$a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L.$$

Allora, a meno di un cambio di locazione e scala, H deve essere una di

- ⋆ Tipo I - Gumbel
- ⋆ Tipo II - Fréchet
- ⋆ Tipo III - Weibull negativa

Note come distribuzioni dei valori estremi

Teoria dei Valori Estremi

- le distribuzioni dei valori estremi sono
  - Tipo I - Gumbel

$$\boxed{H^{\mathrm{I}}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}, \ -\infty < x < \infty}$$

  - Tipo II - Fréchet

$$\boxed{H_{\alpha}^{\mathrm{II}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-x^{-\alpha}} & \text{se } x > 0 \end{cases}}$$

    con $\alpha > 0$
  - Tipo III - Weibull negativa

$$\boxed{H_{\alpha}^{\mathrm{III}}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-x)^{\alpha}} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}}$$

    con $\alpha > 0$

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

- per ottenere il cambio di locazione e scala basta sostituire x con $\frac{x-\mu}{\sigma}$, con $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e cambiando il supporto di conseguenza
- i tre tipi si possono riassumere con la singola espressione, nota come distribuzione generalizzata dei valori estremi (GEV)

$$G_{\xi}(x) = \exp\left(-\left[1+\xi x\right]^{-1/\xi}\right), \ 1 + \xi x > 0$$

  - $\xi \to 0$ si trova la Gumbel
  - $\xi = 1/\alpha > 0$ si trova la Frèchet
  - $\xi = 1/\alpha > 0$ si trova la Weibull negativa
- il Teorema dei Tre Tipi ci dice che, per n grande, riesce per qualche $\xi \in \mathbb{R}$,

$$P(M_n \leq x) \approx G_{\xi}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Teoria dei Valori Estremi

- la condizione $a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L$ si può riscrivere come

$$F(c_n x + d_n)^n \to H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

- è possibile trovare le sequenze normalizzanti c_n, d_n quando F è dotata di densità f, usando

$$d_n = F^{-1}(1 - 1/n), \; c_n = \frac{1}{\lambda(d_n)}$$

dove $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ (hazard rate)

- non è in generale possibile trovare sequenze normalizzanti per variabili aleatorie discrete

Gestione del Rischio Finanziario

Teoria dei Valori Estremi

- Il dominio di attrazione di una distribuzione di valori estremi H è

$$\mathcal{D}_H = \{F \text{ funzione di ripartizione tale che esistono}$$

$$c_n,\, d_n \text{ per cui } F(c_n x + d_n)^n \to H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$$

- è possibile caratterizzare/dare delle proprietà comuni alle distribuzioni nei domini di attrazione in termini della coda destra della distribuzione, cioè del comportamento di $1 - F(x)$ quando $x \to \overline{x}$
- dominio di attrazione della Gumbel. $\mathcal{D}_{H^I}$ contiene distribuzioni a coda "leggera" o senza coda: $1 - F(x)$ converge a 0 come un'esponenziale; tutti i momenti sono finiti;
  - normale
  - esponenziale e le sue generalizzazioni (gamma, Weibull)
  - lognormale (anche se ha coda più pesante delle precedenti)
  - ...

Teoria dei Valori Estremi

- dominio di attrazione della Frèchet. $\mathcal{D}_{H_\alpha^{II}}$ contiene distribuzioni a coda "pesante"; $1 - F(x)$ converge a 0 come una potenza: $F \in \mathcal{D}_{H_\alpha^{II}}$ se e solo se $\bar{x} = +\infty$ e

$$1 - F(x) = \frac{h(x)}{x^\alpha}$$

dove h è a variazione lenta, $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$ per ogni $t > 0$

  - ⋆ Pareto
  - ⋆ t di Student
  - ⋆ Cauchy
  - ⋆ ...

Inoltre

$$E[\max(X, 0)^\beta] < +\infty \text{ se e solo se } \beta < \alpha$$

Più piccolo è α (più grande è $\xi = 1/\alpha$), più pesante è la coda

- $\mathcal{D}_{H_\alpha^{III}}$ contiene distribuzioni senza coda in cui $\bar{x} < +\infty$
  - ⋆ uniforme
  - ⋆ beta
  - ⋆ ...

