INTRODUZIONE AL LABORATORIO PLS:

“LA MATEMATICA PER LE DECISIONI FINANZIARIE”

Liviana Picech

Dipartimento di Scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche
“Bruno de Finetti”

Università di Trieste

Nel Laboratorio sono introdotte le definizioni fondamentali della matematica finanziaria e alcune leggi finanziarie. L’obiettivo è di far comprendere come semplici strumenti matematici possano fornire utili indicazioni per la comprensione e la valutazione di alcuni rischi, presenti in comuni operazioni finanziarie quali ad esempio i mutui e gli investimenti obbligazionari.

Indice

- Matematica finanziaria classica e “moderna”
- Operazione finanziaria elementare - definizioni
- Leggi finanziarie
- Ammortamenti dei prestiti
- Valutazione di obbligazioni
- Il criterio di scelta del Valore Attuale Netto (VAN)

MATEMATICA FINANZIARIA CLASSICA E “MODERNA”

Matematica finanziaria classica

Funzioni di capitalizzazione $\Rightarrow$ MONTANTE

Funzioni di attualizzazione $\Rightarrow$ VALORE ATTUALE

Problemi finanziari: rendite, ammortamenti, …

Matematica finanziaria moderna

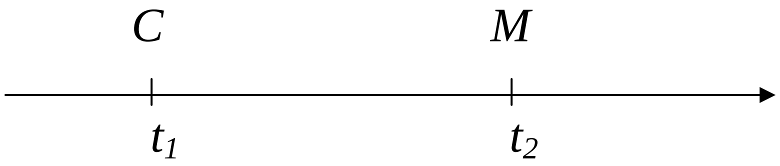
Mercati finanziari: contratti finanziari $\Rightarrow$ **operazioni finanziarie**

$\Downarrow$ *“scambio di importi monetari esigibili in istanti di tempo diversi”*

prezzi

Leggi finanziarie:
- strumenti per “costruire” contratti finanziari
- strumenti per valutare contratti finanziari e per valutare alcuni rischi presenti nelle operazioni finanziarie

OPERAZIONE FINANZIARIA ELEMENTARE - DEFINIZIONI

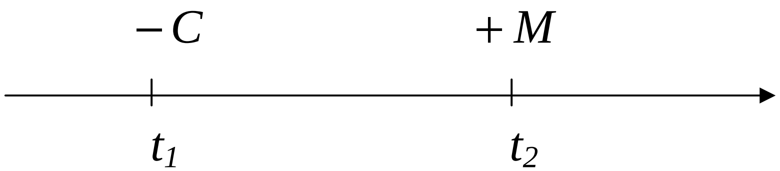


$$M > C$$

Definizione: **interesse** $I = M - C$

È la remunerazione per il soggetto che rinuncia alla somma C nell'intervallo $[t_1, t_2]$

Punto di vista dell'investitore: **operazione di investimento**



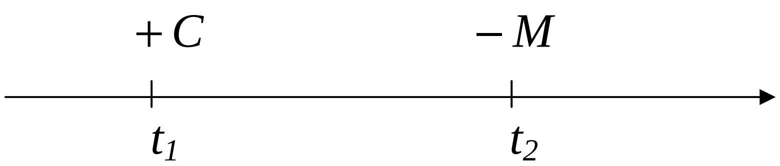
C somma investita

M montante in t_2 di C esigibile in t_1

$$M = C + I$$

Es.: acquisto di BOT, CTZ

Punto di vista del debitore: **operazione di finanziamento**



Definizione: **tasso d'interesse** relativo all'intervallo $[t_1, t_2]$ $$j(t_1, t_2) = \frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow \qquad I = j(t_1, t_2)C \qquad\qquad M = C + I = C[1 + j(t_1, t_2)]$$

<u>Esercizi</u>

- Considerando operazioni finanziarie di durata annuale $(t_1 = 0, t_2 = 1)$ calcolare l'interesse, il tasso di interesse, il montante.

