Serie di Laurent

Def. Si dice serie di Laurent una somma

$$(*) \quad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n}$$

intesa come somma delle due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

R S

dove $w = \frac{1}{z}$

Sia R il raggio di conv. della prima serie

e sia S " " della seconda.

La serie di Laurent sarà convergente se

$$|z| < R \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{z}\right| < S$$

cioè se $\quad \rho = \frac{1}{S} < |z| < R$.

NB: Se $\frac{1}{S} \geq R$ la S.d.L. non converge da nessuna parte.

NB: Più in gen. si considerano S.d.L. centrate in un pto generico z_0

$$\sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Oss. Se $f \in H(B_R(z_0) \setminus \overline{B_\rho(z_0)})$ è data dalla serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

avremo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

$\forall\, r \in (\rho, R)$. Avremo

$$\frac{d}{dz} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1} ,$$

$$\rho < |z-z_0| < R .$$

Classificazione delle sing. isolate.

Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$

f avrà una rapp. in S. di L. in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

1) Se z_0 è sing rimovibile per f avremo

$$a_n = 0 \quad \underline{\forall \ n < 0}$$

2) Se z_0 è un polo di ord. m. $\exists \ c_1, \dots, c_m$

$$f(z) - \frac{c_m}{(z-z_0)^m} - \dots - \frac{c_1}{z-z_0} \quad \text{ha sing rimovibile}$$

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Ovvero z_0 è polo sse nello svil. in S. di L. c'è solo un numero finito di coeff. di indice < 0 diversi da zero.

3) z_0 sarà sing. essenziale sse esistono

$\Downarrow$ infiniti $c_n \neq 0$ con $n<0$.

$\Downarrow$ 0 è sing. essenziale per $e^{\frac{1}{z}} =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{|n|!} z^n$$

<u>Es.</u> $\cos \frac{1}{z}$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

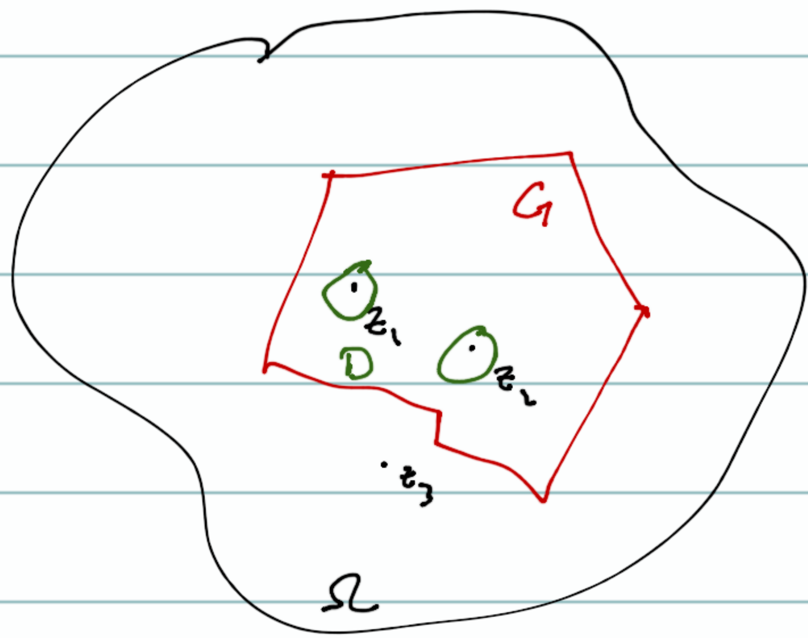
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\xi)\, d\xi$$

<u>Def.</u> Sia $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ si dice residuo di f in z_0

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\xi)\, d\xi$$

Teor. Sia $f \in H(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n, \dots\})$

con $z_1, \dots, z_n, \dots$ punti sing isolati. Sia G limitato t.c.: $G \subset \overline{G} \subset \Omega$ un dominio con frontiera reg a tratti t.c. nessun $z_n \in \partial G$.



Siano $z_1, \dots, z_k$ i punti sing. cont. in G. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

Dim. Sia $r>0$ suff. piccolo t.c.

$$D = G \setminus \left(\overline{B_r(z_1)} \cup \dots \cup \overline{B_r(z_k)} \right)$$

è un dominio con front. reg. a tratti. e tutti i $\overline{B_r(z_i)}$ sono disgiunti e contenuti dentro G.

$$\partial D = \partial G - (\partial B_r(z_1) + \dots + \partial B_r(z_k))$$

f è olomorfa in un intorno di D, per l'identità di Cauchy

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(\xi)\, d\xi = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_j)} f(\xi)\, d\xi}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j). \qquad \square$$

<u>Regole di calcolo dei residui</u>

i) Sia z_0 un polo di ordine 1

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

≥ 0

$$(z-z_0) f(z) = a_{-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k+1}}_{\to 0 \quad z \to z_0}$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

ii) Sia z_0 polo di ord. m

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \dots$$

Poniamo

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

z_0 è sing rimovibile per g

Estendendo g a z_0 basta $g(z_0) = a_{-m}$

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} g(z_0) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} g(z).$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z) \right) \right)$$

iii) $$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad , \quad \underline{\underline{\varphi(z_0) \neq 0}} \quad e$$