Teoria dei Valori Estremi

- stima: si estraggono i massimi dai blocchi

$$z_1, z_2, \ldots, z_m$$

con

$$\underbrace{\overbrace{x_1, \ldots x_n}^{\text{blocco } 1}}_{\text{max: } z_1}, \underbrace{\overbrace{x_{n+1}, \ldots x_{2n}}^{\text{blocco } 2}}_{\text{max: } z_2}, \ldots, \underbrace{\overbrace{x_{(j-1)n+1}, \ldots x_{jn}}^{\text{blocco } j}}_{\text{max: } z_j}, \ldots$$

- trade-off

n. di blocchi	n. di oss. in ogni blocco	approssimazione nel T. dei 3 Tipi	n. di oss. nel campione finale
↑	↓	peggiora	↑
↓	↑	migliora	↓

- Si modellizzano i massimi z_j con una GEV con cambio di locazione e scala, poi si stimano μ, σ, ξ

Teoria dei Valori Estremi

- Approccio POT
  - Siano $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d come prima; X è una v.a. con distribuzione F come gli X_i
  - si considera, per una data soglia u, la v.a.

$$Y = (X - u | X > u)$$

  - riesce

$$F_u(y) = \frac{1 - F(u+y)}{1 - F(u)}$$

- Teorema (Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975))
  se esistono $a_n > 0$, b_n tali che $a_n M_n + b_n \to^{\mathrm{d}} L$ con $L \sim G_\xi((\cdot - \mu)/\sigma)$, allora

$$\text{per } u \to \overline{x},\ \ F_u(y) \to W_\xi(y/\sigma_u) \text{ per ogni } 0 \leq y \leq \overline{x} - u,$$

  con W_ξ la distribuzione di Pareto Generalizzata (GPD) e $\sigma_u = \sigma + \xi(u - \mu)$

Teoria dei Valori Estremi

- la GPD è definita come:

$$W_\xi(y) = 1 - [1 + \xi y]^{-1/\xi}$$

  con $y > 0$ and $1 + \xi y > 0$
- le tre distribuzioni contenute in questa espressione sono
  - $\xi \to 0$: Esponenziale
  - $\xi > 0$: Pareto
  - $\xi < 0$: Beta
- quindi eccessi oltre una soglia elevata si distribuiscono come una Pareto

Teoria dei Valori Estremi

▷ stima: il campione iniziale è

$$x_1, \ldots, x_n$$

⋆ si sceglie una soglia u
⋆ si estraggono le k osservazioni oltre u

$$x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}$$

con $x_{(j)} > u$ per $j = 1, \ldots, k$
⋆ si costruiscono gli eccessi

$$y_1 = x_{(1)} - u, \ldots y_k = x_{(k)} - u$$

▷ dati $y_1, \ldots, y_k$, si usa il modello $y_j \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ e si stimano ξ, σ

▷ trade-off simile a quello del approccio block-maxima

Teoria dei Valori Estremi

▷ Proprietà della GPD: se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$
⋆ $E[Y] = \frac{\sigma}{1-\xi}$ per $\xi < 1$
⋆ per ogni $u > 0$, $(Y - u|Y > u) \sim W_\xi(\cdot/(\sigma + \xi u))$

▷ Come scegliere la soglia?
⋆ le due proprietà precedenti implicano che se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ allora la mean excess function

$$e(u) = E[Y - u|Y > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \qquad (\xi < 1)$$

funzione lineare della soglia!
⋆ si stima $e(u)$ con

$$\widehat{e}(u) = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} y_j = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} (x_{(j)} - u)$$

e si sceglie u tale che il grafico di $\widehat{e}$ diventa (approssimativamente) lineare da u in avanti

Teoria dei Valori Estremi

- Calcolo di VaR e ES con l'approccio POT ($X = L$)
- VaR:
  - la distribuzione di X è approssimativamente, per $x > u$,

$$F(x) = 1 - P(X > x|X > u)P(X > u) \approx 1 - \frac{k}{n} W_\xi \left(\frac{x-u}{\sigma} \right),$$

  si calcola il VaR risolvendo $F(x) = \alpha$
- ES:
  - usando la mean excess function,

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}_\alpha &= E[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha] = \mathrm{VaR}_\alpha + E[X - \mathrm{VaR}_\alpha | X > \mathrm{VaR}_\alpha] \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha + e(\mathrm{VaR}_\alpha - u) = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{\sigma + \xi(\mathrm{VaR}_\alpha - u)}{1-\xi} \end{aligned}$$