  Per avere indicazioni dei tassi annui correnti per diverse operazioni:
  https://www.bancaditalia.it/media/comsta/2014/tassi-usura-108.pdf
- Quotazioni Buoni Ordinari del Tesoro.
  http://www.borsaitaliana.it/borsa/obbligazioni/mot/bot/lista.html

Osservazione: $$j(t_1, t_2) = \frac{M - C}{C} = \frac{I}{C}$$ dipende

- dall'intervallo $[t_1, t_2]$ e quindi dalla **durata** dell'operazione
- dalla situazione economica generale
- dal merito di credito del debitore

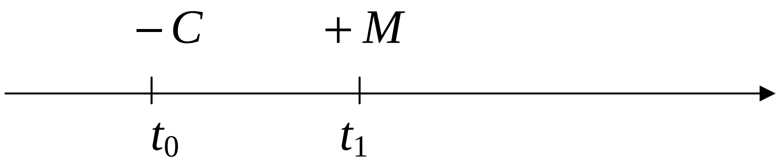
Esempio: BOT a sei mesi (178 gg.) e CTZ a due anni (728 gg.)

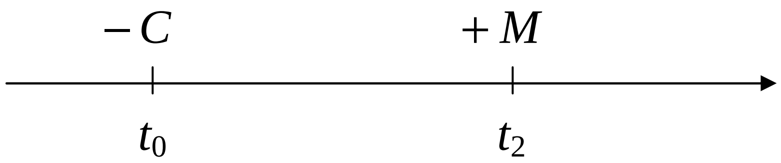
M valore facciale del titolo o valore di rimborso

C prezzo del titolo in t_0

prezzo di emissione (acquisto sul mercato primario)

prezzo di mercato (acquisto sul mercato secondario)





$j(t_0, t_1) = 0{,}84\%$

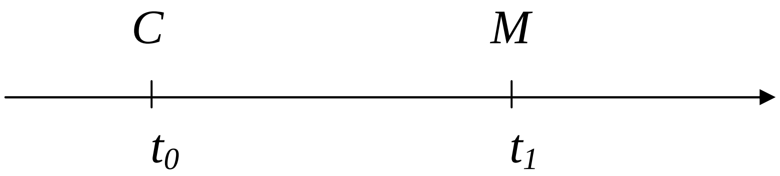
$t_0 = 0 \qquad t_1 = \frac{178}{365}$

$j(t_0, t_2) = 5{,}94\%$

$t_0 = 0 \qquad t_2 = \frac{728}{365}$

LEGGI FINANZIARIE

Nella pratica molte operazioni finanziarie sono regolate secondo delle funzioni, **leggi finanziarie**, che dipendono dalla *durata* dell'operazione e da un parametro, tipicamente il *tasso annuo d'interesse*.



Sia $t = t_1 - t_0$ la durata in anni

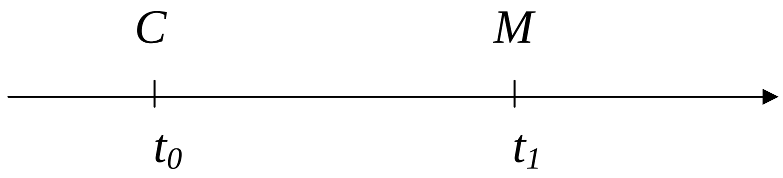
Legge finanziaria dell'interesse semplice

$M = W(t)$ con $W(t) = C + C\,i\,t$ legge di capitalizzazione semplice

i tasso annuo di interesse

Legge di attualizzazione coniugata: $C = A + A\,i\,t \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{C}{1 + i\,t}$

Legge finanziaria della capitalizzazione composta o legge esponenziale

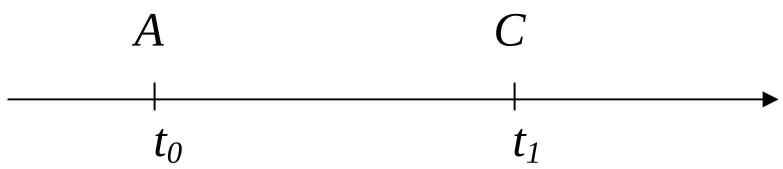


Sia $t = t_1 - t_0$ la durata in anni

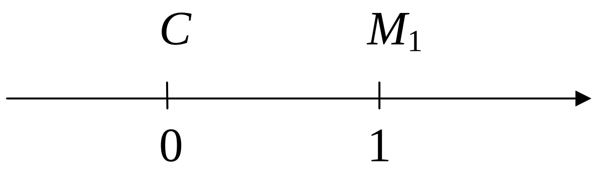
$M = W(t)$ con $W(t) = C(1+i)^t$ legge di capitalizzazione composta