$\underline{\psi \text{ ha zero del prim'ordine in } z_0}$

$(\psi(z_0) = 0 \quad , \quad \psi'(z_0) \neq 0)$

$$f(z) \sim a_{-1} \frac{1}{z-z_0}$$

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z-z_0) + \cdots}{\psi'(z_0)(z-z_0) + O((z-z_0)^2)} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)\left(1 + O((z-z_0))\right)}{\psi'(z_0)(z-z_0)\left(1 + O(z-z_0)\right)} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0)} \left(1 + O(z-z_0)\right)$$

$$(z-z_0) f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \left(1 + O(z-z_0)\right)$$

$$\lim_{z \to z_0} \left((z - z_0) \cdot f(z) \right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

Esempi:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$$

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{1}{z^3+1} =$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z+1)}{z^3+1}$$

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$$

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)}$$

0 è polo del II ord. per f

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 f(z) \right) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{\sin z^2} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{2z \sin z^2 - z^2 \cos z^2 \, 2z}{(\sin z^2)^2}$$

$$2z \sin z^2 = 2z\left(z^2 - \frac{1}{3!} z^6 + \dots \right) = 2z^3 + O(z^7)$$

$$z^2 \cos z^2 \, 2z = 2z^3 + O(z^7)$$

$$\frac{''}{''} = \frac{O(z^7)}{O(z^4)} = O(z^3) \longrightarrow 0 \quad z \to 0$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = 0.$$

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{z+2}{z(z+1)} \, dz =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-1) \right)$$

dove

$$f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$\varphi = z+2, \quad \psi = z(z+1) \qquad (\psi'(z) = (z+1)+z$$

φ non si annulla né in 0 né in -1

ψ si annulla di ord 1 in entrambi i punti.

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{z+2}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i\,(2-1) = 2\pi i.$$

$$\int_{\partial B_1(0)} z\, e^{\frac{1}{z}}\,dz =$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}\,dz =$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \Big(\overset{n=0}{z} + \overset{n=1}{1} + \overset{n=2}{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{z} + \dots \Big)\,dz =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i \quad .$$

<u>Esercizi</u> a) $\displaystyle\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}\, dz$ ✱

b) $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} e^{z^2}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right) dz$

c) $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{\cos z}{\sin z}\, dz$

$$\underline{\int_{\partial B_{1/2}(0)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}\, dz}$$

$$f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{1}{z^{2m+1}}$$

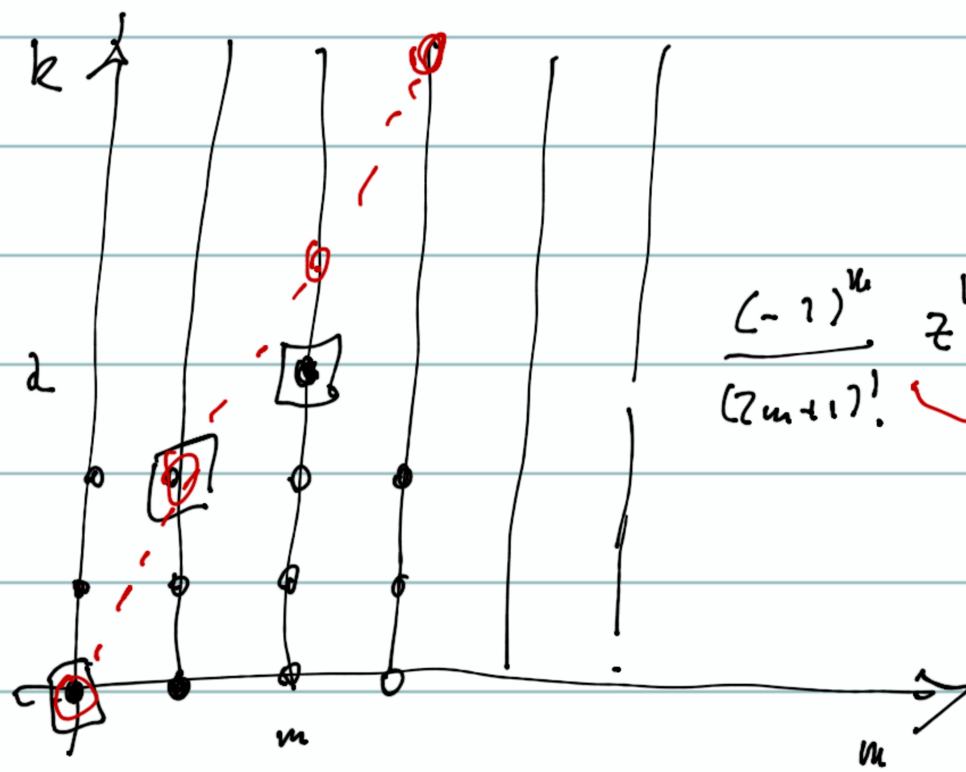
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{k-2m-1}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \Bigg(\underbrace{\sum_{\substack{k,m \geq 0 \\ k-2m-1=n}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}}_{a_n} \Bigg)$$

$n = -1$: $k = 2m$

$$a_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} = \sin 1$$

$(k = 2m)$



$$\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \underbrace{z^{k-2m-1}}_{\frac{1}{z}}$$

$$\int_{\partial B_{1/2}(0)} \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}\,dz = 2\pi i\,\underbrace{\operatorname{Res}(f,0)}_{a_{-1}} =$$

$$= 2\pi i \sin 1 .$$