

## IL MODELLO DI PEREQUAZIONE DI WHITTAKER-HENDERSON

Siano

$$\hat{q}_x, \quad x = a, a + 1, \dots, \omega - 1$$

le stime delle probabilità di morte  $q_x$ ,  $x = a, a + 1, \dots, \omega - 1$ , di un modello di sopravvivenza non parametrico ottenute secondo un approccio di stima di tipo non parametrico.

Tali stime presentano usualmente delle irregolarità spesso imputabili alla limitata numerosità della popolazione, in particolare in alcune classi di età.

Tali irregolarità possono essere rimosse mediante opportune procedure di perequazione.

Due obiettivi sono alla base della scelta di una procedura di perequazione:

- l'accostamento (o goodness of fit) delle stime perequate alle stime originali.
- la regolarità (o smoothness) delle stime perequate al variare dell'età;

## Il modello di Whittaker-Henderson

Il modello di Whittaker-Henderson prevede una esplicita considerazione formale degli obiettivi di accostamento e di regolarità.

Si considera infatti una funzione obiettivo che combina linearmente un termine che misura l'accostamento ed uno che misura la regolarità.

Osservazione: per misurare il grado di regolarità di una funzione perequante si considerano vari ordini di differenze. Infatti,

se  $f(x)$  è un polinomio di grado  $n$  allora

la funzione  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$  è un polinomio di grado  $n-1$

la funzione  $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$  è un polinomio di grado  $n-2$

la funzione  $\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x)$  è un polinomio di grado  $n-3$

...

la funzione  $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x)$  è costante

la funzione  $\Delta^{n+1} f(x)$  è nulla

## Il modello di Whittaker-Henderson

Sia

$u_x$  la sequenza da perequare,  $x = a, a + 1, \dots, b$

per es.  $u_x = \hat{q}_x$ ,  $x = a, a + 1, \dots, b$

indichiamo con

$v_x$  la sequenza perequata,  $x = a, a + 1, \dots, b$

Si considera la seguente funzione obiettivo

$$M = F + hS = \sum_{x=a}^b w_x (u_x - v_x)^2 + h \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2$$

dove  $F$  misura l'accostamento;  $S$  misura la regolarità;  $h$  è un parametro  
 $w_x$  sono pesi associati alle osservazioni (per es.  $w_x = E_x / q'_x$ , con  $q'_x$  tratto da una tavola standard con caratteristiche analoghe alla collettività osservata)

$$\Delta^z v_x = \sum_{h=0}^z \binom{z}{h} (-1)^h v_{x+z-h}$$

## Il modello di Whittaker-Henderson

### Osservazione:

$z$  è l'ordine delle differenze dei valori perequati che misura la regolarità  
per es. se  $z = 4$  ed i valori perequanti  $v_x$  stanno su una cubica, allora  $S = 0$

Si determinano i valori perequati  $v_x$   $x = a, a + 1, \dots, b$   
che rendono minima la funzione  $M$ .

Se  $h = 0$

$$M = F = \sum_{x=a}^b w_x (u_x - v_x)^2$$

ed  $F$  è minima per  $v_x = u_x$  per ogni  $x = a, a + 1, \dots, b$

Se  $h \rightarrow +\infty$  allora  $M \rightarrow +\infty$  a meno che non sia  $S = 0$ , quindi se

$$v_x = c_0 x^{z-1} + c_1 x^{z-2} + \dots + c_{z-1} \quad \text{infatti è } \Delta^z v_x = 0$$

La soluzione è il polinomio di grado minore o uguale a  $z - 1$  che rende minima la  $F$

Il modello di Whittaker-Henderson

Si può scrivere la funzione  $M$  in forma matriciale

$$M = F + hS = \sum_{x=a}^b w_x (u_x - v_x)^2 + h \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2$$

Infatti 
$$F = \sum_{x=a}^b w_x (u_x - v_x)^2 = (\underline{u} - \underline{v})^T W (\underline{u} - \underline{v})$$

è una forma quadratica definita positiva con

$$\underline{u}^T = (u_a, \dots, u_b) \quad \underline{v}^T = (v_a, \dots, v_b) \quad W = \text{diag}[w_x]$$

ed è allora 
$$\frac{\partial F}{\partial \underline{v}} = -2W(\underline{u} - \underline{v})$$

Inoltre 
$$S = \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2 = (\underline{\Delta^z v})^T \underline{\Delta^z v}$$

con 
$$(\underline{\Delta^z v})^T = \left( \sum_{h=0}^z \binom{z}{h} (-1)^h v_{a+z-h}, \dots, \sum_{h=0}^z \binom{z}{h} (-1)^h v_{b-z+z-h} \right)$$

## Il modello di Whittaker-Henderson

Si prova che

$$(\underline{\Delta^z v}) = \left( \sum_{h=0}^z \binom{z}{h} (-1)^h v_{a+z-h}, \dots, \sum_{h=0}^z \binom{z}{h} (-1)^h v_{b-z+z-h} \right)^T = \Delta_z \underline{v}$$

con

$$\Delta_z = \begin{bmatrix} \binom{z}{z} (-1)^z & \binom{z}{z-1} (-1)^{z-1} & \dots & \binom{z}{0} (-1)^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{z}{z} (-1)^z & \dots & \binom{z}{1} (-1)^1 & \binom{z}{0} (-1)^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{z}{z} (-1)^z & \dots & \binom{z}{1} (-1)^1 & \binom{z}{0} (-1)^0 \end{bmatrix}$$

Si ha allora

$$S = \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2 = \underline{v}^T \left( (\Delta_z)^T \Delta_z \right) \underline{v}$$

Il modello di Whittaker-Henderson

Quindi la funzione  $M$  può essere scritta in forma matriciale

$$M = F + hS = (\underline{u} - \underline{v})^T W (\underline{u} - \underline{v}) + h \underline{v}^T \left( (\Delta_z)^T \Delta_z \right) \underline{v}$$

ed è allora

$$\frac{\partial M}{\partial \underline{v}} = -2W(\underline{u} - \underline{v}) + h 2 \left( (\Delta_z)^T \Delta_z \right) \underline{v}$$

Quindi si ha

$$\frac{\partial M}{\partial \underline{v}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[ W + h \left( (\Delta_z)^T \Delta_z \right) \right] \underline{v} = W \underline{u}$$

Si ha allora

$$\underline{v} = \left[ W + h \left( (\Delta_z)^T \Delta_z \right) \right]^{-1} W \underline{u}$$

Si prova che la soluzione così trovata rende minima la funzione  $M$

Riferimenti bibliografici

## **RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI**

E. Pitacco, *Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*, Lint, 2002 (App. A)

London D. (1985), *Graduation: the revision of estimates*, Actex Publications