i tasso annuo di interesse

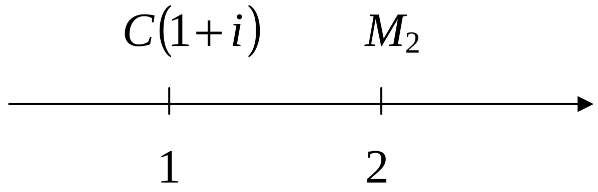
Legge di attualizzazione coniugata: $C = A(1+i)^t \Rightarrow A = C(1+i)^{-t}$



Capitalizzazione degli interessi



$$M_1 = C + C\,i = C(1+i)$$



$$M_2 = C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)^2$$

$$\ldots \qquad M_n = C(1+i)^n$$

Sia $\quad W(t), \quad t \geq 0$

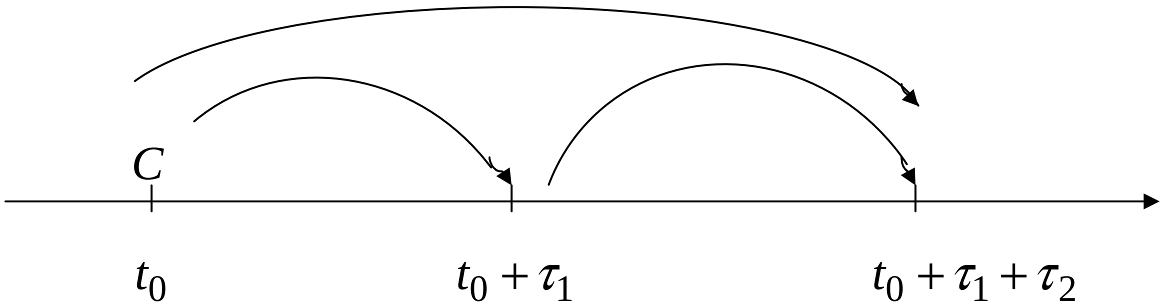
tale che $\quad W(0) = C$

$$W(t+\Delta t) - W(t) = W(t)\,\delta\,\Delta t + o(\Delta t)$$

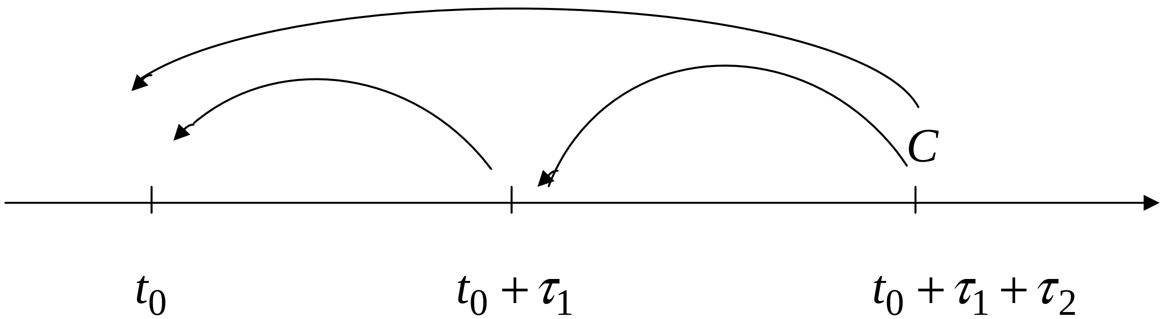
con *intensità istantanea di interesse* $\quad \delta > 0 \quad$ e $\quad \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

si ha $\quad W(t) = C\,e^{\delta t} \quad$ con $\quad e^{\delta} = 1 + i$

Proprietà di scindibilità della legge esponenziale



$$C(1+i)^{\tau_1+\tau_2} = C(1+i)^{\tau_1}(1+i)^{\tau_2}$$



$$C(1+i)^{-(\tau_1+\tau_2)} = C\,(1+i)^{-\tau_2}(1+i)^{-\tau_1}$$

Una conseguenza importante della proprietà di scindibilità.

Operazione finanziaria equa

Si definisce **operazione finanziaria a scadenzario fisso** un insieme di importi (pagamenti in entrata o in uscita) caratterizzati dalle rispettive date di esigibilità.

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\}$$

Si definisce **valore in un istante** $\boldsymbol{t}$ di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$

$$W(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{t-t_k}$$

L'operazione finanziaria è detta **equa in** $\boldsymbol{t}$ se $W(t, \boldsymbol{x}) = 0$

Poiché, per la proprietà di scindibilità della legge esponenziale

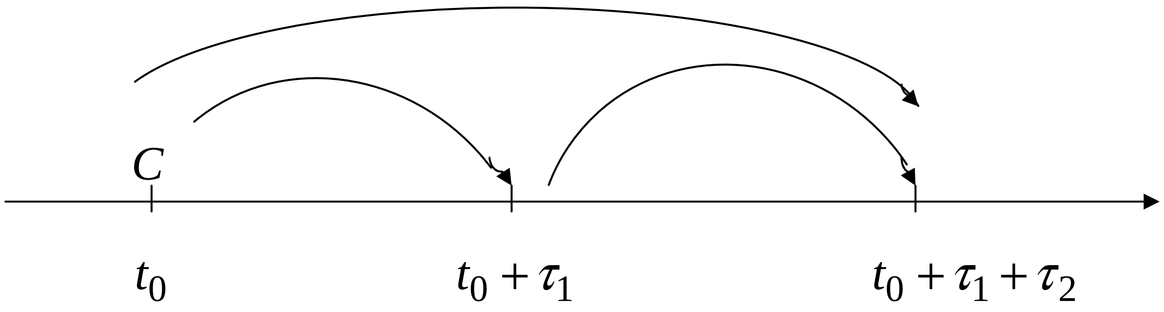
$$W(T, \boldsymbol{x}) = W(t, \boldsymbol{x})(1+i)^{T-t}$$

una operazione finanziaria equa in un istante è equa in qualsiasi altro istante, quindi

$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ è detta **equa** se $W(t, \boldsymbol{x}) = 0$ in qualche istante t

La legge esponenziale o legge di capitalizzazione composta è scindibile;

la legge finanziaria dell'interesse semplice non è scindibile infatti



$$C\left(1+i(\tau_1+\tau_2)\right)\neq C\left(1+i\tau_1\right)\left(1+i\tau_2\right)$$

<u>Esempio</u>: $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}=\{1000,-R,-R,-R\}/\{0,1,2,3\}$ $\quad i=0.04$

Legge di capitalizzazione composta	Legge dell'interesse semplice
$W\left(0,\boldsymbol{x}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$ $1000-R(1.04)^{-1}-R(1.04)^{-2}-R(1.04)^{-3}=0$ $\Leftrightarrow \quad R=360.35$	$1000\left(1+0.04\cdot 3\right)-R\left(1+0.04\cdot 2\right)-R\left(1+0.04\cdot 1\right)-R=0$ $\Leftrightarrow \quad R=358.97$ $1000-R/\left(1+0.04\cdot 1\right)-R/\left(1+0.04\cdot 2\right)-R/\left(1+0.04\cdot 3\right)=0$ $\Leftrightarrow \quad R=359.67$

$\Rightarrow$ La legge esponenziale è l’unica legge uniforme scindibile.

Il problema dell’Anatocismo

Secondo l’art. 1283 del Codice Civile

“In mancanza di usi contrari, gli interessi scaduti possono produrre interessi solo dal giorno della domanda giudiziale o per effetto di convenzione posteriore alla loro scadenza, e sempre che si tratti di interessi dovuti per almeno sei mesi.”

dovrebbe essere molto limitata la possibilità di capitalizzare gli interessi.

A seguito di interventi legislativi è stata ammessa la capitalizzazione trimestrale degli interessi passivi, a patto che la medesima procedura avvenga anche per gli interessi attivi.

AMMORTAMENTI DEI PRESTITI

Operazione di finanziamento su due date

$$+S \qquad\qquad -(S+I)$$

$$t_0 \qquad\qquad t_1$$

con $I = j(t_0, t_1)C$

essendo $j(t_0, t_1)$ il tasso d'interesse relativo all'intervallo $[t_0, t_1]$

Ammortamenti progressivi

$$+S \qquad -R_1 \qquad \dots \qquad -R_{m-1} \qquad -R_m$$

$$t_0 \qquad t_1 \qquad \dots \qquad t_{m-1} \qquad t_m$$

con **rate d'ammortamento** $R_k = C_k + I_k$ $\qquad k = 1, \dots, m$

essendo C_k le **quote capitali** tali che $\sum_{k=1}^{m} C_k = S$

I_k le **quote interessi**

Si definisce D_k **debito residuo** in k dopo il pagamento della rata R_k , $k = 1, \dots, m$

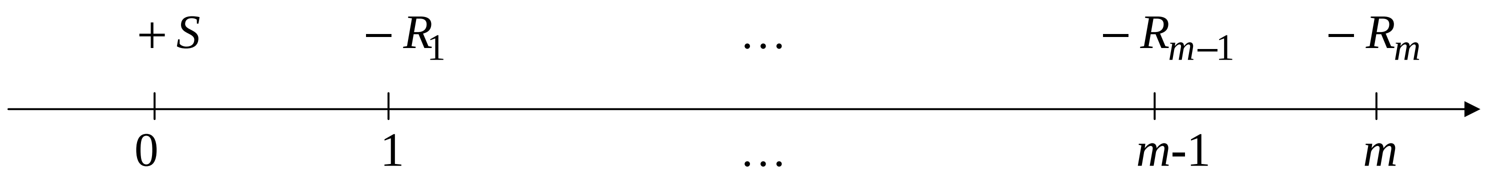
$$D_k = S - \sum_{h=1}^{k} C_h = \sum_{h=k+1}^{m} C_h \qquad k = 1, \dots, m-1$$

$$D_0 = S , \quad D_m = 0$$

La quota interessi I_k matura nell'intervallo $[t_{k-1}, t_k]$ sul debito residuo D_{k-1}

$$I_k = j(t_{k-1}, t_k) D_{k-1} \qquad k = 1, \dots, m$$

Nella pratica le rate di ammortamento sono equintervallate



Ammortamento a rate costanti a tasso fisso

$$
\begin{array}{ccccc}
+S & -R & \dots & -R & -R \\
\hline
0 & 1 & \dots & m\text{-}1 & m
\end{array}
$$

Sia i il tasso di interesse riferito alla periodicità di pagamento delle rate (es. tasso annuo nel caso di rate annue, tasso mensile nel caso di rate mensili, …)

Negli ammortamenti a tasso fisso l'operazione finanziaria deve soddisfare la condizione di equità, quindi si determina R tale che

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=1}^{m} R(1+i)^{-k} = 0$$

Si definisce $\quad a_{\overline{m|}\, i} = \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{-k} \quad \Rightarrow \quad a_{\overline{m|}\, i} = \dfrac{1-(1+i)^{-m}}{i}$

Si ha $\quad I_k = i\, D_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m,\quad$ con $\quad D_{k-1} = S - \sum_{h=1}^{k-1} C_h, \quad D_0 = S$

Esempio: mutuo a tasso fisso $S = 100.000$ $i = 0{,}037$

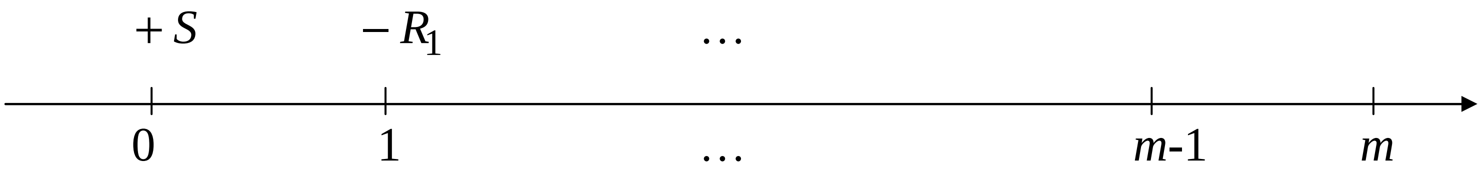
Piano d'ammortamento

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0				100.000,00
1	12.145,66	8.445,66	3.700,00	91.554,34
2	12.145,66	8.758,15	3.387,51	82.796,20
3	12.145,66	9.082,20	3.063,46	73.714,00
4	12.145,66	9.418,24	2.727,42	64.295,76
5	12.145,66	9.766,71	2.378,94	54.529,04
6	12.145,66	10.128,08	2.017,57	44.400,96
7	12.145,66	10.502,82	1.642,84	33.898,14
8	12.145,66	10.891,43	1.254,23	23.006,71
9	12.145,66	11.294,41	851,25	11.712,30
10	12.145,66	11.712,30	433,36	0,00
		100.000,00		

Ammortamento a “rate costanti” a tasso variabile

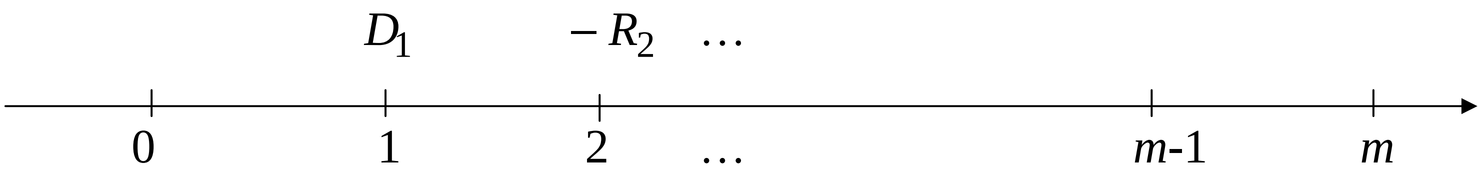
Sia $j(0,1)$ il tasso di interesse relativo al primo periodo, riferito alla periodicità di pagamento delle rate

Si determina la prima rata di ammortamento R_1 tale che $S - R_1\, a_{\overline{m|}\, j(0,1)} = 0$



Si ha $I_1 = j(0,1)\, S$ $C_1 = R_1 - I_1$ $D_1 = S - C_1$

Si determina la R_2 tale che $D_1 - R_2\, a_{\overline{m-1|}\, j(1,2)} = 0$ …



Esempio: mutuo a tasso variabile $S = 100.000$ $j(0,1) = 0{,}025$

Piano d'ammortamento (ipotesi 1)

k	$j(k-1,k)$	R_k	C_k	I_k	D_k
0					100.000,00
1	0,025	11.425,88	8.925,88	2.500,00	91.074,12
2	0,025	11.425,88	9.149,02	2.276,85	81.925,10
3	0,025	11.425,88	9.377,75	2.048,13	72.547,35
4	0,025	11.425,88	9.612,19	1.813,68	62.935,16
5	0,025	11.425,88	9.852,50	1.573,38	53.082,66
6	0,025	11.425,88	10.098,81	1.327,07	42.983,85
7	0,025	11.425,88	10.351,28	1.074,60	32.632,57
8	0,025	11.425,88	10.610,06	815,81	22.022,51
9	0,025	11.425,88	10.875,31	550,56	11.147,20
10	0,025	11.425,88	11.147,20	278,68	0,00
			100.000,00		

Esempio: mutuo a tasso variabile $S = 100.000$ $j(0,1) = 0{,}025$

Piano d’ammortamento (ipotesi 2)

k	$j(k-1,k)$	R_k	C_k	I_k	D_k
0					100.000,00
1	0,025	11.425,88	8.925,88	2.500,00	91.074,12
2	0,027	11.533,94	9.074,94	2.459,00	81.999,19
3	0,030	11.681,31	9.221,33	2.459,98	72.777,85
4	0,035	11.902,42	9.355,19	2.547,22	63.422,66
5	0,050	12.495,37	9.324,24	3.171,13	54.098,42
6	0,045	12.323,17	9.888,74	2.434,43	44.209,68
7	0,044	12.294,35	10.349,12	1.945,23	33.860,56
8	0,042	12.247,95	10.825,80	1.422,14	23.034,76
9	0,040	12.212,94	11.291,55	921,39	11.743,21
10	0,042	12.236,42	11.743,21	493,21	0,00
			100.000,00		

VALUTAZIONE DI OBBLIGAZIONI

Acquisto di una obbligazione a cedola fissa

Sia

0 l'istante di acquisto sul mercato di una obbligazione a cedola fissa

$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{I, I, \dots, I + C\} / \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ il flusso dei pagamenti e lo scadenzario

con $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$

$C > 0$ valore facciale, valore di rimborso (es. $C = 100$)

$I > 0$ ammontare della cedola (es. $I = 2{,}5$)

m numero di cedole alla scadenza

Sotto opportune **ipotesi sul mercato** (mercato perfetto, assenza di opportunità di arbitraggio, struttura dei prezzi piatta) <u>il prezzo dell'obbligazione in 0 può essere espresso in funzione di un unico parametro i caratteristico del mercato</u>

$$V(i) = \sum_{k=1}^{m} I(1+i)^{-t_k} + C(1+i)^{-t_m}$$

Proprietà del prezzo

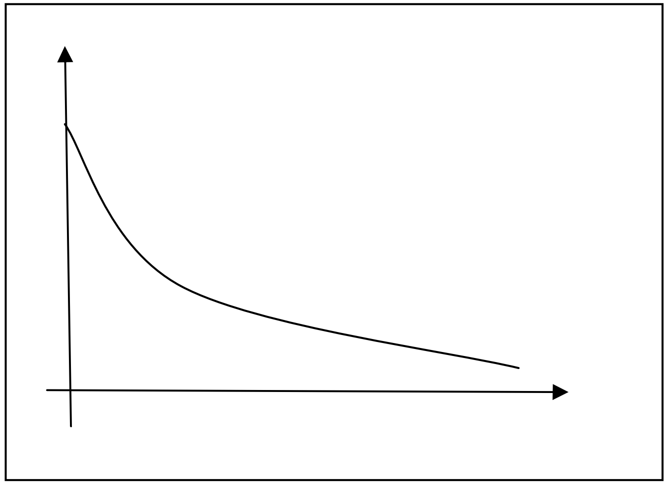
$$V(i) = \sum_{k=1}^{m} I(1+i)^{-t_k} + C(1+i)^{-t_m}$$

Si ha

$$V(i) > 0 \qquad V(0) = mI + C \qquad \lim_{i \to +\infty} V(i) = 0$$

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k I(1+i)^{-t_k - 1} - t_m C(1+i)^{-t_m - 1}$$

$$= -(1+i)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m} t_k I(1+i)^{-t_k} + t_m C(1+i)^{-t_m}\right]$$



È interessante studiare la variazione del prezzo in funzione del tasso i

Indici di variabilità del prezzo

Si definisce **elasticità del prezzo**

$$\lim_{\Delta i \to 0} \frac{\dfrac{V(i+\Delta i)-V(i)}{V(i)}}{\dfrac{\Delta i}{i}} = i\frac{V'(i)}{V(i)} = \frac{i}{(1+i)}\left(-\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k I(1+i)^{-t_k} + t_m C(1+i)^{-t_m}}{\sum_{k=1}^{m} I(1+i)^{-t_k} + C(1+i)^{-t_m}} \right)$$

Si definisce **durata media finanziaria** o **duration** in 0 del flusso $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$

$$D(0,\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k I(1+i)^{-t_k} + t_m C(1+i)^{-t_m}}{\sum_{k=1}^{m} I(1+i)^{-t_k} + C(1+i)^{-t_m}}$$

Quindi l’elasticità del prezzo è

$$i\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{i}{(1+i)} D(0,\boldsymbol{x})$$

ed è crescente con la duration.

Il rischio di prezzo o rischio di tasso di interesse

La duration fornisce indicazioni sulla variabilità del prezzo dell'obbligazione in funzione del parametro i che esprime il livello dei tassi nel mercato.

Per ottenere delle valutazioni quantitative è particolarmente interessante la **semielasticità del prezzo**

$$\lim_{\Delta i \to 0} \frac{\dfrac{V(i+\Delta i) - V(i)}{V(i)}}{\Delta i} = \frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{(1+i)} D(0, \boldsymbol{x})$$

La semielasticità è anche detta **modified duration** e può essere usata per ricavare una "regola del pollice" molto usata in pratica.

Considerando l'approssimazione $\frac{1}{(1+i)} \cong 1$

per variazioni di i non troppo elevate si ha

$$\frac{\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{V(i)}}{\Delta i} \cong -D(0,\boldsymbol{x})$$

Quindi, se per es. $\Delta i = 0{,}01$, cioè in presenza di una variazione del parametro i, che esprime il livello dei tassi nel mercato, di un punto percentuale, si ha

$$-\frac{V(i+\Delta i)-V(i)}{V(i)}100 \cong D(0,\boldsymbol{x})$$

Pertanto, a fronte di un aumento “dei tassi di mercato” di un punto percentuale, il prezzo del titolo diminuisce approssimativamente di $D(0,\boldsymbol{x})$ punti percentuali.

Viceversa, a fronte di una diminuzione “dei tassi di mercato” di un punto percentuale, il prezzo del titolo aumenta, approssimativamente di $D(0,\boldsymbol{x})$ punti percentuali.

IL CRITERIO DI SCELTA DEL VALORE ATTUALE NETTO (VAN)

Un soggetto, il decisore, deve prendere una decisione sulla convenienza dell'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}/\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

con

$0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_m$

0 istante di valutazione, in cui si prende la decisione

IPOTESI:

- Il decisore dispone nell'istante 0 della ricchezza R_0;

  se $R_0 > 0$, si assume che il patrimonio sia impiegato al tasso i (*costo-opportunità dei mezzi propri*) e che non sia necessario indebitarsi per attuare l'operazione $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$;
  se $R_0 < 0$, si assume che il soggetto sia indebitato al tasso i (tasso di costo del finanziamento) e che rimanga indebitato per tutta la durata dell'operazione $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$;

- Il decisore persegue l'obiettivo finanziario di massimizzare il suo patrimonio in un istante futuro $T \ge t_m$.

Se il decisore <u>non accetta l'operazione finanziaria</u> $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$ il suo patrimonio in T sarà:

$$R_0(1+i)^T$$

Se il decisore <u>accetta l'operazione finanziaria</u> $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$ il suo patrimonio in T sarà:

$$R_0(1+i)^T + \sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{T-t_k}$$

Quindi il decisore giudicherà conveniente accettare l'operazione finanziaria $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$ se

$$R_0(1+i)^T + \sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{T-t_k} > R_0(1+i)^T$$

ovvero se

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{-t_k} > 0$$

Si definisce **Valore Attuale Netto**

$$VAN = \sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{-t_k}$$

Dalla

$$R_0(1+i)^T + \sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{T-t_k} > R_0(1+i)^T$$

si nota che

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{T-t_k}$$

esprime il <u>guadagno in T</u> realizzato mediante l'operazione finanziaria $\boldsymbol{a}/\boldsymbol{t}$; quindi si può interpretare il VAN

$$VAN = \sum_{k=1}^{m} a_k (1+i)^{-t_k}$$

come il <u>valore attuale in 0 del guadagno realizzato mediante l'operazione finanziaria</u>.

Il decisore giudicherà quindi conveniente l'operazione finanziaria se essa produce un guadagno positivo.

ALCUNI RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

E. Castagnoli, L. Peccati, Matematica in azienda 1 – Calcolo finanziario con applicazioni, Egea, 2010

G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi, Manuale di finanza – I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni, il Mulino, 2005

L. Daboni, C. de Ferra, Elementi di matematica finanziaria, Lint, 1987

http://www.diritto24.ilsole24ore.com/art/avvocatoAffari/mercatiImpresa/2014-04-29/anatocismo-cose-come-tutelarsi-145105.php